2022年度 茨城県

数学

kmkm

1.

(1)

① 与式 $= 4 + 9$

$= 13$

② 与式 $= \sqrt{18} - \sqrt{8}$

$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

③ 与式 $= \dfrac{6a^3b \times b}{3 \times 2a}$

$= a^2b^2$

④ 分母を6で通分すると、

$$\frac{2(x+6y)}{6} + \frac{3(3x-4y)}{6}$$

$$= \frac{2x + 12y + 9x - 12y}{6}$$

$$= \frac{11}{6}x$$

(2) 式を整理すると、

$x^2 - 4x - 21 + 21 = 0$

$\therefore x^2 - 4x = 0$

左辺をxでくくると、

$$x(x-4)=0$$

よって $x=0, 4$

2

(1) 連立方程式に $x=-6, y=1$ を代入すると.

$$\begin{cases} -6a+b=-11 \\ -6b-a=-8 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -6a+b=-11 & \text{—— ①} \\ -a-6b=-8 & \text{—— ②} \end{cases}$$

①×6+② より

$$\begin{array}{rrrl} & -36a & +6b & =-66 \\ +) & -a & -6b & =-8 \\ \hline & -37a & & =-74 \\ & a & & =2 \end{array}$$

$a=2$ を②に代入して

$$-2-6b=-8$$

$$-6b=-8+2$$

$$=-6$$

$$\therefore b=1$$

よって $a=2, b=1$

(2)

1回目で引けるカードは6通り
2回目で引けるカードは6通り

→1回目で引いたカードを戻すので、2回目に引くカードは、1回目と同じカードを引くことができる。なお、戻さない場合は、2回目で引けるカードは5通り

よって、全部の出方は、$6 \times 6 = 36$通り

$y = \frac{6}{x} \Rightarrow xy = 6$ より、1回目と2回目のカードの積が6になれば良い。その組み合わせは、(1回目, 2回目)と表すことにすると

(−3, −2), (−2, −3), (2, 3), (3, 2)

の4通り。

よって、求める確率は、

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(3) ワイシャツ1枚の定価をx円とする。
割引券を3枚使って、ワイシャツを5着買ったので、

ワイシャツ3着 → ワイシャツ1着あたり定価の3割引きで買う

残りワイシャツ2着 → ワイシャツ1着あたり定価で買う。

よって.

$$\underbrace{\left(1-\frac{3}{10}\right)x}_{\text{定価の3割引き}} \times 3 + \underbrace{x}_{\text{定価}} \times 2 = 8200$$

式を整理すると.

$$\frac{21}{10}x + 2x = 8200$$

両辺を10倍

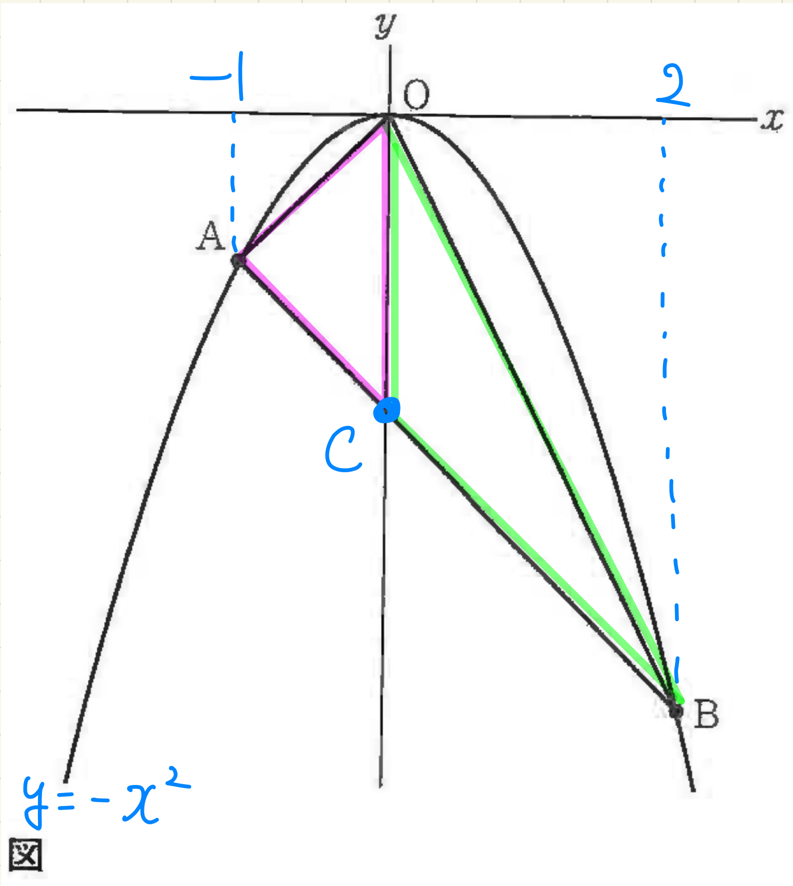
$$21x + 20x = 82000$$

$$41x = 82000$$

$$x = 2000$$

よって, ワイシャツ1着の定価は 2000円

(4)



方針

直線ABの切片をCとする,

$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OCB$

OCを底辺とすると

$\triangle OAC$ … 高さ1

$\triangle OCB$ … 高さ2

なので. OCの長さを求める.

(解答)

点Aは、$y=-x^2$ のグラフ上にあり、$x=-1$ なので、

$$y=-(-1)^2$$
$$=-1$$

∴ 点Aの座標は $(-1,-1)$

同様に、点Bは $y=-x^2$ のグラフ上にあり、$x=2$ なので、

$$y=-(2)^2$$
$$=-4$$

∴ 点Bの座標は、$(2,-4)$

ABを通る直線を $y=ax+b$ とおくと、※

$$\begin{cases} -1=-a+b \\ -)\ -4=2a+b \end{cases}$$
$$3=-3a$$
$$a=-1$$

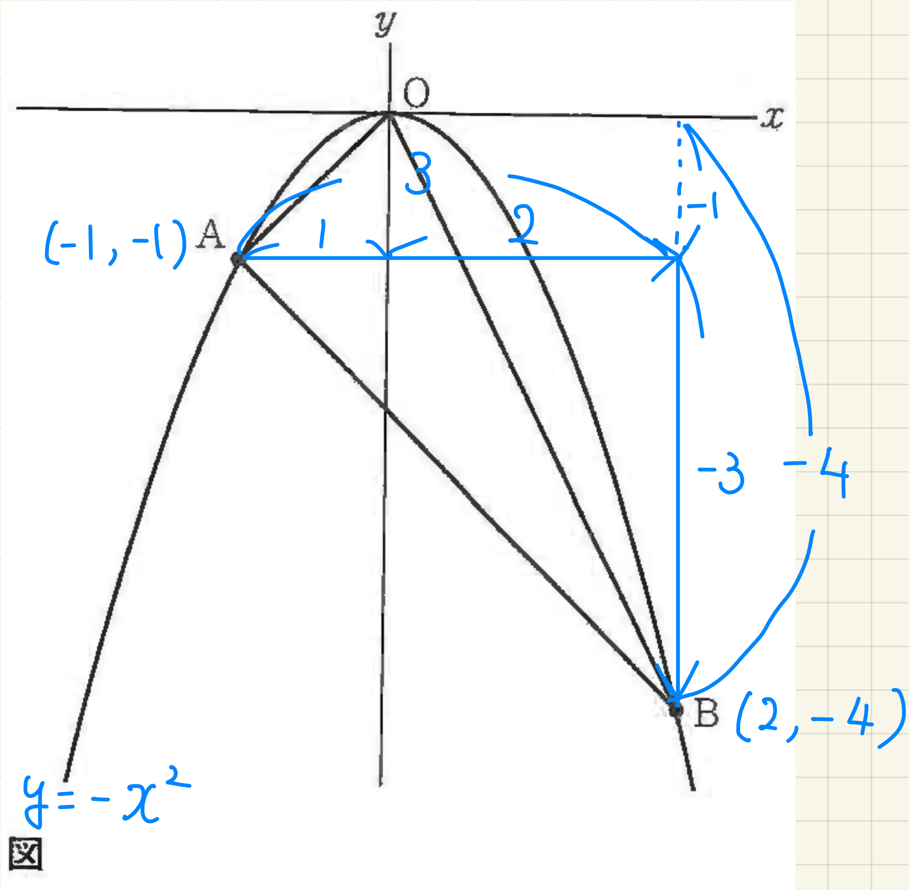
$$-1=-(-1)+b$$
$$b=-1-1$$
$$=-2$$

よって、点Cの座標は、$(0,-2)$。

OCの長さは 2 cm なので、

$$\triangle OAB=\triangle OAC+\triangle OCB$$
$$=2\times1\times\frac{1}{2}+2\times2\times\frac{1}{2}$$
$$=1+2$$
$$=3\ cm^2$$

※ ABを通る直線の式を求める別解



図より変化の割合は、

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{-3}{3} = -1$$

1次関数では、傾きと変化の割合は等しいので、
ABを通る直線の傾きは -1。
よって

$$y = -x + b$$

これが点A $(-1, -1)$ を通るので、

$$-1 = -(-1) + b$$

$$\therefore b = -2$$

3.

(1)

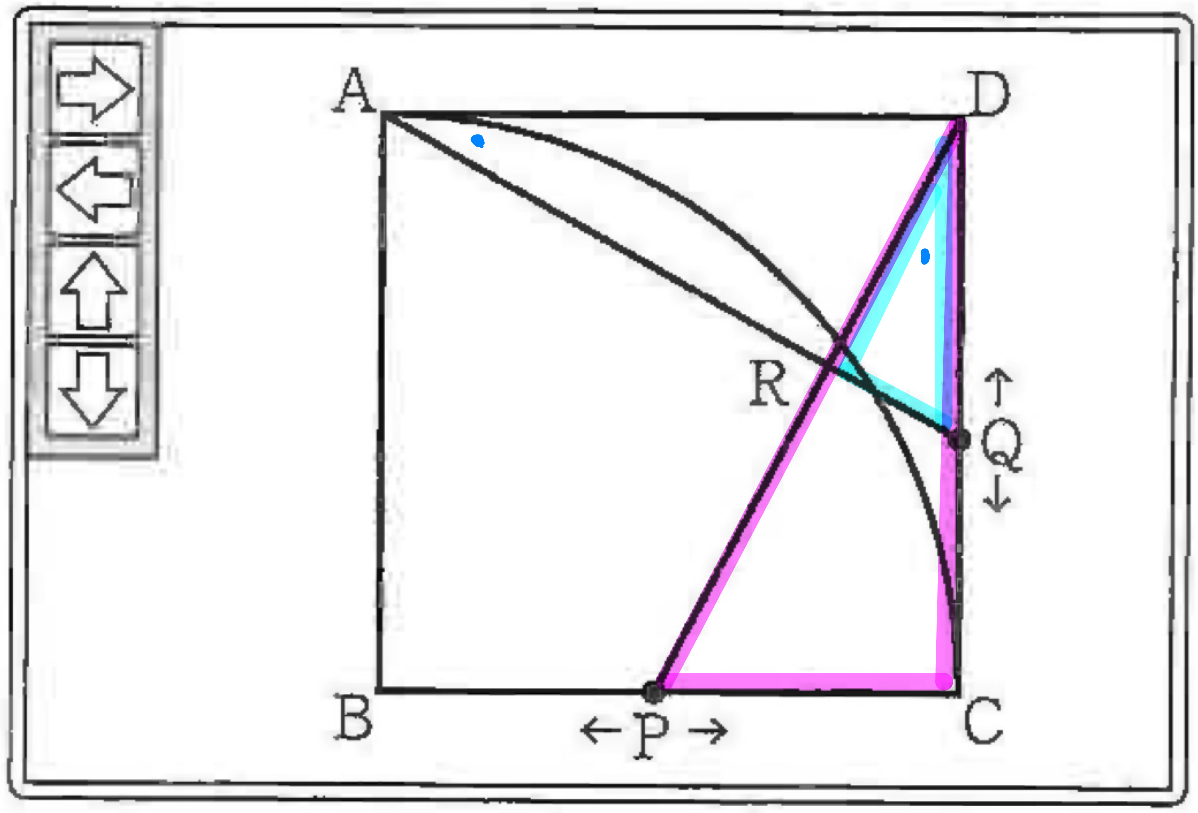


図 1

(証明)

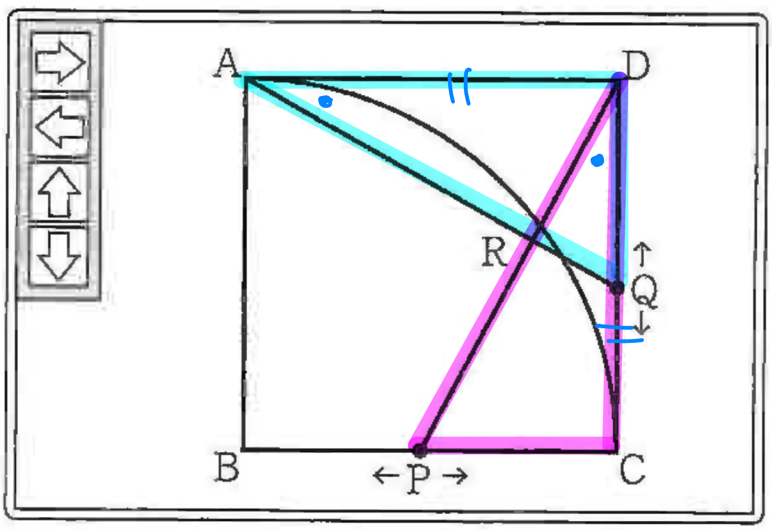


図 1

$\triangle DPC$と$\triangle AQD$において、

仮定から、

$\angle PDC = \angle QAD$ —— ①

四角形ABCDは正方形だから、

$DC = AD$ —— ②

$\angle DCP = \angle ADQ = 90^\circ$ —— ③

①,②,③より、1組の辺とその両端の角が、それぞれ等しいので、

$\triangle DPC \equiv \triangle AQD$ —— ④

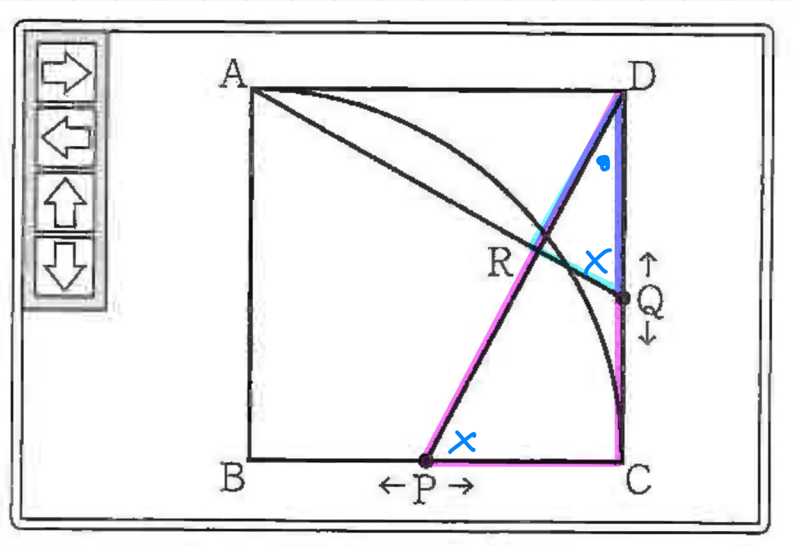


図1

また，△DPCと△QDRにおいて，④より合同な図形の対応する角は等しいので，

$\angle DPC = \angle DQR$ —⑤
(ア)

また，共通な角より

$\angle PDC = \angle QDR$ —⑥
(ウ)

⑤，⑥より2組の角がそれぞれ等しいので
(エ)

$\triangle DPC \backsim \triangle DQR$

(2)

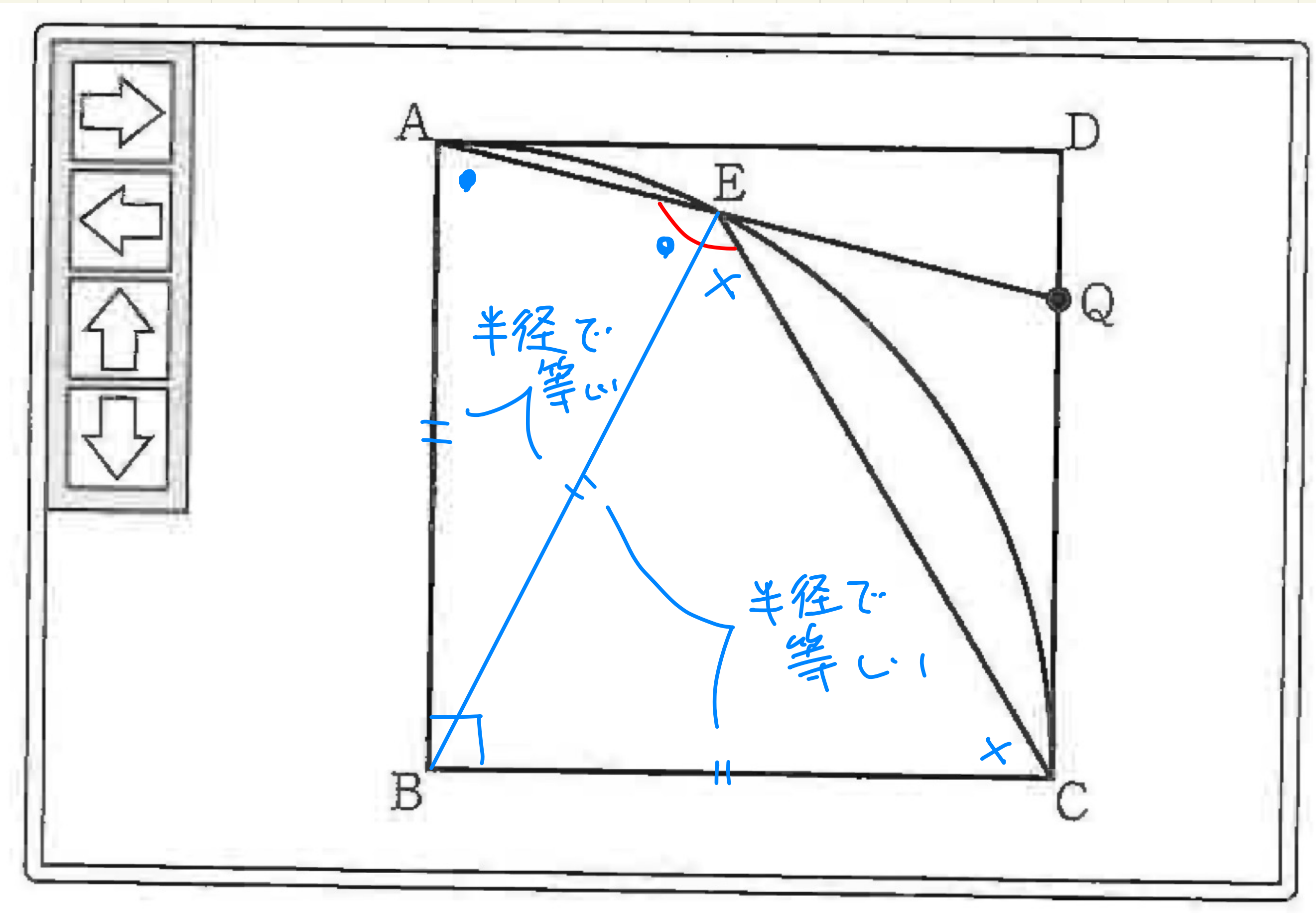


図2

BEに補助線を引く。
ABとEBとCBは、頂点Bを中心とする円の半径なので

$$AB = EB = CB$$

よって、△ABE, △EBCは二等辺三角形である。
△ABEの底角を •, △EBCの底角を × と表すと、
四角形ABCEの内角の和は360°なので

$$\bullet + \bullet + \times + \times + 90 = 360$$

$$\bullet + \bullet + \times + \times = 270°$$

$(\bullet + \times) + (\bullet + \times) = 270°$
$\bullet + \times = A$ とおくと
$A + A = 270°$
$\therefore 2A = 270°$
$\Rightarrow A = 135°$

よって

$$\angle AEC = \bullet + \times$$
$$= 270° \div 2$$
$$= 135°$$

(3)

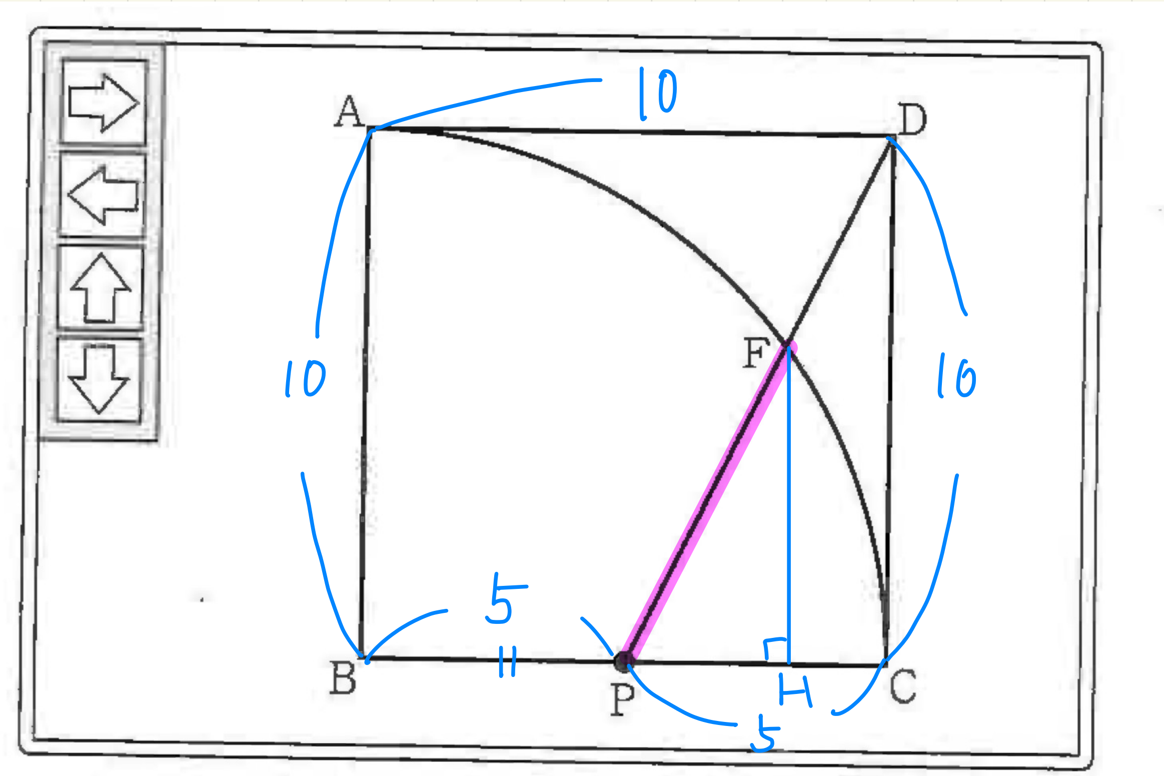


図3

点FからBCに垂線を下ろし、その交点をHとする。
△PFHと△PDCにおいて、
FH // DCより同位角が等しいので、

$\angle PFH = \angle PDC$ ―― ①

$\angle PHF = \angle PCD$ ―― ②

①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle PFH \sim \triangle PDC$. ―― ③

ここで、△PDCにおいて、

$PC : CD = 5 : 10$

$= 1 : 2$

であり、③から

$PH : HF = 1 : 2$.

PH = t とおくと、HF = 2t となる。 ―― ④

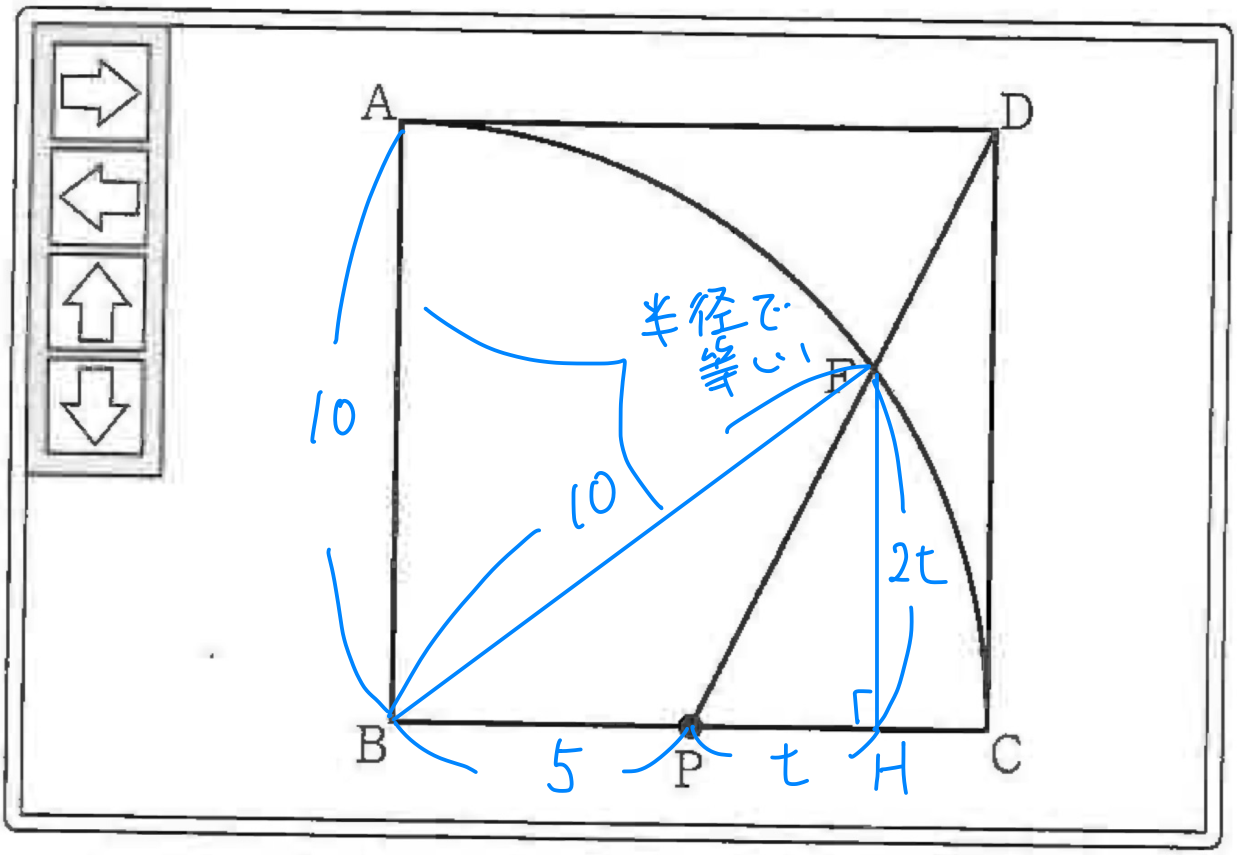


図 3

ここで、△BHFにおいて、
点Fは、点Bを中心とした円の半径なので、

$$BF = 10$$

また、点Pは辺BCの中点なので、

$$BP = 5$$

④より

$$PH = t,\ HF = 2t$$

三平方の定理より

$$\underbrace{10^2}_{BF^2} = \underbrace{(5+t)^2}_{BH^2} + \underbrace{(2t)^2}_{HF^2}$$

式を整理すると、

$$t^2 + 10t + 25 + 4t^2 - 100 = 0$$

$$5t^2 + 10t - 75 = 0$$

両辺を5で割る。

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$(t-3)(t+5) = 0$$

$$\therefore\ t = 3,\ -5$$

tはPHの長さなので、$t > 0$。よって $t = 3$

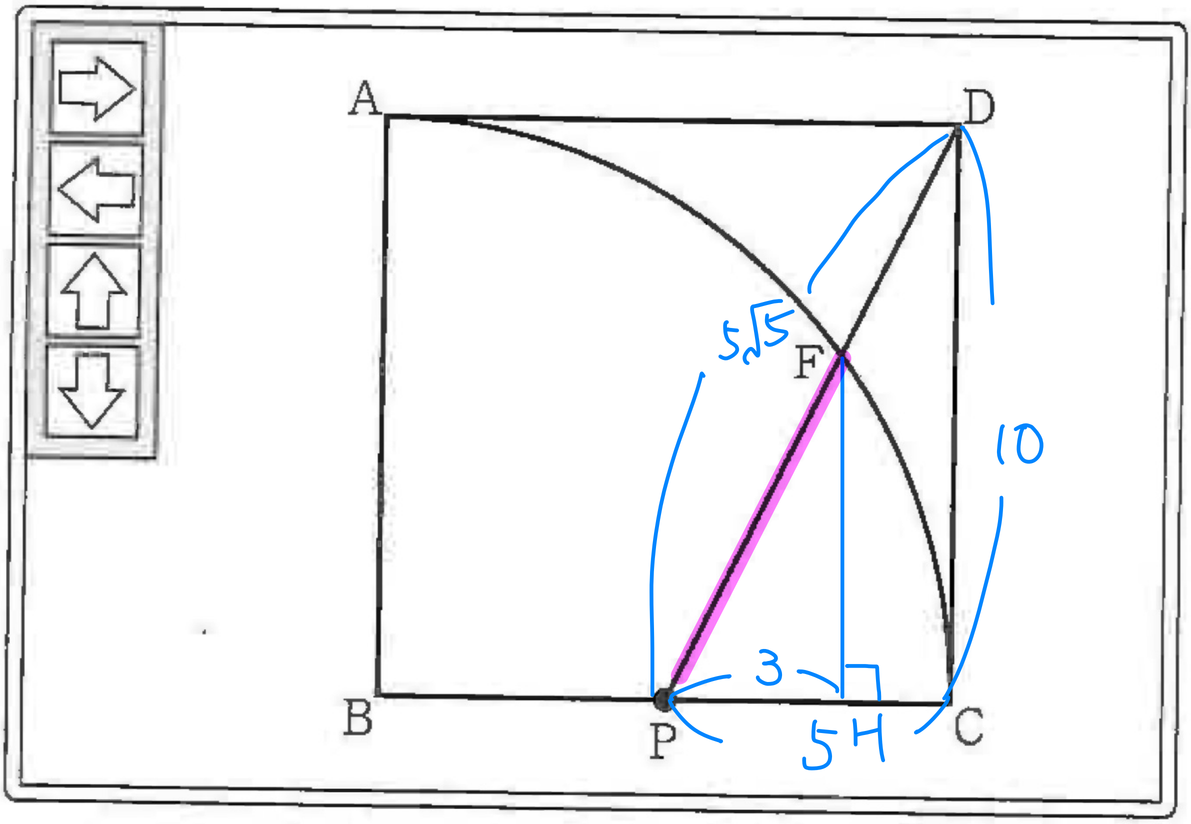


図3

△DPCで 三平方の定理より

$$DP = \sqrt{5^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{25 + 100}$$

$$= 5\sqrt{5}\ \text{cm}$$

$\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

③より△PFH ∽ △PDC で

$$PC : PD = 5 : 5\sqrt{5}$$

$$= 1 : \sqrt{5}$$

よって、

$$\underbrace{PH}_{3} : PF = 1 : \sqrt{5}$$

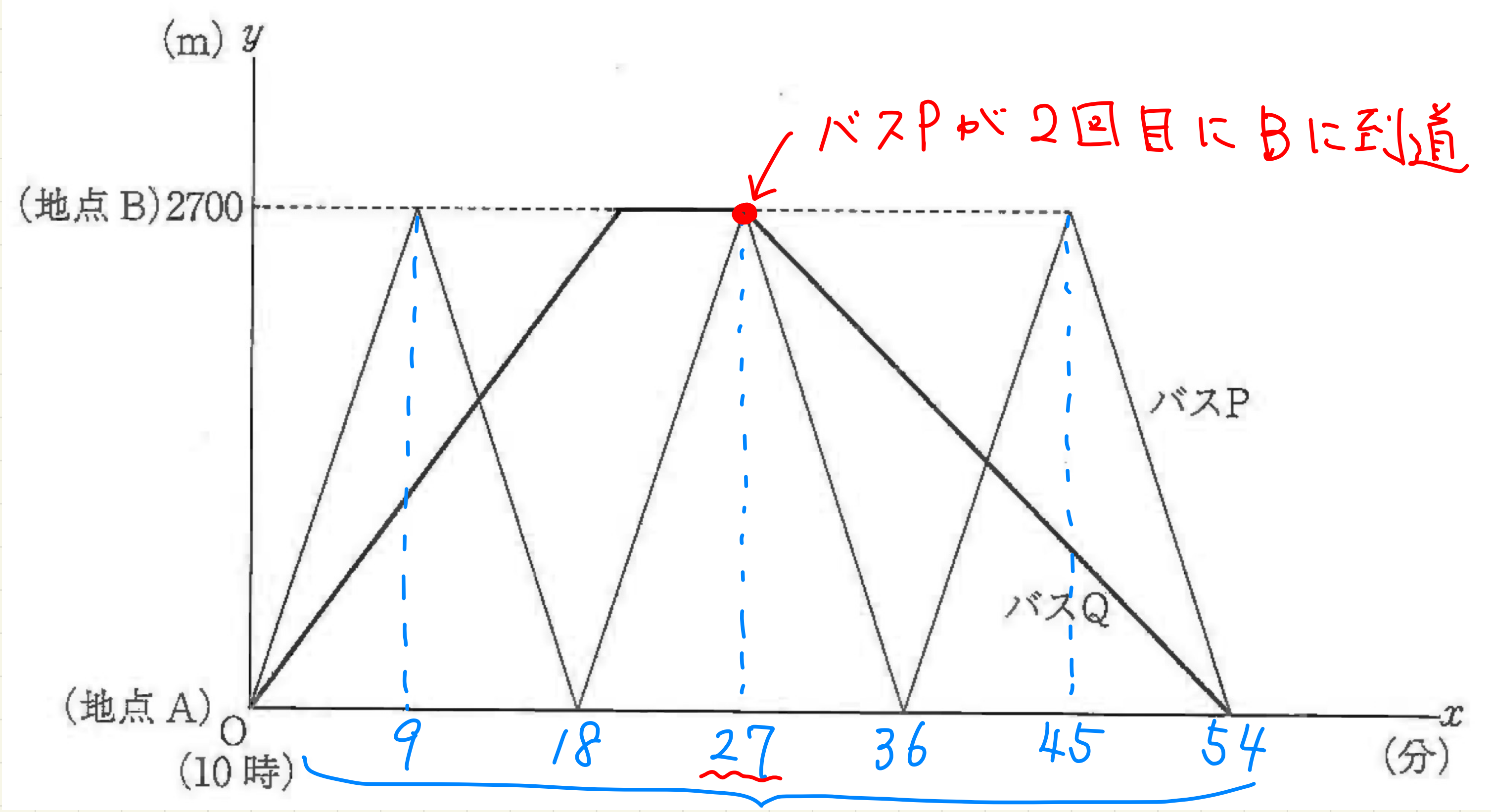
$$\therefore PF = 3\sqrt{5}\ \text{cm}$$

4.

(1)

①

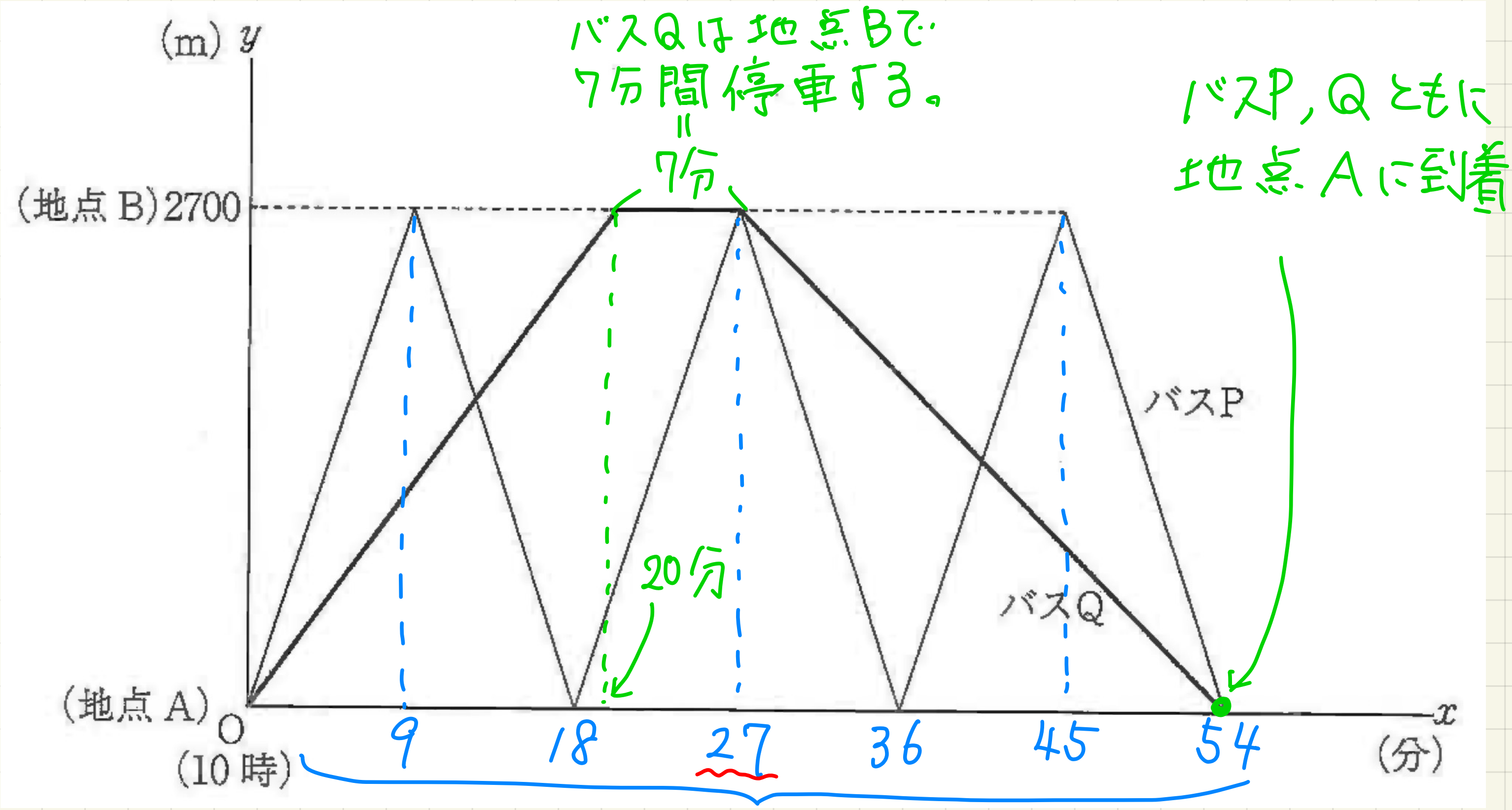
バスP	午前 10 時に地点 A を出発し、実験を終了するまで一定の速さで走行する。 2 地点 A、B 間を片道 9 分で 3 往復する。 バス Q と同時に地点 A に戻り、実験を終了する。



図より、バスPが2回目に地点Bに到着した時刻は、10時27分

②

バスQ	午前 10 時に地点 A を出発し、地点 B まで一定の速さで走行する。 地点 B に到着後、7 分間停車し、その間に速さの設定を変更する。 バス P と同時に地点 B を出発し、地点 A まで一定の速さで走行する。 バス P と同時に地点 A に戻り、実験を終了する。



バスPはA→Bに9分, B→Aに9分

図より、バスQは、地点Aを10時に出発し、地点Bに10時20分に到着する。

⇒ A→Bで2700kmを20分で走走する。

よって、求める速さは、

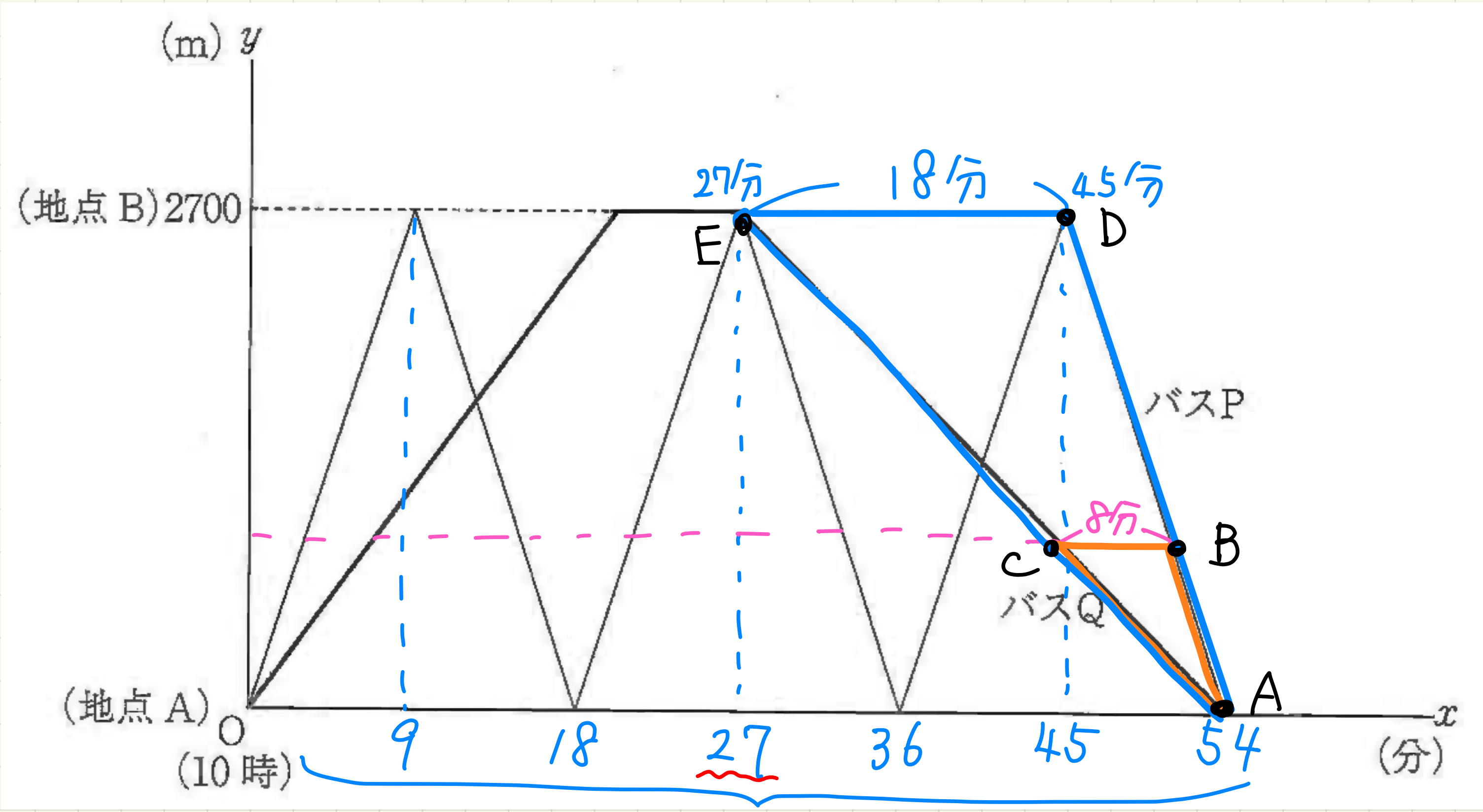
$$速さ = \frac{道のり}{時間}$$

$$= \frac{2700}{20}$$

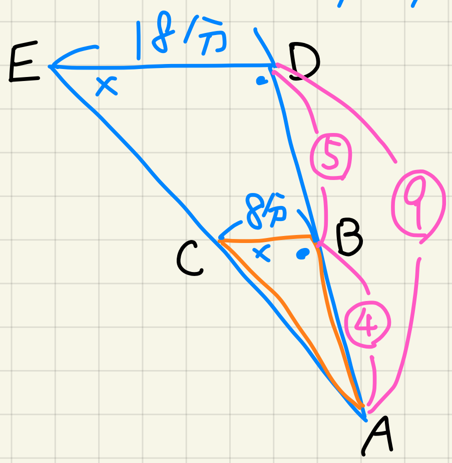
$$= 135 \text{ m/min}$$

分速135m.
135 m/分
とも書く.

(2)



バスPはA→Bに9分, B→Aに9分



△ABCと△ADEにおいて,
BC∥DEより同位角が等しいので

$\angle ABC = \angle ADE$ —— ①
$\angle ACB = \angle AED$ —— ②

①, ②より2組の角がそれぞれ等しいので,
$\triangle ABC \sim \triangle ADE$
このとき, 相似比は $8 : 18 = 4 : 9$
対応する辺の比は等しいので,
$AB : AD = 4 : 9 \Rightarrow AB : BD = 4 : 5$

注 $2700 \times \frac{4}{9}$ は,
地点Aからの道のりになるので, 注意

よって, 求める地点Cは,

$2700\text{m} \times \frac{5}{9} = 1500\text{m}$

5.

(1)

①

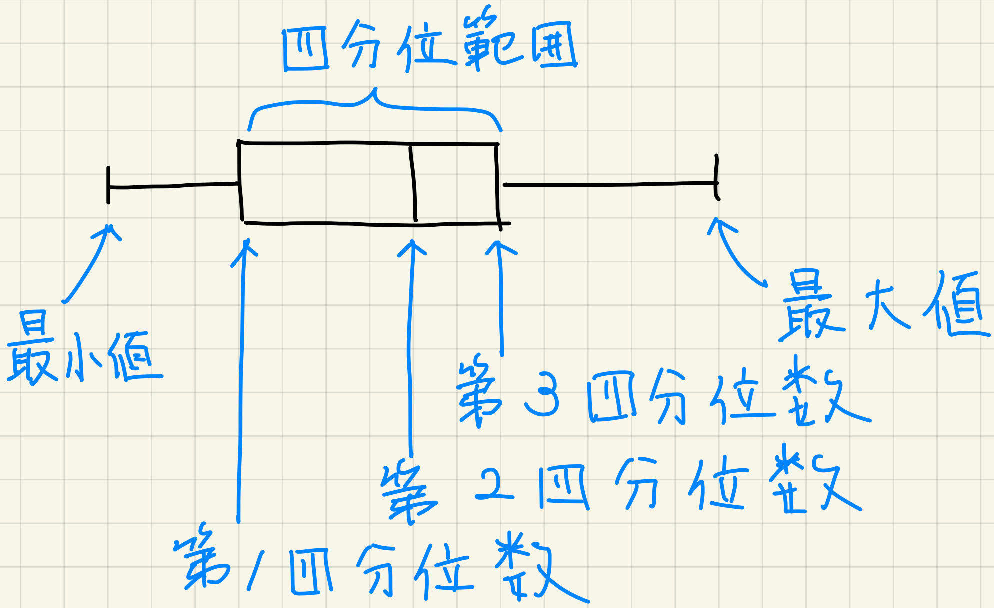
$0\times1+1\times2+2\times1+3\times2+4\times2+5\times4+6\times3+7\times1+8\times3$
$+9\times1+10\times0$
$=0+2+2+6+8+20+18+7+24+9+0$
$=96$

よって平均は

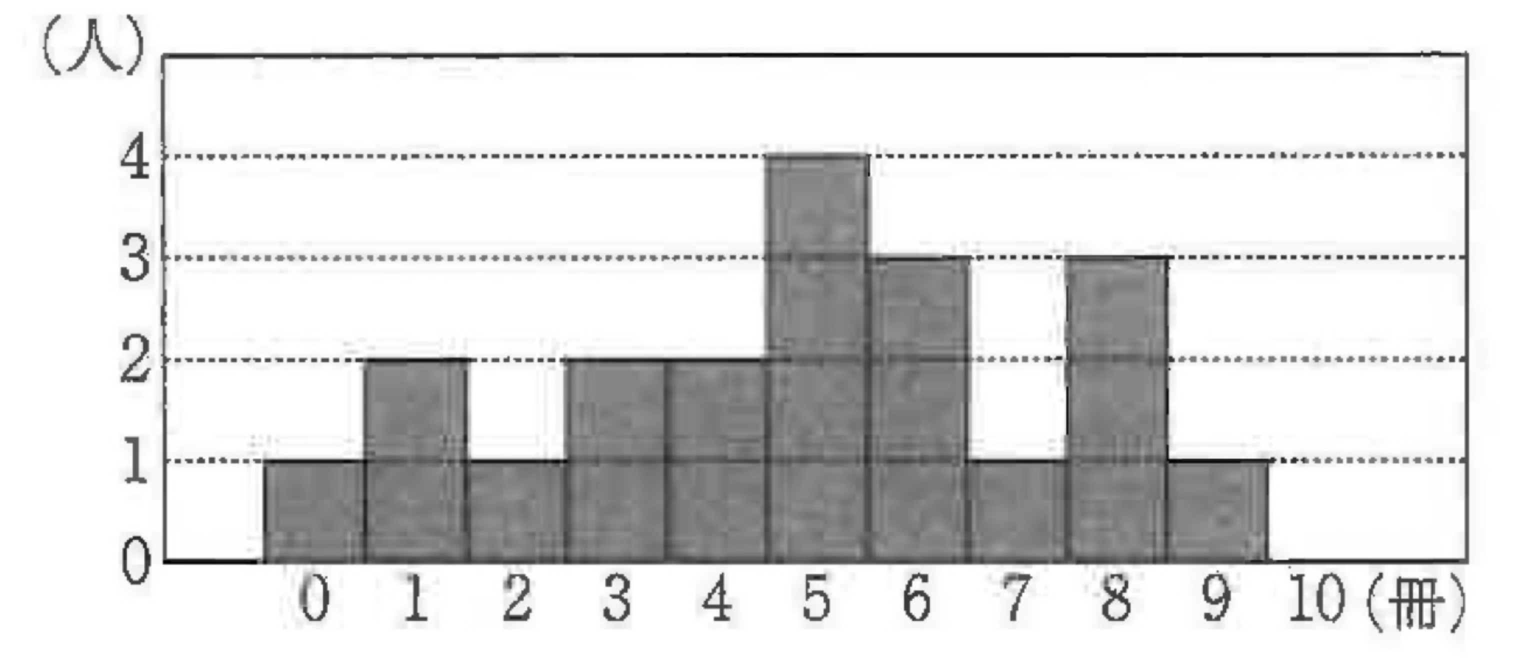
$$\frac{96}{20}=\frac{24}{5}\ (4.8)\ 冊$$

②

箱ひげ図の見方



第1四分位数：下位のデータの中央値
第2四分位数：データ全体の中央値
第3四分位数：上位のデータの中央値



図のグラフを、データの小さい順に並べると、

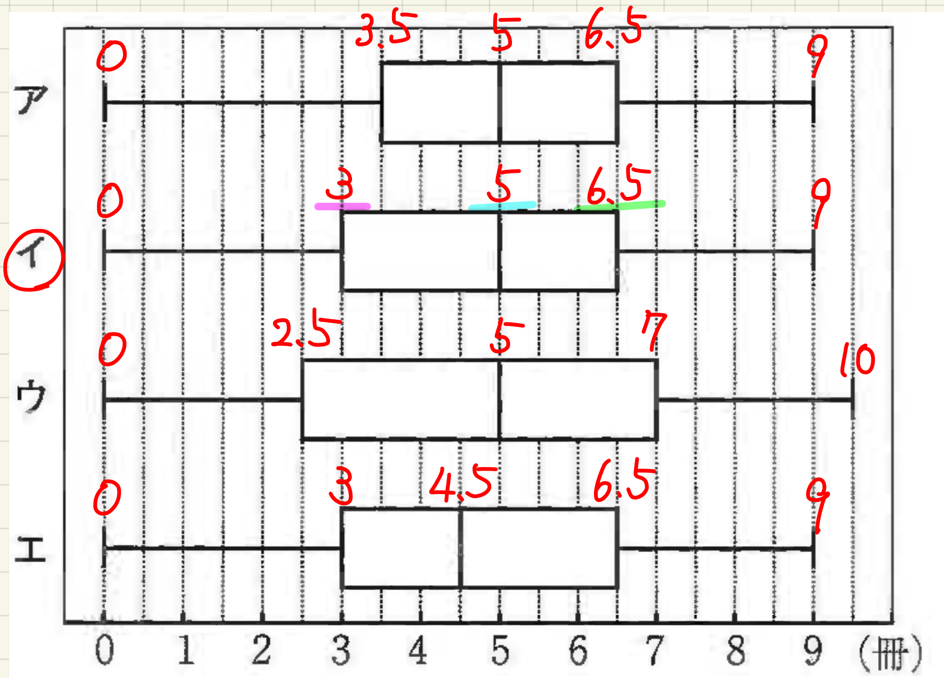
0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7,
8, 8, 8, 9

下位中央　　中央　　上位中央

第1四分位数 $= \dfrac{3+3}{2} = 3$ 冊

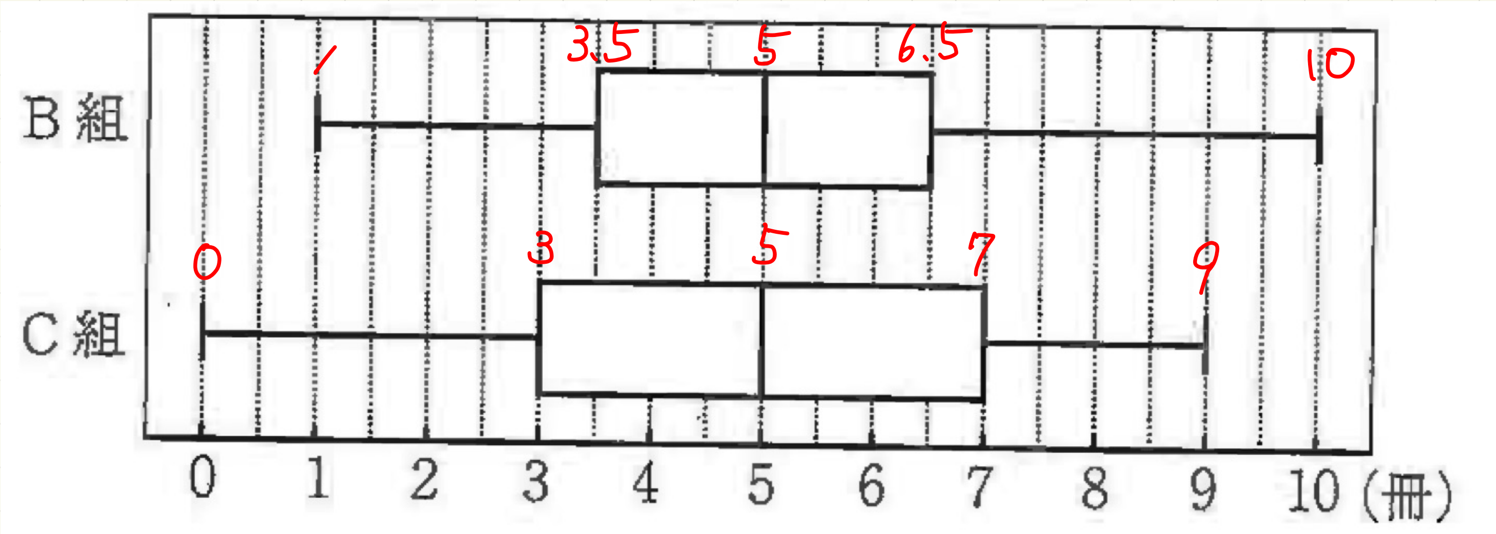
第2四分位数 $= \dfrac{5+5}{2} = 5$ 冊

第3四分位数 $= \dfrac{6+7}{2} = 6.5$ 冊



よって イ

(2)



① B組の四分位範囲：6.5 − 3.5 ＝ 3
C組の四分位範囲：7 − 3 ＝ 4
よって，C組の四分位範囲の方が大きい ⇒ イ

② B組の中央値：5，C組の中央値：5
よって B組とC組の中央値は同じ ⇒ ア

③ B組の第1四分位数：3.5

○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○

3冊以下

下位中央＝3.5

C組の第1四分位数：3

○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○

3冊以下

下位中央＝3

よって，B組もC組も，3冊以下の生徒が5人以上いる。
⇒ ア

④ 平均値は箱ひげ図の中に △ や ＋ で表されるが，
図2に記載がない ⇒ ウ

6.

(1)

①

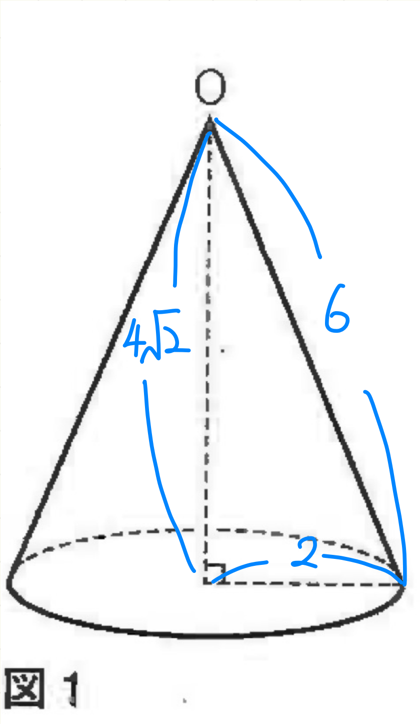


図 1

円すいの体積

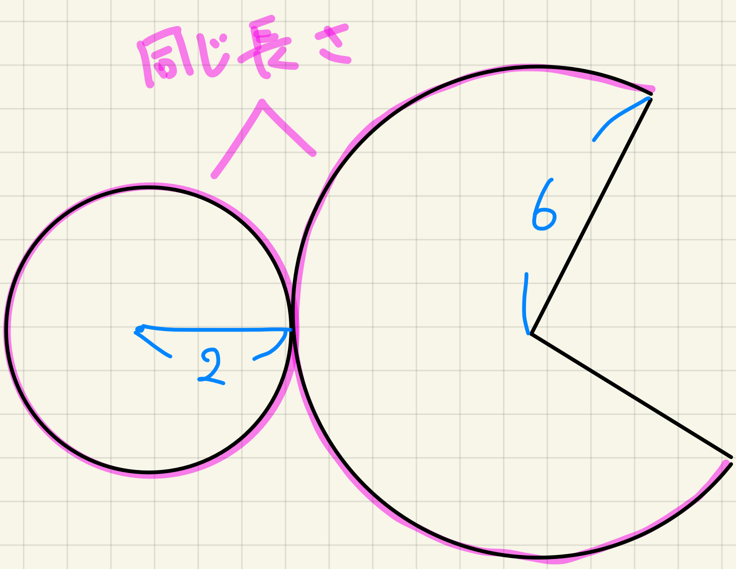
$= 半径 \times 半径 \times \pi \times 高さ \times \frac{1}{3}$

よって

$2 \times 2 \times \pi \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3

② 展開図は以下の通り



おうぎ形の面積

$半径 \times 半径 \times \pi \times \boxed{\frac{中心角}{360}}$

この値を求める

円周の長さ $=$ 直径 $\times \pi$

$= 2 \times 2 \times \pi$

$= 4\pi$

おうぎ形の弧の長さ $=$ 直径 $\times \pi \times \frac{中心角}{360}$

$$= 2 \times 6 \times \pi \times \frac{\text{中心角}}{360}$$

$$= 12\pi \times \frac{\text{中心角}}{360}$$

展開図より，円周の長さとおうぎ形の弧の長さは等しいので

$$4\pi = 12\pi \times \frac{\text{中心角}}{360}$$

よって

$$\frac{\text{中心角}}{360} = \frac{1}{3}$$

円の面積：$2 \times 2 \times \pi = 4\pi\ \text{cm}^2$

// $\frac{1}{3}$

おうぎ形の面積：$6 \times 6 \times \pi \times \boxed{\frac{\text{中心角}}{360}}$

$$= 6 \times 6 \times \pi \times \frac{1}{3}$$

$$= 12\pi\ \text{cm}^2$$

よって表面積は $4\pi + 12\pi = 16\pi\ \text{cm}^2$

(別解)

円すいの側面積(おうぎ形) = 母線 × 半径 × π

$$= 6 \times 2 \times \pi = 12\pi\ \text{cm}^2$$

円すいの底面積(円) $= 2 \times 2 \times \pi = 4\pi\ \text{cm}^2$

よって表面積 $= 12\pi + 4\pi = 16\pi\ \text{cm}^2$

(3) 難問

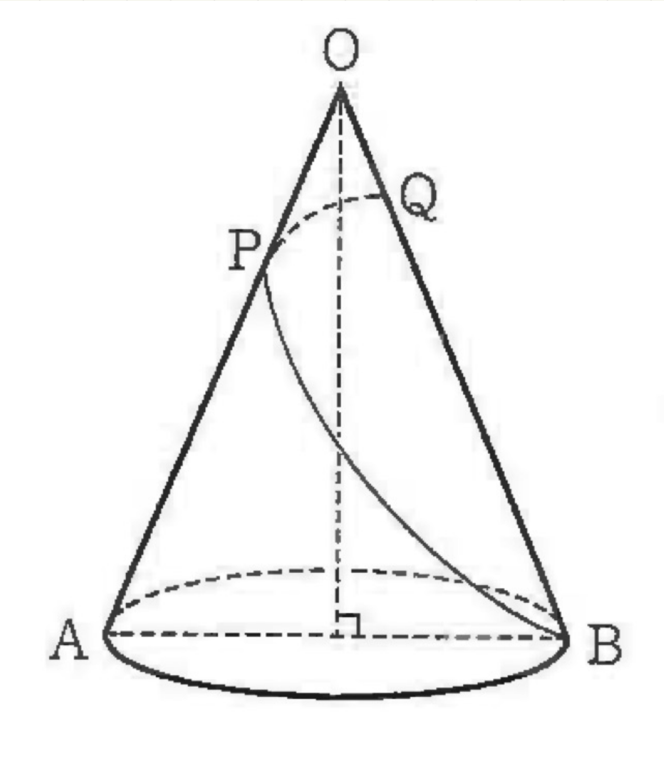
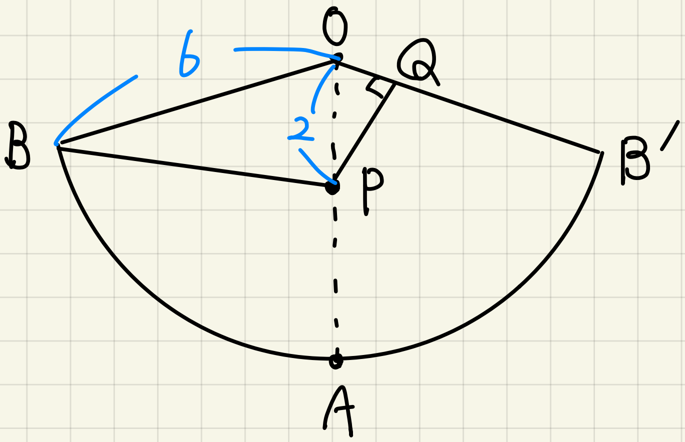


図2

側面を展開して考える.



Pは固定 ⇒ BPの長さは固定

Qは動く ⇒ PQの長さが最短になる。

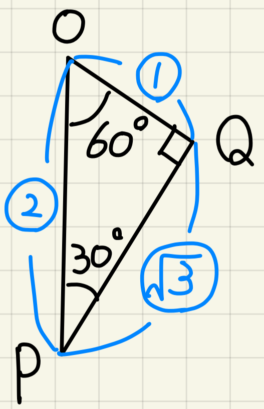
⇒ OB'とPQは垂直

(1) ②より $\dfrac{中心角}{360} = \dfrac{1}{3}$ なので, $中心角 = \dfrac{360}{3} = 120^\circ$

$\therefore \angle BOB' = 120^\circ$

Aは $\overset{\frown}{BB'}$ の中点なので, OAは$\angle BOB'$の二等分線.

$\therefore \angle BOA = \angle B'OA = 60^\circ$



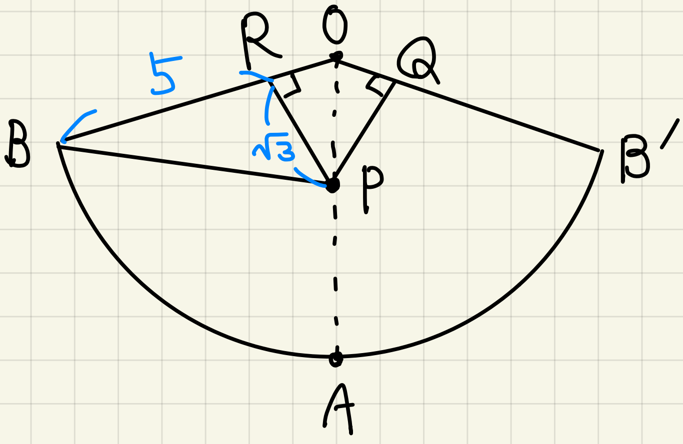
$$\angle OPQ = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)$$
$$= 180^\circ - 150^\circ$$
$$= 30^\circ$$

よって△OPQは30°-60°-90°の直角三角形なので

$OQ : OP : PQ = 1 : 2 : \sqrt{3}$ —— ①

$OP = 2$ cm なので

$2 : PQ = 2 : \sqrt{3} \Rightarrow PQ = \sqrt{3}$ cm



図のように、点Rを OAについて点Qと対称となるようにとる。

△ORPと△OQPは左辺対称なので、

$\angle ORQ = \angle OQP = 90°$

$OR = OQ$ —— ②

$RP = QP$ —— ③

①より $OQ : OP = 1 : 2$ で $OP = 2$cmより

$OQ : 2 = 1 : 2 \Rightarrow OQ = 1$ cm

②より $OR = 1$cm

同様に、①より $OQ : PQ = 1 : \sqrt{3}$ で $OQ = 1$cmより

$1 : PQ = 1 : \sqrt{3} \Rightarrow PQ = \sqrt{3}$ cm

③より $RP = \sqrt{3}$ cm

また、OBは母線の長さで6cmなので、

$$
\begin{aligned}
BR &= OB - OR \\
&= 6 - 1 \\
&= 5 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

△RBPで三平方の定理より

$$BP = \sqrt{5^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{25 + 3}$$

$$= \sqrt{28}$$

$$= 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

よって、最短となるひもの長さは、

$$BP + PQ = 2\sqrt{7} + \sqrt{3} \text{ cm}$$