2022年度 福島県

数学

kmkm

1.

(1)

① 与式 $= -6$

② 与式 $= -14$

③ 与式 $= 5a - 10b - 4a + 6b$

$= a - 4b$

④ 与式 $= 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5}$　※ $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$= 6\sqrt{15}$

(2) おうぎ形の面積 $=$ 半径 $\times$ 半径 $\times \pi \times \dfrac{\text{中心角}}{360}$

半径 $= 5$ cm, 中心角 $= 72°$ なので、

おうぎ形の面積 $= 5 \times 5 \times \pi \times \dfrac{72}{360}$

$= 5 \times 5 \times \pi \times \dfrac{1}{5}$

$= 5\pi$ cm²

2.

(1) 原稿用紙の重さ … $16a$ g

封筒の重さ … b g

全体の重さ … 250g 以上

よって、

$16a + b \geqq 250$

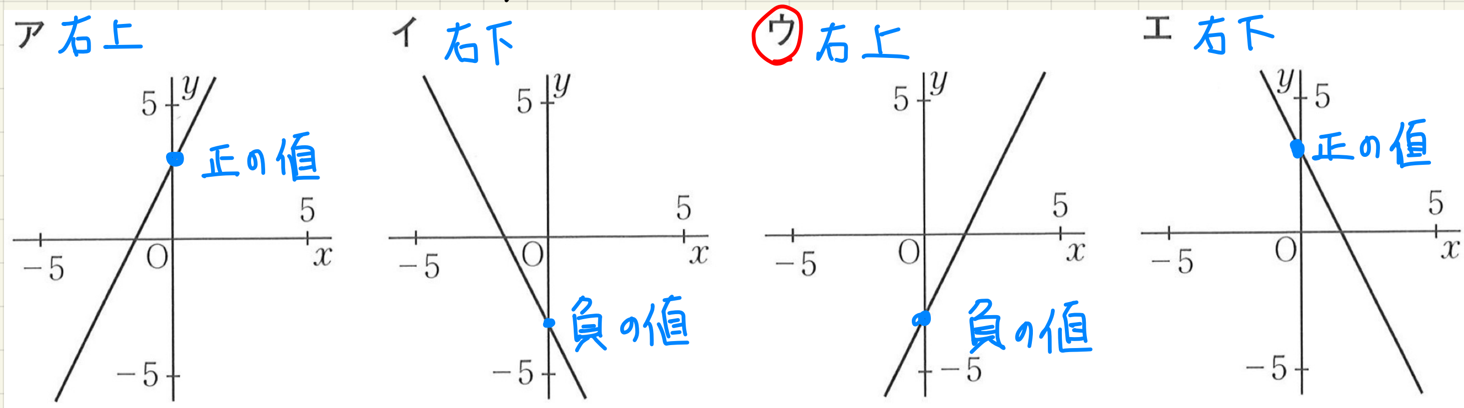
㊟ ～以上 ⇒ $\geqq$, ～以下 ⇒ $\leqq$

～より大きい ⇒ $>$　～未満 ⇒ $<$

(2) $y = \underbrace{2x}_{傾き} \underbrace{-3}_{切片}$

傾き ⇒ 正の値なので右上のグラフ

切片 ⇒ 負の値なので、0より小さい



よって、答えは、ウ

(3) $(x-2)^2 - 6 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - 6 = 0$

$x^2 - 4x - 2 = 0$

$x^2 - 4x - 2$ は因数分解できないので、解の公式を用いると、

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{6}$$

参考

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ の解の公式は.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(別解)

$$(x-2)^2 - 6 = 0$$

$$(x-2)^2 = 6$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{6}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{6}$$

$x - 2 = X$ とおくと.

$X^2 = 6 \Rightarrow X = \pm\sqrt{6}$

$X = x - 2$ より

$x - 2 = \pm\sqrt{6}$

(4) 中央値：データを小さい順に並べたときの真ん中の値

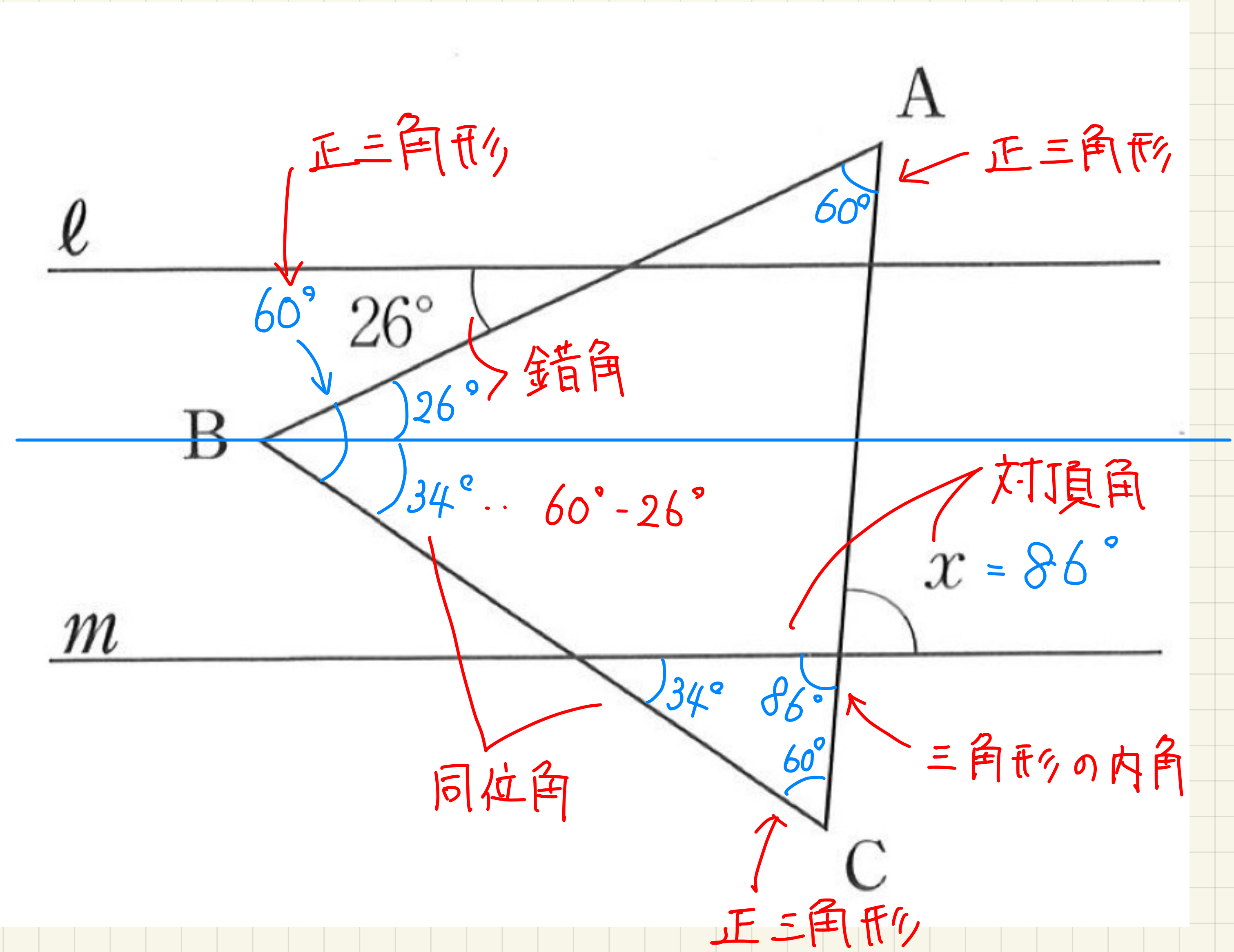
データを小さい順に並べると.

4, 7, 9, 10, 11, 13, 18, 18, 20, 25

データの数が偶数個(10個)なので、中央値は

$$\frac{11+13}{2} = \frac{24}{2} = 12\text{分}$$

(5)



よって $\angle x = 86°$

3.

(1) カードの取り出し方は，

袋A ： 3通り，

袋B ： 2通り，

袋C ： 3通り

なので，全部で

$$3 \times 2 \times 3 = 18 \text{ 通り}$$

①

$b = 2$ のとき

$ab + c$ は正の数になるので不適

$b = -2$ のとき

ab の組み合わせは，

$$1 \times (-2) = -2$$
$$3 \times (-2) = -6$$
$$5 \times (-2) = -10$$

c は $2, 4, 6$ のいずれかなので，

※ $ab + c = -4$

$$\left.\begin{array}{ll} -2 + 2 = 0 & \times \\ -2 + 4 = 2 & \times \\ -2 + 6 = 4 & \times \end{array}\right\} ab = -2 \text{ のとき}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -6 + 2 = -4 & \bigcirc \\ -6 + 4 = -2 & \times \\ -6 + 6 = 0 & \times \end{array}\right\} ab = -6 \text{ のとき}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -10+2=-8 & \times \\ -10+4=-6 & \times \\ -10+6=-4 & \bigcirc \end{array}\right\} ab=-10 \text{ のとき}$$

$ab+c=-4$ となるのは、2通り

② $ab+c$ が 0 または負の数になる場合を考える。

① より

$b=2$ のときは、全て正の数 → 0通り

$b=-2$ のときは、7通り（①※より）

よって、$ab+c$ が 0 または負の数になるのは7通り。

これより、正の数になるのは、

$$\underbrace{18}_{\text{全部の出方}} - \underbrace{7}_{\text{0または負の出方}} = 11 \text{ 通り}$$

よって、求める確率は、$\dfrac{11}{18}$

(2)

① 1段目 $\underbrace{\boxed{1}}_{1\text{個}}$

2段目 $\underbrace{\boxed{4}\ \boxed{5}}_{2\text{個}}$

3段目 $\underbrace{\boxed{9}\ \boxed{10}\ \boxed{11}}_{3\text{個}}$

8段目 $\boxed{64}\ \boxed{65}\ \boxed{66}\ \boxed{67}\ \boxed{68}\ \boxed{69}\ \boxed{70}\ \boxed{71}$

$\underbrace{\hspace{20em}}_{8個}$

よって，8段目の右端は 71

② n段目 $\underbrace{\boxed{n^2}\ \boxed{n^2+1}\ \boxed{n^2+2}\ \cdots\ \boxed{}}_{n個}$

よって，n段目の右端 a は．

$$a = n^2 + n - 1$$ ・・・ −1を忘れずに!!

注 8段目のとき右端の数は

$$8^2 + 8 - 1 = 64 + 8 - 1 = 71$$

また，n段目の右端が n^2+n-1 より．$n-1$ 段目の右端は．n^2+n-1 の n を $n-1$ に変えて．

$$b = (n-1)^2 + (n-1) - 1$$
$$= n^2 - 2n + 1 + n - 1 - 1$$
$$= n^2 - n - 1$$

ア：$a - b = n^2 + n - 1 - (n^2 - n - 1)$

$$= n^2 + n - 1 - n^2 + n + 1$$
$$= 2n$$

nは整数なので，$2n$は偶数。よって正しい

また，$a-b=2n$ で，$a-b$ は偶数なので，

イ：$a-b$ は奇数 → 誤り

ウ：$a-b$ は3の倍数 → 誤り

4.

そうたさんが勝った回数を x 回

ゆうなさんが勝った回数を y 回

とする。このとき，

ゆうなさんが勝つ ＝ そうたさんが負ける.

なので，そうたさんが負けた回数は y 回となる.

あいこは8回なので，じゃんけんをした回数は.

$$\underbrace{x}_{\text{そうた勝}} + \underbrace{y}_{\text{そうた負}} + \underbrace{8}_{\text{あいこ}} = \underbrace{30}_{\text{総数}}$$

これを整理すると.

$$x+y=22 \quad \text{——} ①$$

また，

メダルA：勝った場合は2枚，あいこは1枚.

メダルB：負けた場合は1枚，あいこは1枚

なので，そうたさんは

メダルA：$2x+8$ (枚)

メダルB：$y+8$ (枚)

もらったことになる.

したがって，そうたさんが得たメダルの重量は．

$$\underbrace{5}_{\text{メダルAの1枚の重量}} \times \underbrace{(2x+8)}_{\text{メダルAの枚数}} + \underbrace{4}_{\text{メダルBの1枚の重量}} \times \underbrace{(y+8)}_{\text{メダルBの枚数}} = \underbrace{232}_{\text{総重量}}$$

これを整理して，

$$10x + 40 + 4y + 32 = 232$$

$$10x + 4y = 160$$

両辺を2で割る

$$5x + 2y = 80 \quad \text{—— ②}$$

①，② を連立して方程式を立てると．

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 5x + 2y = 80 \end{cases}$$

これを解くと．

$$\begin{array}{rrcr} & 2x + 2y & = & 44 \\ -) & 5x + 2y & = & 80 \\ \hline & -3x & = & -36 \\ & x & = & 12 \end{array}$$

$x + y = 22$ より

$12 + y = 22$

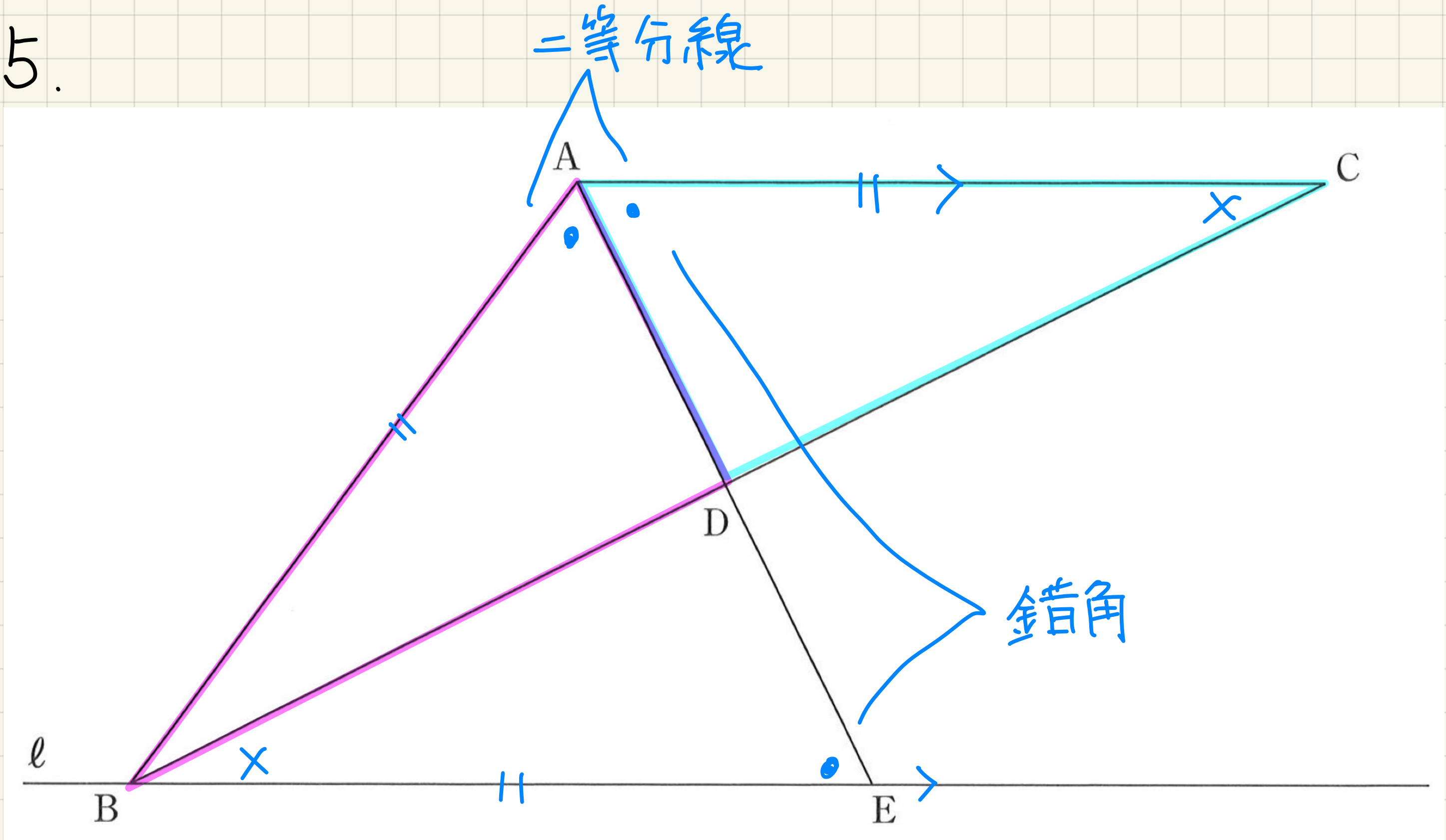
$y = 10$

したがって，

そうたさんが勝った回数　12回

ゆうなさんが勝った回数　10回

5.



△ABD と △ACD において,

共通な辺は等しいので,

AD = AD ―― ①

仮定（AD は ∠BAC の二等分線）より

∠BAD = ∠CAD ―― ②

AC // BE より, 錯角は等しいので,

∠CAD = ∠BED ―― ③

②, ③ より

∠BAD = ∠BED ―― ④

④ より △BAE の底角が等しいので, 二等辺三角形となる。よって

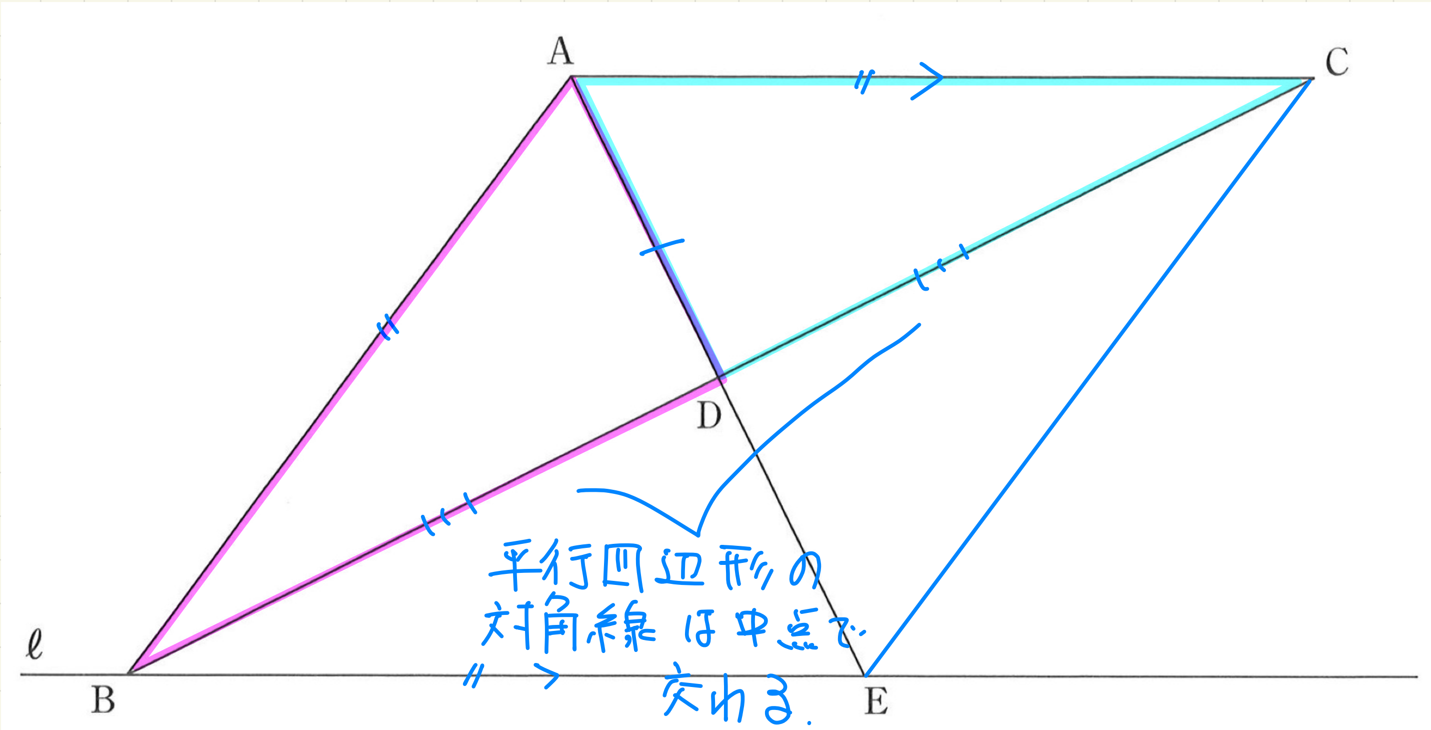
BA = BE ―― ⑤

仮定より

AC = BE ―― ⑥

①, ②, ⑦より 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので, △ABD ≡ △ACD (証明終わり)

(別解)



線分ECを引く。

四角形ABECにおいて, 仮定より

AC // BE —— ①

AC = BE —— ②

①, ②より. 1組の対辺が平行で, その長さが等しいので, 四角形ABECは平行四辺形である。

△ABDと△ACDにおいて,

平行四辺形の対角線は. それぞれの中点で交わるので,

BD = CD —— ③

共通な辺は等しいので.

$AD = AD$ —— ④

仮定（ADは∠BACの二等分線）より

$\angle BAD = \angle CAD$ —— ⑤

AC // BE より，錯角は等しいので.

$\angle CAD = \angle BED$ —— ⑥

②，③ より

$\angle BAD = \angle BED$ —— ⑦

④ より △BAE の底角が等しいので，二等辺三角形となる。よって

$BA = BE$ —— ⑧

仮定より

$AC = BE$ —— ⑨

⑧，⑨ より

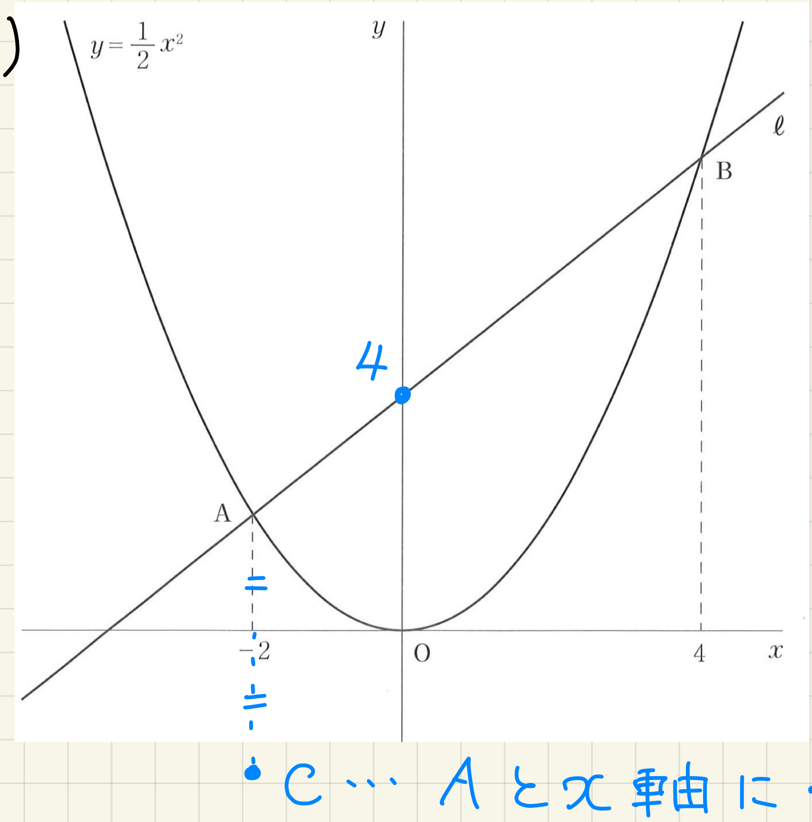
$BA = AC$ —— ⑩

③，④，⑩ より，3組の辺がそれぞれ等しいので.

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ （証明終わり）

6.

(1)



点 C は、A と x 軸について対称なので、

x の値 ⇒ 点 A と同じ

y の値 ⇒ 点 A と符号が反対

となる。

点 A は $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり、$x=-2$ なので、

$$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 4$$

$$=2$$

点 A と同じ

点 A と符号が反対

したがって、点 C の座標は $(-2, -2)$

(2) 点Bは、$y=x+4$ のグラフ上にあり、$x=4$ なので、

$$y = 4+4$$
$$= 8$$

したがって、点Bの座標は $(4, 8)$

点Cの座標は、(1)より $(-2, -2)$

求める直線の式を $y = ax+b$ とおくと、

$$\begin{cases} 8 = 4a + b & \text{—①} \cdots\ x=4, y=8 \text{ を代入} \\ -2 = -2a + b & \text{—②} \cdots\ x=-2, y=-2 \text{ を代入} \end{cases}$$

① − ② より

$$10 = 6a$$
$$a = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

①に代入して

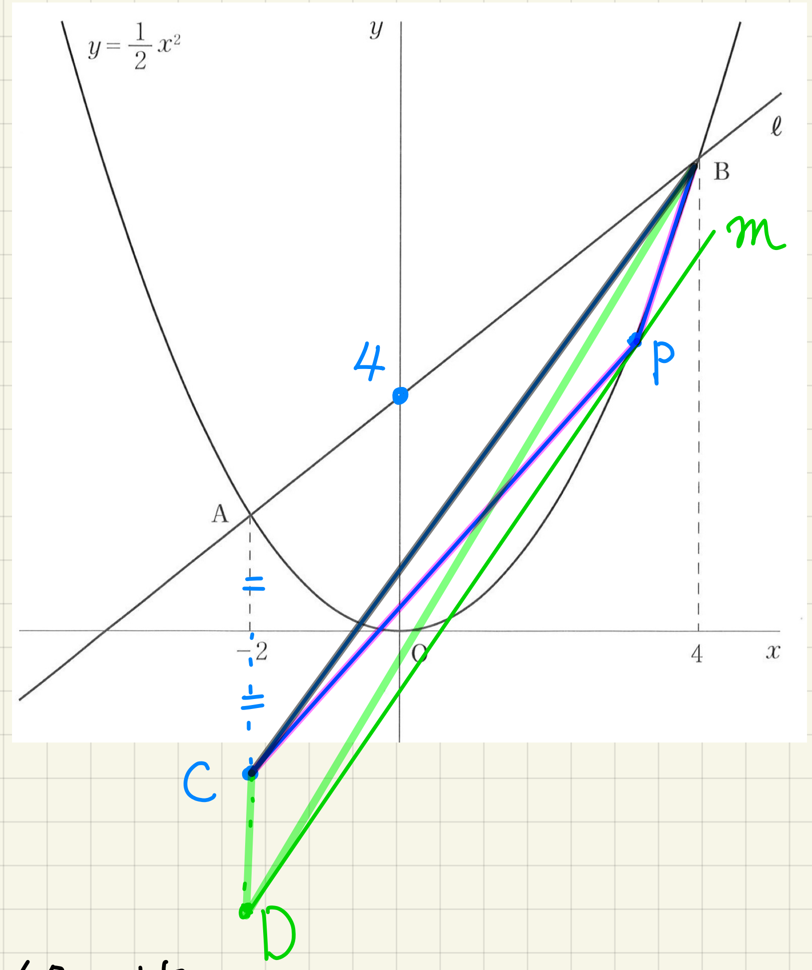
$$8 = 4 \times \frac{5}{3} + b$$

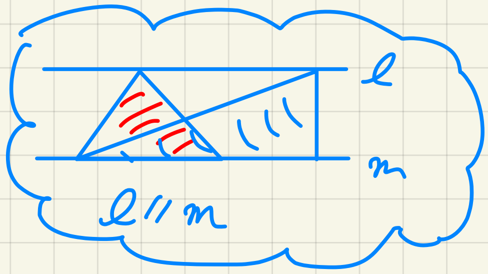
$$8 = \frac{20}{3} + b$$

$$b = 8 - \frac{20}{3}$$
$$= \frac{24-20}{3}$$
$$= \frac{4}{3}$$

よって、求める直線の式は、$y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$

(3) 難問





方針

△PBC の形が複雑
⇒ 等積変形を考える.

⇒ 点Pを通りBCに平行な直線を考える.

⇒ △PBCと△DBCは. BCを底辺とすると,高さが同じなので,面積も同じ.

(解答

点Pを通りBCに平行な直線 m を引く。
また、直線 m 上にあり, $x=-2$ の点をDとする。
△PBC と △PBD において,底辺を共にBCとすると,高さが等しいので,面積も等しい。
したがって

$$\triangle PBC = \triangle PBD$$

"=" は面積が等しいことを表す

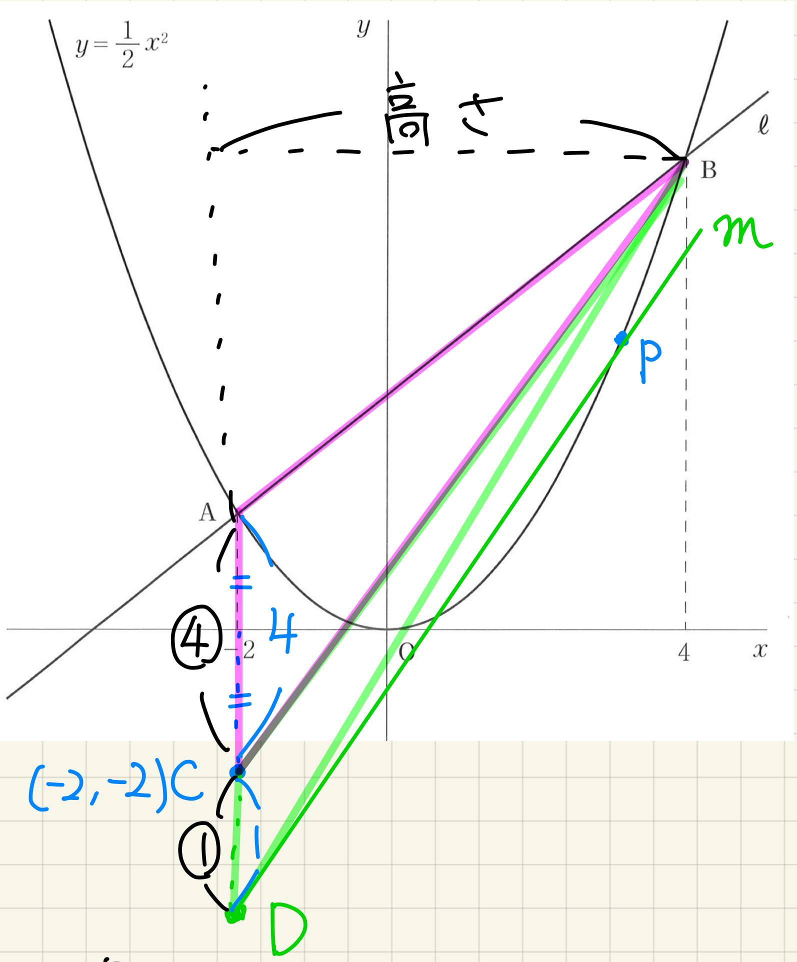
△PBCの面積が △ACBの面積の $\frac{1}{4}$ になれば良いので,

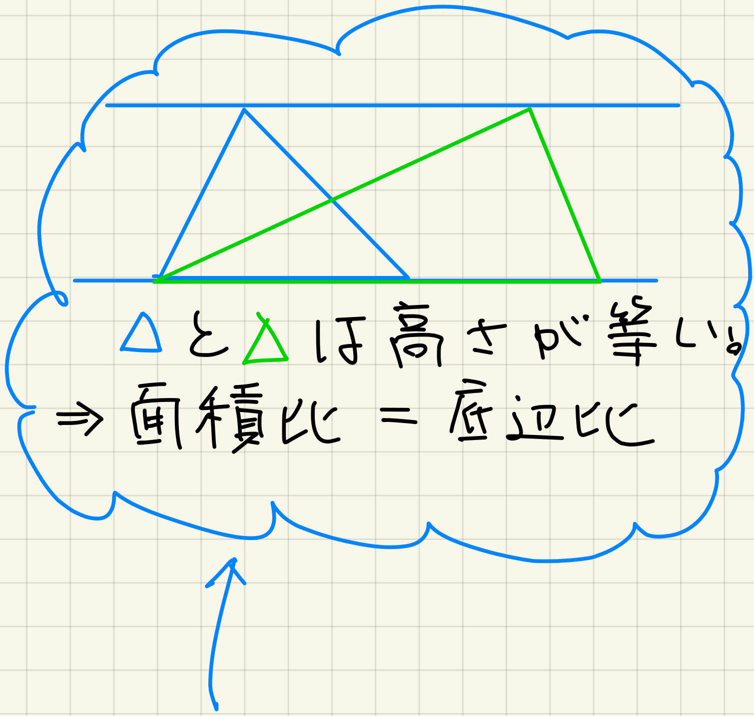
$$\triangle PBC : \triangle ACB = 1 : 4$$

△PBC ＝ △PBD なので、

　　△PBD：△ACB ＝ 1：4

となれば良い。





△PBDと△ACBにおいて、図のように高さをとると、長さは等しい。したがって、面積の比は、底辺の比となる。よって、

　　AC：CD ＝ 4：1

ACの長さは4なので、CDの長さは1となる。

よって、点Dの座標は、

　　(−2, −3)

BCとmは平行なので、傾きは等しい。

(2)よりBCの傾きは$\frac{5}{3}$なので、mの傾きも$\frac{5}{3}$

よって，直線 m の式を $y=ax+b$ とおくと，
$a=\frac{5}{3}$ なので

$$y=\frac{5}{3}x+b$$

点D $(-2,-3)$ は，直線 m のグラフ上にあるので

$$-3=\frac{5}{3}\times(-2)+b$$

$$b=\frac{1}{3}$$

$$b=\frac{10}{3}-3$$

$$=\frac{10}{3}-\frac{3}{3}=\frac{1}{3}$$

よって，直線 m の式は

$$y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$

点Pは，$y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$ の交点なので

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3} \end{cases}$$

よって

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$

両辺を6倍し，整理すると

$$3x^2=10x+2$$

b^2-4ac

$$3x^2-10x-2=0$$

解の公式より

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{31}}{6}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{31}}{6}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{31}}{3}$$ …点Pのx座標

ここで、点Pのx座標($=t$)は、$0 \leqq t \leqq 4$。

また、$5 < \sqrt{31} < 6$ より

($25 < 31 < 36$ より $\underbrace{\sqrt{25}}_{5} < \sqrt{31} < \underbrace{\sqrt{36}}_{6}$)

$\frac{5 - \sqrt{31}}{3} < 0$ なので、不適

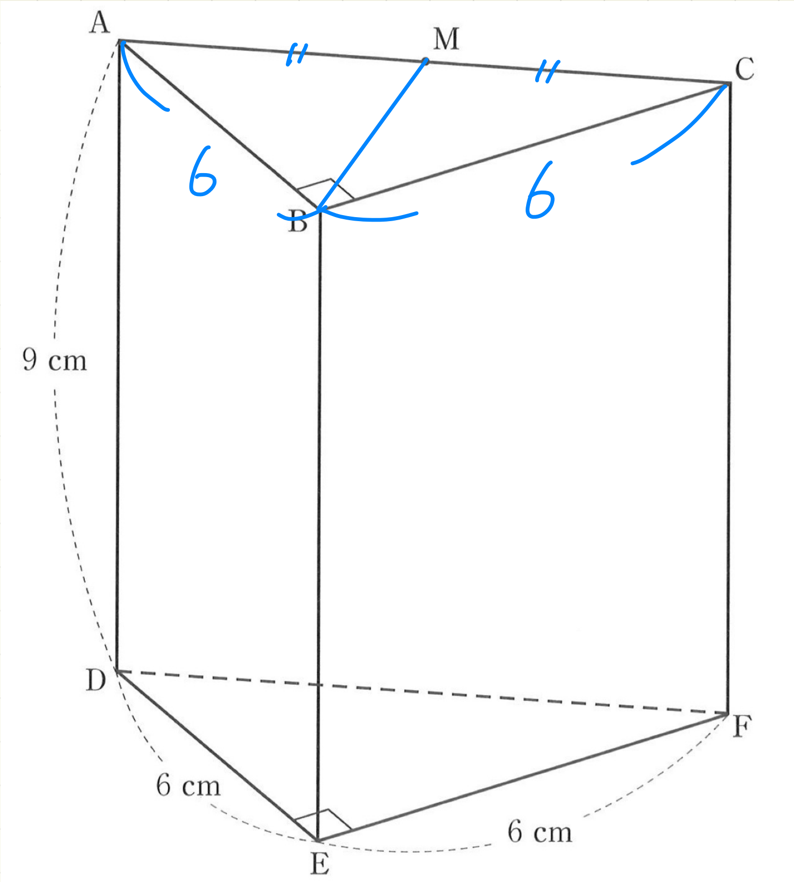
$$\frac{5 + \sqrt{31}}{3} = \frac{5 + 5.\cdots}{3} = \frac{10.\cdots}{3} = 3.\cdots$$

なので $0 \leqq t \leqq 4$ を満たす。よって

$$t = \frac{5 + \sqrt{31}}{3}$$

7.

(1)



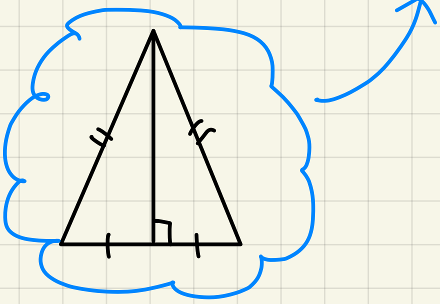
△ABCで三平方の定理より

$$AC = \sqrt{6^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{36 + 36}$$
$$= \sqrt{72}$$
$$= 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

点Mは辺ACの中点なので,

$$AM = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= 3\sqrt{2}$$

△ABCは二等辺三角形なので、BM⊥AC



よって△ABMで三平方の定理より

$$BM = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2}$$

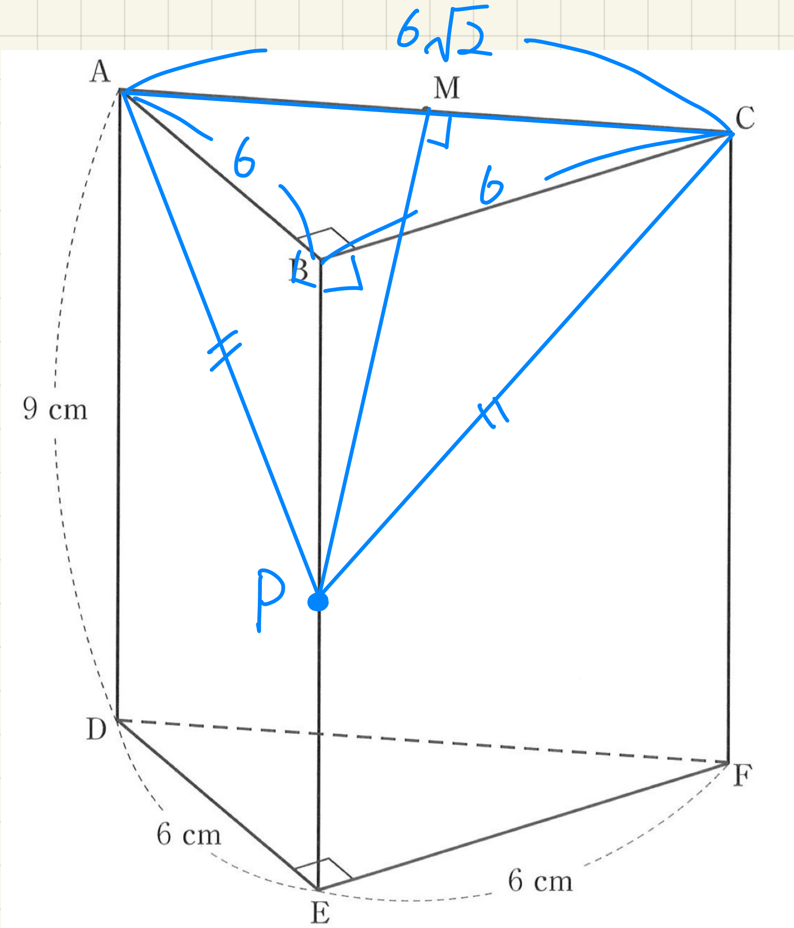
$$= \sqrt{36 - 18}$$

$$= \sqrt{18}$$

$$= 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

(2)

①



△ABPと△CBPにおいて，
仮定より
$$AB = CB = 6 \text{ ——①}$$
また，□APECと□CFEBは長方形なので
$$\angle ABP = \angle CBP = 90° \text{ ——②}$$
共通な辺は等しいので
$$BP = BP \text{ ——③}$$
①，②，③より，2辺とその間の角がそれぞれ等しいので，△ABP ≡ △CBP，
対応する辺は等しいので，AP = CP
よって，△APCは二等辺三角形である。
よって，PM ⊥ AC．

△APC = 30 cm^2 で，AC = $6\sqrt{2}$ cm なので，

$$\underbrace{30}_{\text{面積}} = \underbrace{6\sqrt{2}}_{AC} \times \underbrace{PM}_{\text{高さ}} \times \frac{1}{2}$$

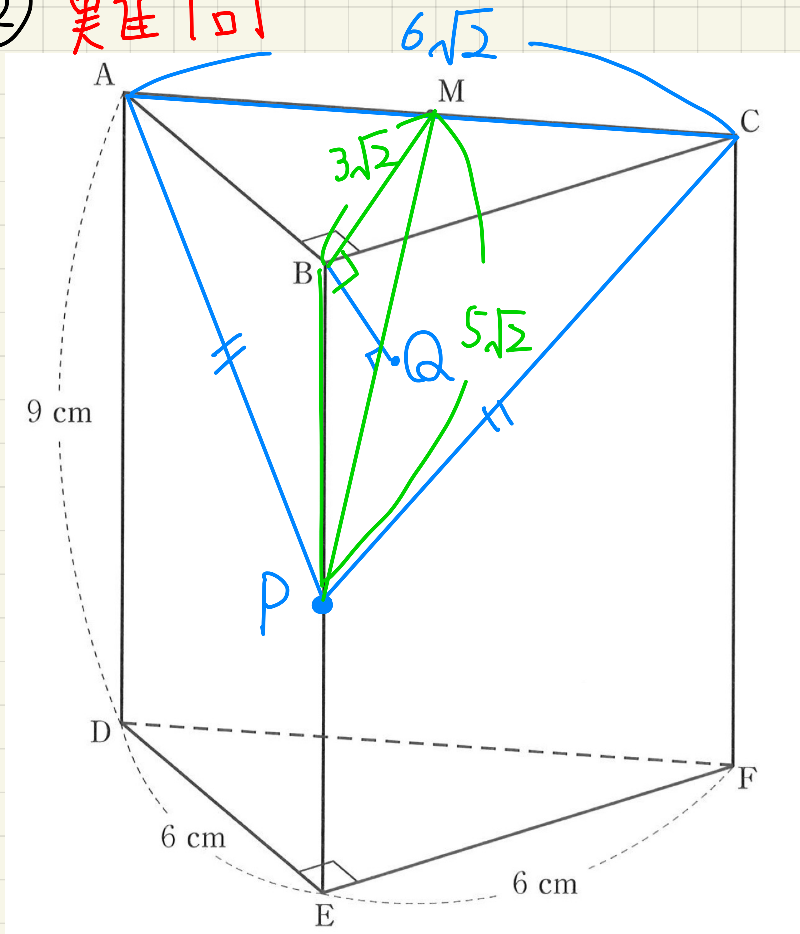
$$30 = 3\sqrt{2} \times PM$$

$$PM = \frac{30}{3\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

よって，
$$PM = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

② 難問



方針

四角錐B－APCの体積を2通りで表す。

⇒△APCを底面としたときと△ABCを底面としたときの2通り

（解答）

点Bから△APCに垂線を下ろした交点をQとする。

⇒求める長さはBQ.

△APCを底面としたとき，四角錐B－APCの体積は.

$$\underbrace{\triangle APC}_{30} \times BQ \times \frac{1}{3}$$

$$= 30 \times BQ \times \frac{1}{3}$$

$$= 10BQ \quad \text{——} \quad ①$$

また，△ABCとBEは垂直なので，∠MBP＝90°

△BMPにおいて，$BM=3\sqrt{2}$，$PM=5\sqrt{2}$ なので，
三平方の定理より

$$BP=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(3\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{50-18}$$

$$=\sqrt{32}$$

$$=4\sqrt{2}$$

よって △ABC を底面としたとき，四角錐 B-APC の体積は

$$\underbrace{6\times6\times\frac{1}{2}}_{\triangle ABC}\times\underbrace{4\sqrt{2}}_{\text{高さ}}\times\frac{1}{3}=24\sqrt{2}\quad\text{—— ②}$$

①と②は同じ四角錐B-APCの体積なので
等しい。よって

$$10BQ=24\sqrt{2}$$

$$BQ=\frac{24\sqrt{2}}{10}$$

$$=\frac{12\sqrt{2}}{5}\ \text{cm}$$