2022年度　山形県
数学

KmKm

$\boxed{1}$

1.

(1) 与式 $= -7 + 2 - 1$

$= -6$

(2) 与式 $= -\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2}$

$= -\frac{5}{8} + \frac{1}{2}$

$= -\frac{5}{8} + \frac{4}{8}$

$= -\frac{1}{8}$

(3) 与式 $= (-6x^2y) \div (-2xy) + 8xy \div (-2xy)$

$= 3x - 4$

(4) 与式 $= 4 - 4\sqrt{6} + 6 + 2\sqrt{6}$

$= 10 - 2\sqrt{6}$

2. 式を整理すると、

$3x^2 - 6x + x - 2 = x - 1$

$3x^2 - 6x - 1 = 0$

解の公式より

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$$

$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$$= \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6}$$

分子・分母を2で割る．

$$= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

参考

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ の解の公式は．

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3．（1回目に取ったカード，2回目に取ったカード）と表す。

(1, 2)，(1, 3)，(1, 4)，(1, 5)
(2, 3)，(2, 4)，(2, 5)
(3, 4)，(3, 5)
(4, 5)

全部で10通り

このうち，大きい方 ÷ 小さい方 の余りが 1 になるのは，

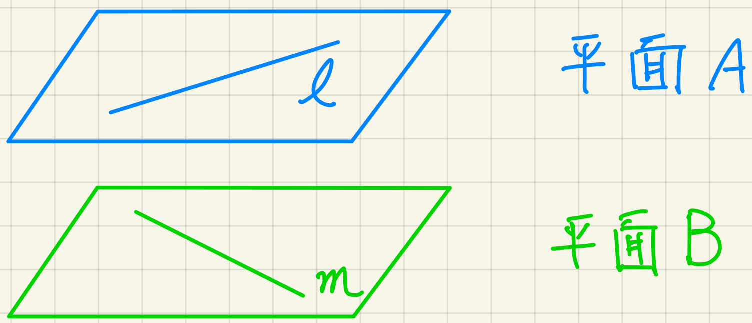
(2, 3) → $3 \div 2 = 1 \cdots 1$

(2, 5) → $5 \div 2 = 2 \cdots 1$

$(3, 4) \to 4 \div 3 = 1 \cdots 1$
$(4, 5) \to 5 \div 4 = 1 \cdots 1$
の4通り。よって求める確率は、

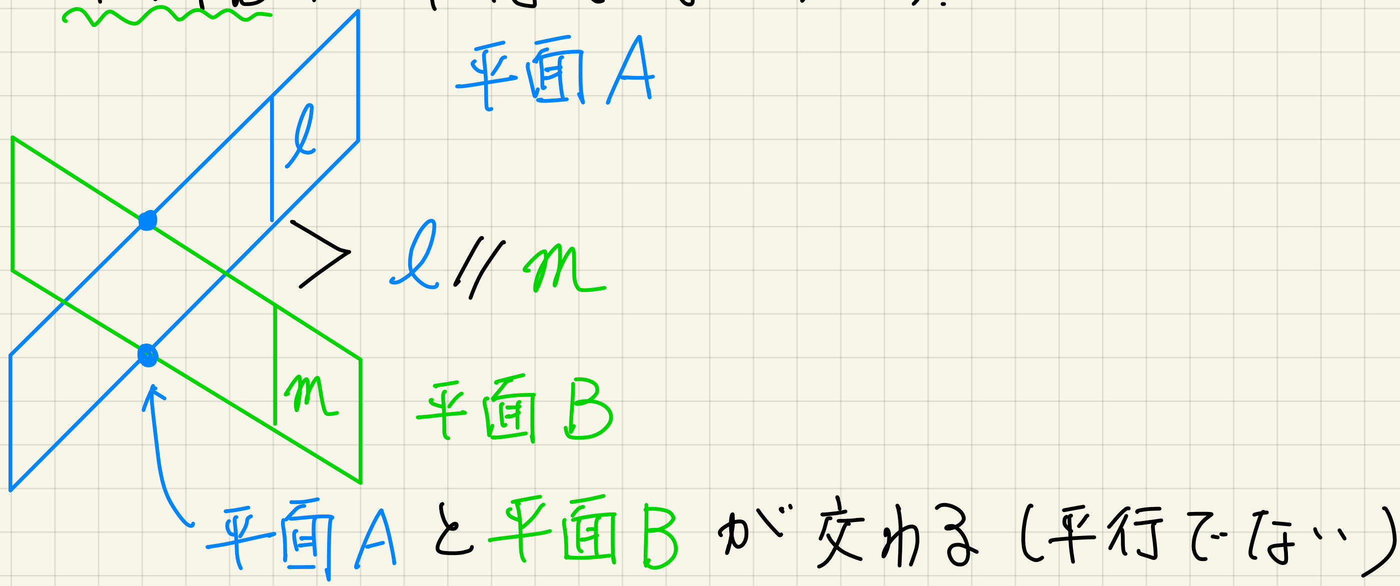
$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

4.
ア：誤り
下の例では、平面Aと平面Bは平行であるが、直線 ℓ と直線 m は平行でないため。



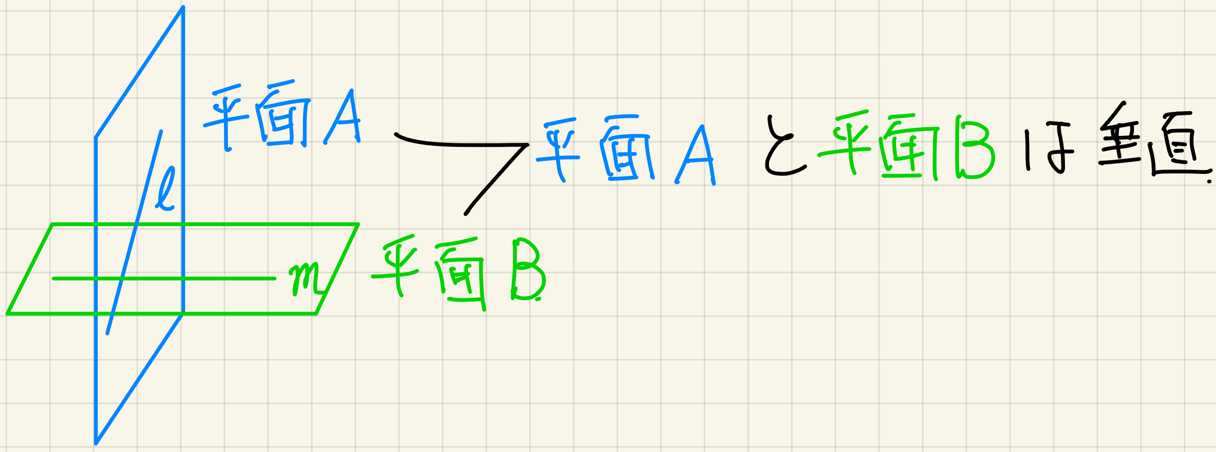
イ：誤り

下の例では、$\ell // m$ であるが、平面Aと平面Bが平行でないため。

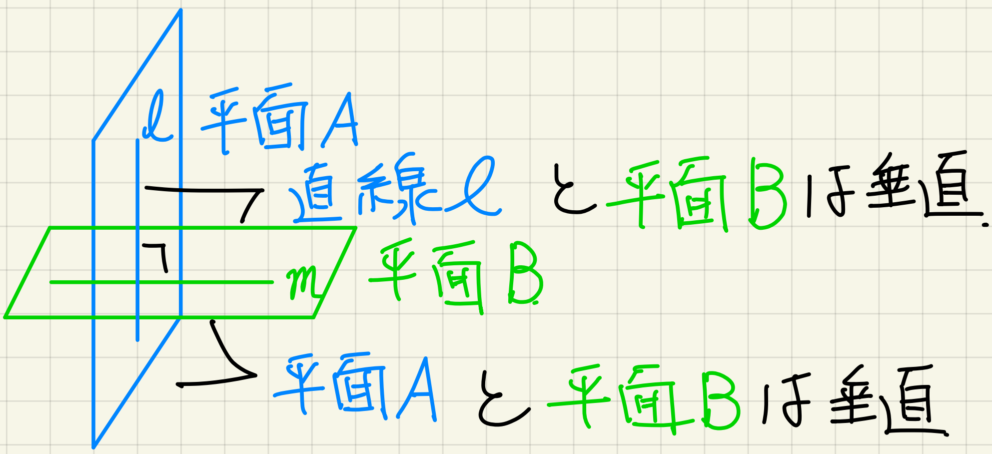


ウ：誤り

下の例では平面Aと平面Bは垂直であるが直線ℓと直線mが垂直でないため.



エ：正しい



5.

最頻値：最も頻度が高い値

中央値：データを小さい順に並べたときの中央にある値

表

得点（点）	試合数（試合）	
0	12	→ 12
1	15	→ 27
2	8	→ 35
3	4	→ 39
4	2	→ 41
5	1	→ 42
計	42	

表（去年）の

・最頻値：1点

・中央値：42試合の中央の試合数は、21試合目と22試合目

21試合目 → 1点

22試合目 → 1点

データ数が偶数(42)なので、21試合目と22試合目の平均は、

$$\frac{1+1}{2} = 1\text{点}$$

1 8
2 1

また、1点以上の試合数は

$15+8+4+2+1 = 30$ 試合

なので、割合は、

$$\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

ア：最頻値 1点、中央値：$\frac{1+1}{2} = 1$点

1点以上の試合数の割合：$\frac{23}{30}$

$$\frac{150}{210} < \frac{161}{210}$$

…分母を210で通分

去年の割合 $\left(\frac{5}{7}\right)$　今年の割合 $\left(\frac{23}{30}\right)$

イ：最頻値1点，中央値：$\frac{1+2}{2}$ = 1.5点

得点の中央値が去年と等しくないので誤り

ウ：最頻値1点，中央値：$\frac{1+1}{2}$ = 1点

1点以上の試合数の割合：$\frac{21}{30}$

$\frac{150}{210} > \frac{147}{210}$ …分母を210で通分

去年の割合 $\left(\frac{5}{7}\right)$　今年の割合 $\left(\frac{23}{30}\right)$

1点以上の今年の試合数の割合が去年より小さいので誤り

エ：最頻値：2点

得点の最頻値が去年と等しくないので誤り

$\boxed{2}$

1.

(1) 変化の割合 $= \dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

xの増加量

xが-4から0まで増加するので

$0-(-4)=4$

yの増加量

$x=-4$のとき

$y=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\times 4^2=8$

$x=0$のとき

$y=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\times 0^2=0$

よってyの増加量は

$0-8=-8$

変化の割合 $= \dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

$= \dfrac{-8}{4}$

$= -2$

(別解)

$y=ax^2$ において、x が p から q まで増加するとき、変化の割合は、

$a(p+q)$

で表すことができる。

$y=\frac{1}{2}x^2$ で x が -4 から 0 まで増加するので、

$$\text{変化の割合} = \frac{1}{2}\times(-4+0)$$
$$= \frac{1}{2}\times(-4)$$
$$= -2$$

(2)

まず ② の反比例のグラフの式を求める。

⟶ 点 B の条件 (x, y がともに負の整数) から、x, y の値の候補を決める。

点 A は、① $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあり、$x=2$ なので

$$y=\frac{1}{2}\times 2^2$$
$$=\frac{1}{2}\times 4$$
$$=2$$

よって、点 A の座標は、$(2, 2)$

また、点Aは②の反比例のグラフ上にある。

反比例のグラフの式を $y=\frac{a}{x}$ とおくと、

$$2=\frac{a}{2} \Rightarrow a=4$$

したがって②のグラフの式は、

$$y=\frac{4}{x}$$

点Bは $y=\frac{4}{x}$ のグラフ上にあり、x, y ともに負の整数。

$x=-1$ のとき、$y=-4$

$x=-2$ のとき、$y=-2$

$x=-3$ のとき $y=-\frac{4}{3}$ 整数でない

$x=-4$ のとき、$y=-1$

よって、(x, y) の候補は、

$$(-1,-4), (-2,-2), (-4,-1)$$

の3つである。これらを $y=ax^2$ に代入し、a が整数となるものを見つければ良い

㋐ $(-1, -4)$ のとき.

$-4 = a \times (-1)^2 \Rightarrow a = -4$ 整数

㋑ $(-2, -2)$ のとき

$-2 = a \times (-2)^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ 整数でない

㋒ $(-4, -1)$ のとき.

$-1 = a \times (-4)^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{16}$ 整数でない

よって. $a = -4$

2.

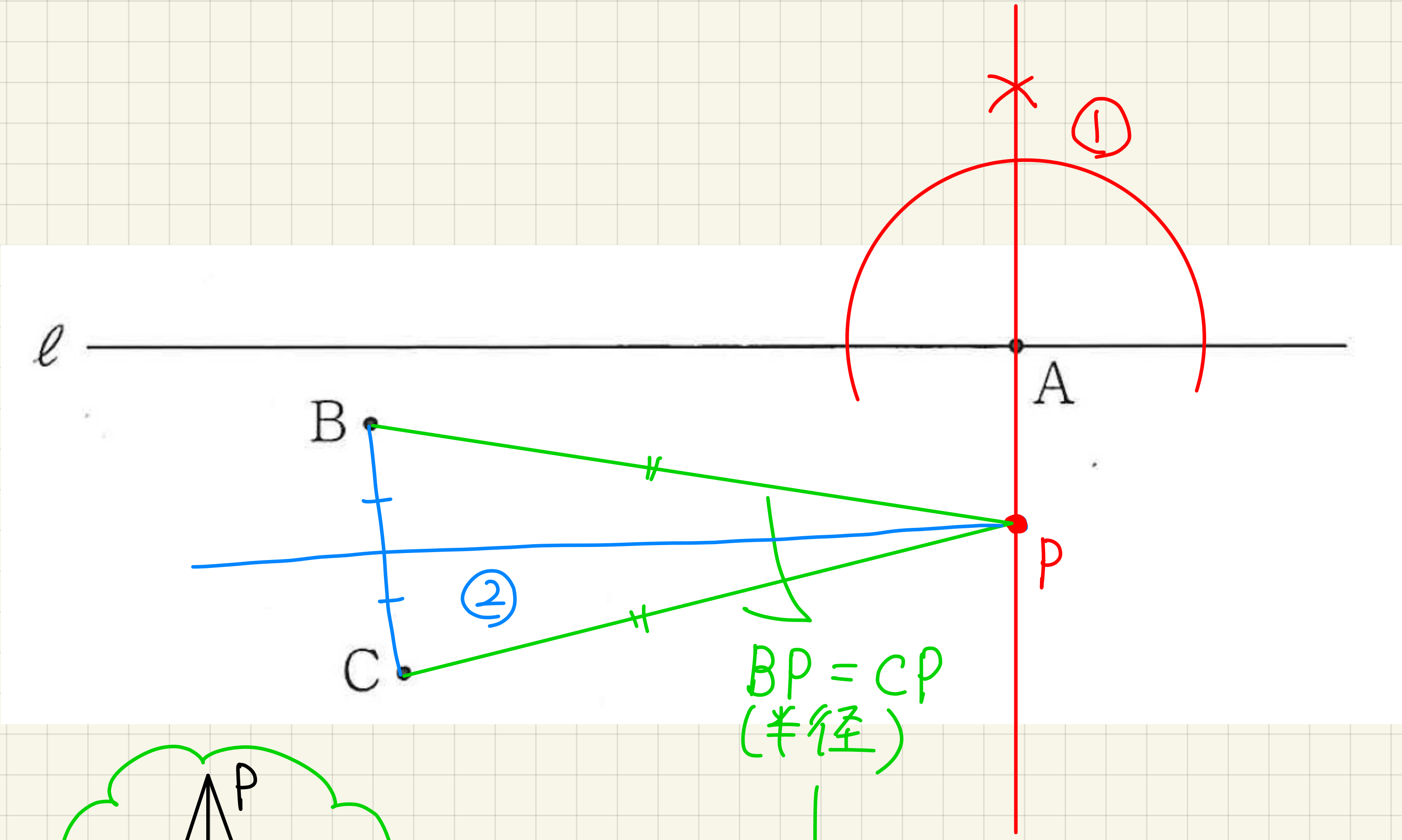
① 直線 AP と直線 ℓ は. 垂直である

⇒ 点 A を通る垂線を作図する.

② 点 B を, 点 P を中心として回転移動させると.
点 C と重なる.

⇒ 線分 BP と CP は. 点 P を中心とした円の半径.
また, この円周上に点 B と点 C があるので,
BC の垂直二等分線

① と ② の交点が点 P となる。



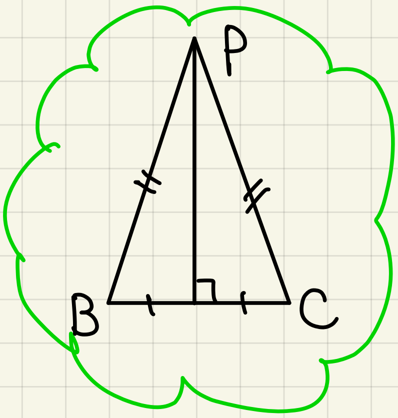
BP = CP
(半径)

↓

△PBC は二等辺三角形

↓

BC (底辺) の垂直二等分線
は、点 P を通る



3.

(1)

1次方程式で表す場合

A地区の面積を x km² とする。

A地区の面積の70%が森林

⇒ A地区の森林の面積は

$\frac{70}{100}x$

B地区の面積の90%が森林

⇒町の面積は630km²で、A地区の面積がx km²なので、B地区の面積は、

$$630 - x \quad km^2$$

よって、B地区の森林の面積は、

$$\frac{90}{100}(630 - x)$$

町全体の森林面積が519 km²なので、

$$\underbrace{\frac{70}{100}x}_{A地区の森林} + \underbrace{\frac{90}{100}(630 - x)}_{B地区の森林} = \underbrace{519}_{町の森林}$$

(答)

連立方程式で表す場合

A地区の面積をx km²、B地区の面積をy km²とする。

$$\begin{cases} \underbrace{x}_{Aの面積} + \underbrace{y}_{Bの面積} = \underbrace{630}_{町の面積} \\ \underbrace{\frac{70}{100}x}_{A森林の面積} + \underbrace{\frac{90}{100}y}_{B森林の面積} = \underbrace{519}_{町の森林の面積} \end{cases}$$

(答)

(2)

1次方程式で解く場合

$$\frac{70}{100}x + \frac{90}{100}(630 - x) = 519$$

両辺を10倍して

$$7x + 9(630 - x) = 5190$$

$$7x + 5670 - 9x = 5190$$

$$-2x = -480$$

$$x = 240$$

x は A地区の面積で、A地区の森林面積は A地区の面積の70%なので、

$$240 \times \frac{70}{100} = 168\ \mathrm{km}^2$$

連立方程式で解く場合

$$\begin{cases} x + y = 630 & \text{— ①} \\ \frac{70}{100}x + \frac{90}{100}y = 519 & \text{— ②} \end{cases}$$

① × 9, ② × 10 をすると、

$$\begin{cases} 9x + 9y = 5670 & \text{— ③} \\ 7x + 9y = 5190 & \text{— ④} \end{cases}$$

③－④より

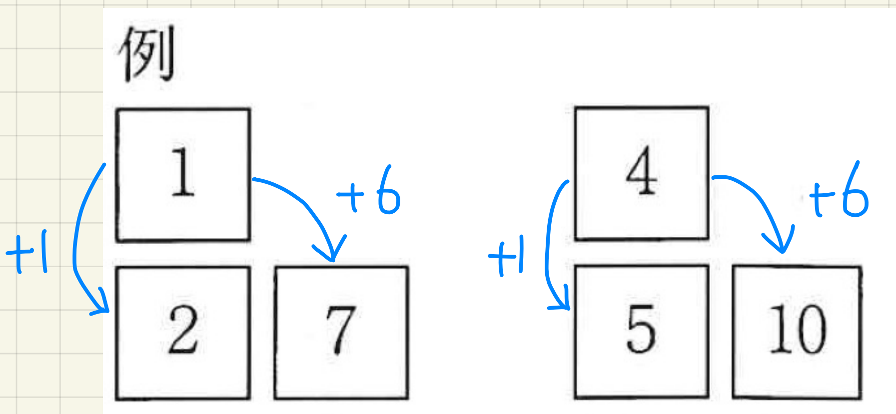
$$2x = 480$$

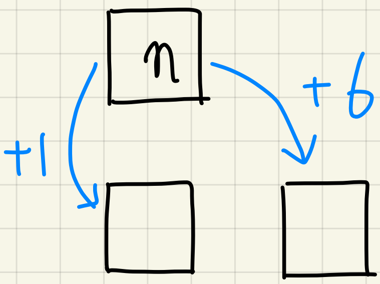
$$x = 240$$

xは、A地区の面積で、A地区の森林面積は、
A地区の面積の70%なので、

$$240 \times \frac{70}{100} = 168\ \mathrm{km}^2$$

4.





L字に並んだ3つの自然数のうち、もっとも
小さい自然数をnとする。L字型に並んだ
3つの自然数を、それぞれnを使って表すと、

n, $n+1$, $n+6$ と表される。

このとき、それらの和は、

$n + (n+1) + (n+6) = 3n+7$

$= 3(n+2)+1$

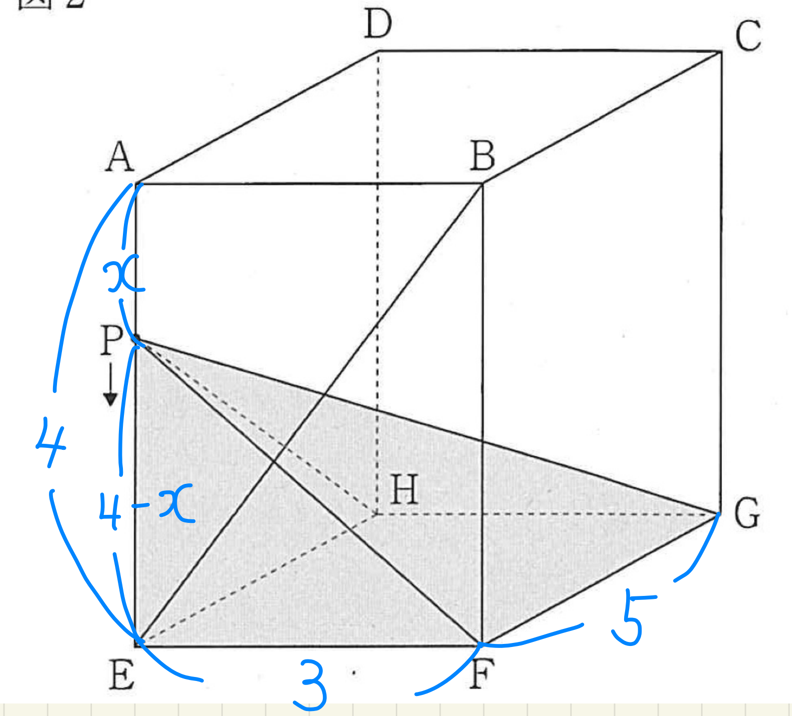
$n+2$は整数なので、$3(n+2)$は3の倍数。
よって、$3(n+2)+1$は、3の倍数に1を加えた数である。

したがって、L字に並んだ3つの自然数の和は、3の倍数に1を加えた数である。

$\boxed{3}$

1.(1) 点Pは、Aを出発し、毎秒1cmの速さで、辺AE上，線分EB上，辺BC上をCまで動く。
$x = 3$のとき、点Pは辺AE上にある。

図2



したがって、$x=3$のときの四角すいPEFGHの体積yは、

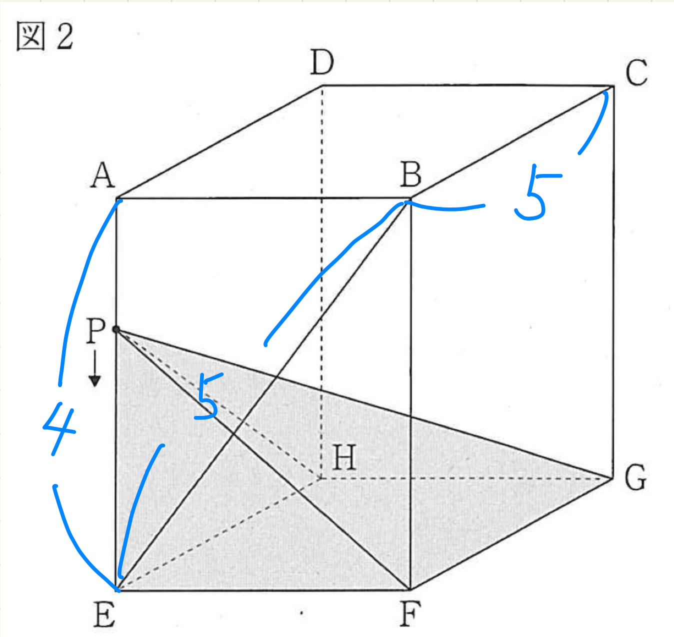
$$y = 3 \times 5 \times 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= 5$$

※四角すいPEFGHの高さは、$PE = 4 - x$。
$x = 3$なので、$PE = 1$

(2) EBの長さは、△BEFで三平方の定理より

$$EB = \sqrt{3^2+4^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$



したがって、点Pは、

$0 \leqq x \leqq 4 \rightarrow$ AE上

$4 \leqq x \leqq 9 \rightarrow$ EB上 (1)

$9 \leqq x \leqq 14 \rightarrow$ BC上 (1)

にある。

$0 \leqq x \leqq 4$ のとき

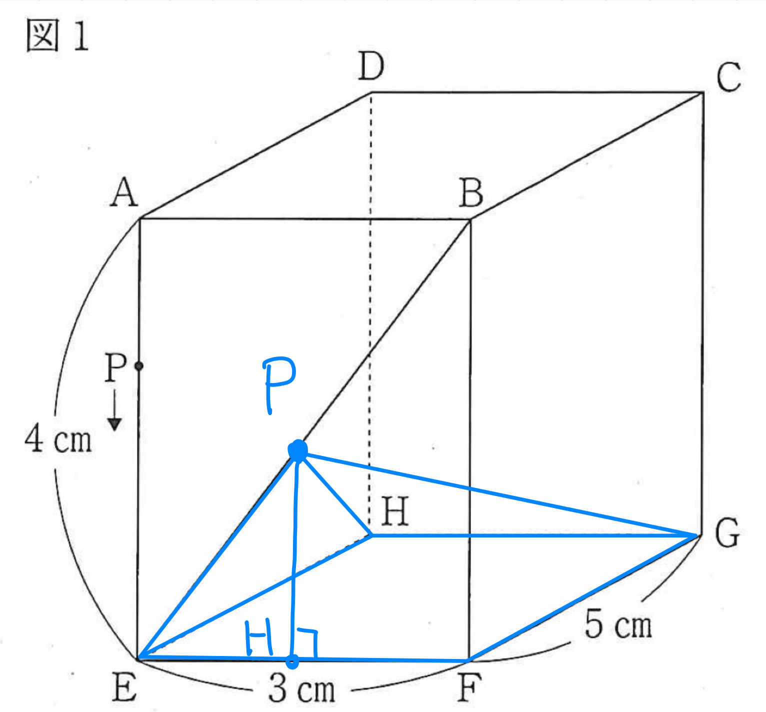
四角すいPEFGHの高さは $PE = 4 - x$.
したがって体積yは.

$$y = 3 \times 5 \times (4-x) \times \frac{1}{3}$$

$$= 5 \times (4-x)$$

$$= -5x + 20$$

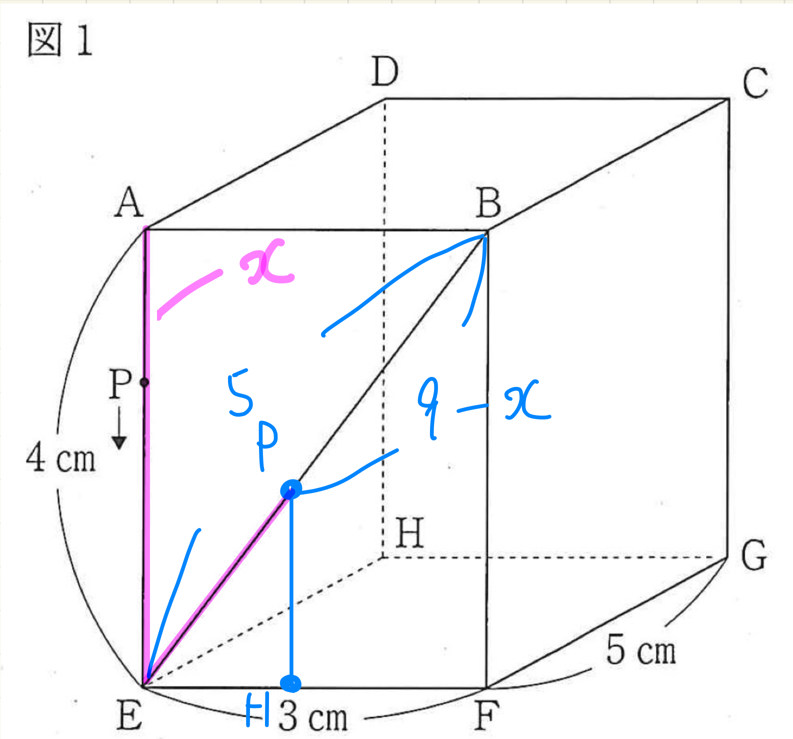
$4 \leqq x \leqq 9$ のとき.



点Pは、線分EB上にある。
点Pから辺EFに垂線を下ろし、交点をHとする。

このとき、四角すいPEFGHの高さはPHとなる。

PHの長さを求める.



$AEB = 9,\ AEP = x$
より

$BP = 9 - x$

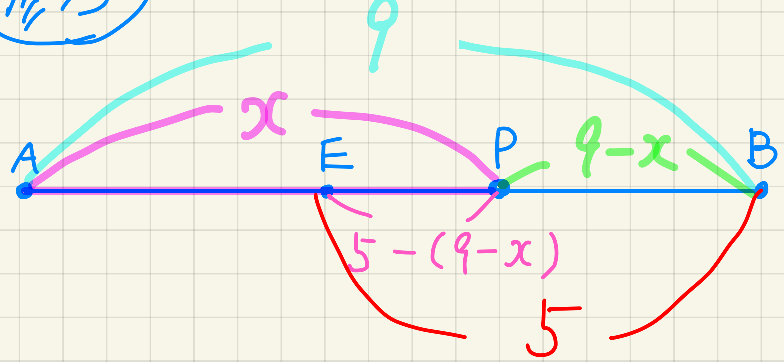
よって

$PE = BE - BP$

$= 5 - (9 - x)$

$= x - 4$

参考



ここで、△EPH と △EBF において、
PH // BF より、同位角が等しいので、

$\angle EPH = \angle EBF$ —— ①

$\angle EHP = \angle EFB$ —— ②

①、② より 2組の角がそれぞれ等しいので、
△EPH ∽ △EBF。対応する辺の比は等しいので、

$$\underset{x-4}{EP} : \underset{5}{EB} = PH : \underset{4}{BF}$$

よって

$$5PH = 4(x-4)$$

$$PH = \frac{4}{5}(x-4)$$ … 四角すい PEFGH の高さ

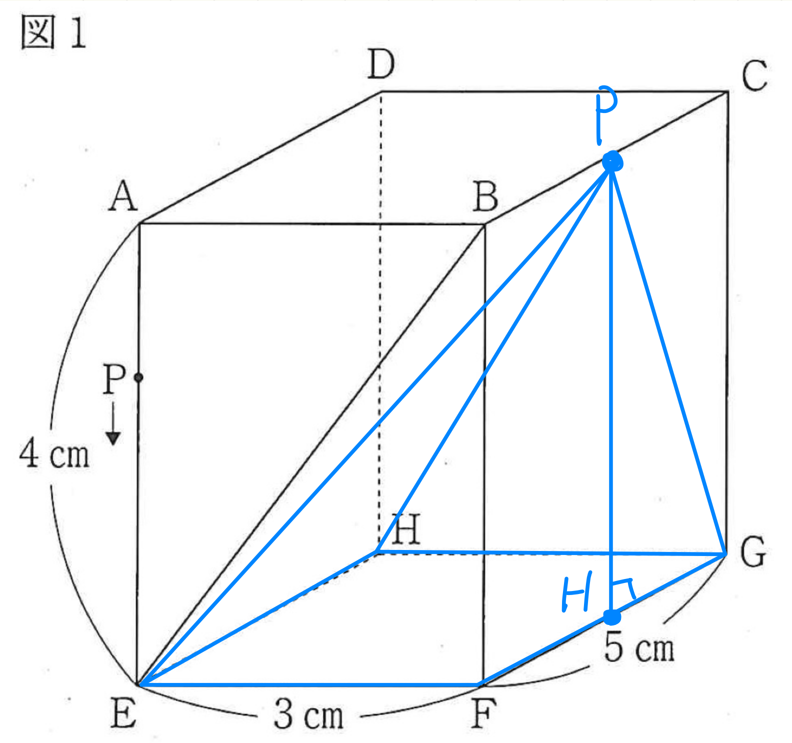
したがって、四角すい PEFGH の体積 y は、

$$y = 3 \times 5 \times \frac{4}{5}(x-4) \times \frac{1}{3}$$

$$= 4(x-4)$$

$$= 4x - 16$$ (ウ)

参考

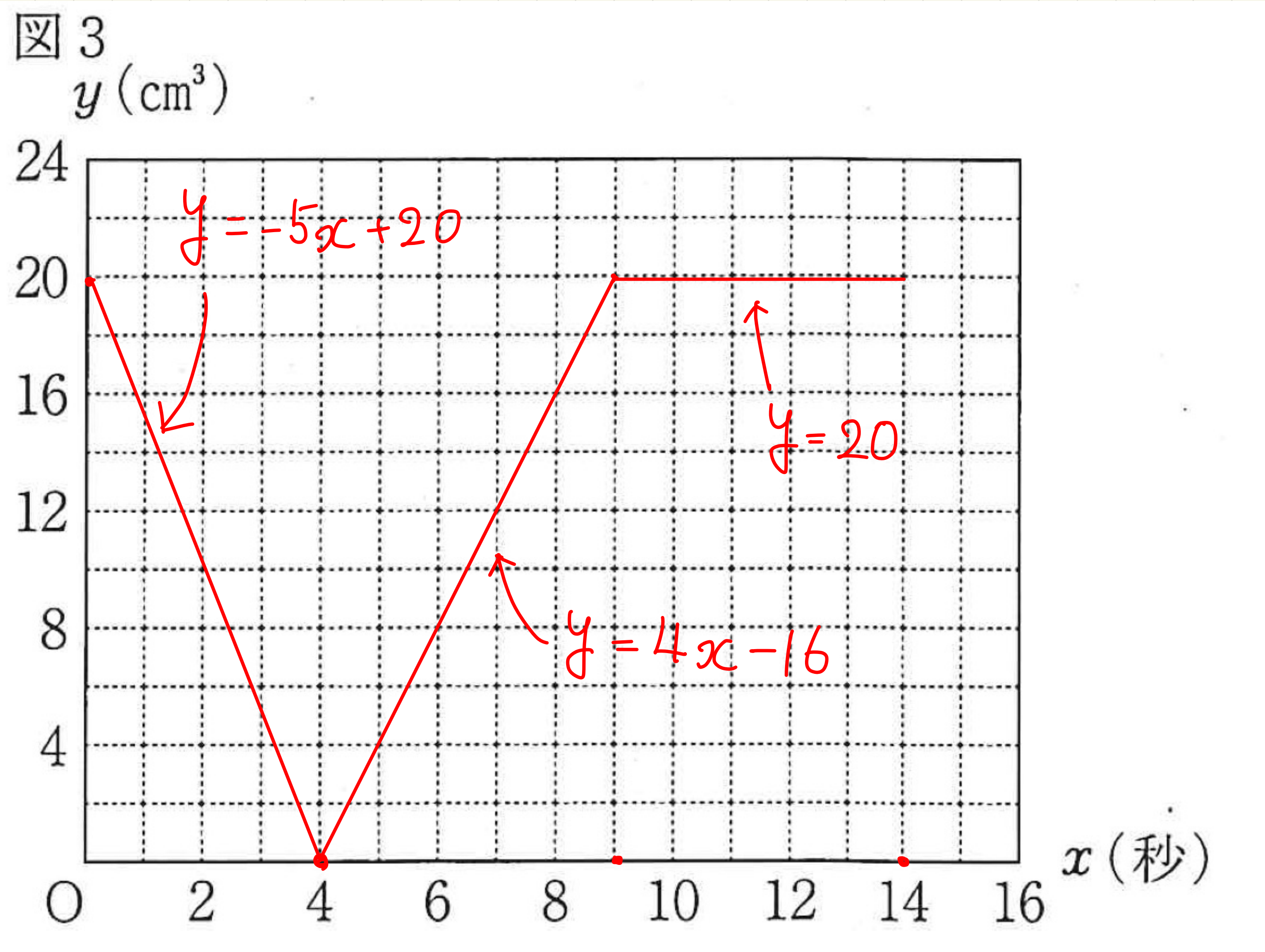


$9 \leqq x \leqq 14$ のとき，点Pは，辺BC上にある。

四角すいPEFGHの高さPHは，常に4cmなので，体積yは，

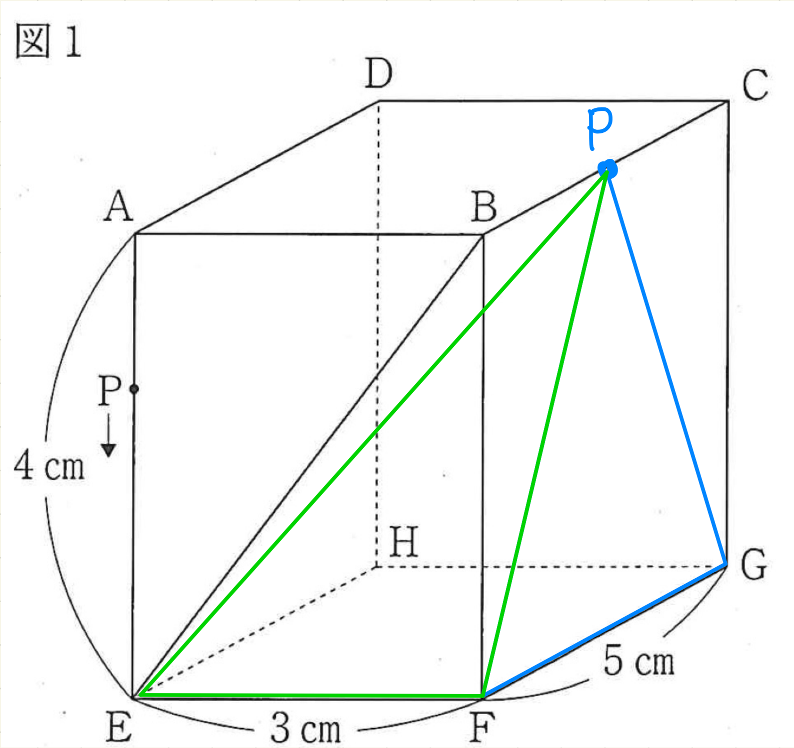
$y = 3 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{3}$

$= 20$



※ $x=4$ のとき，点Pは点Eにいる。このとき，四角すいPEFGHの高さは0なので，体積も0。

2.



BPの長さが分かれば、何秒後が分かる。

⇒ PFの長さが分かれば、三平方の定理よりBPの長さが分かる。

⇒ △PEFの面積を利用してPFの長さを求める。

△PFGの面積は、

$$\triangle PFG = 5 \times 4 \times \frac{1}{2}$$

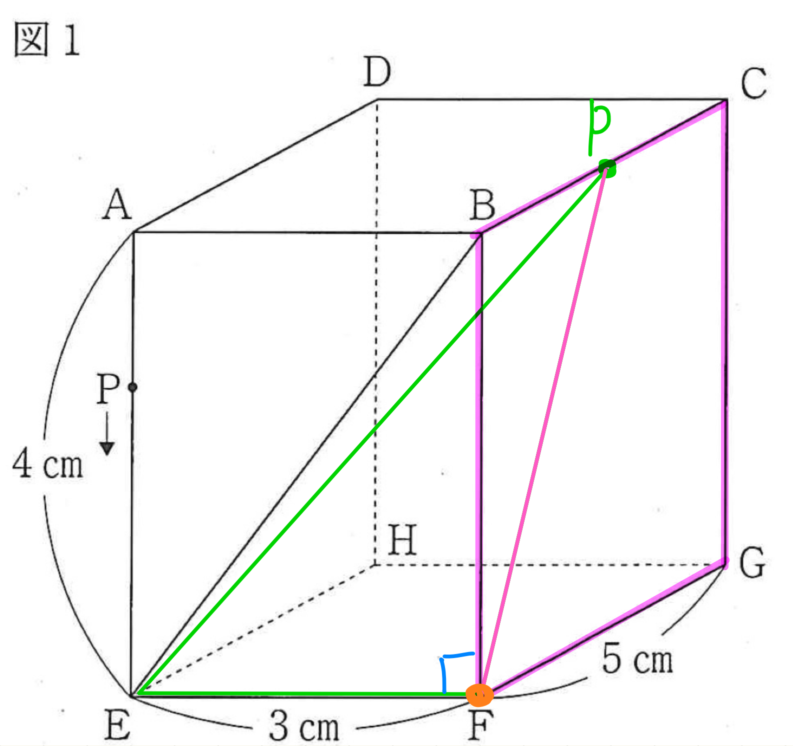
$$= 10$$

$\underbrace{\triangle PFG\text{の面積}}_{10}$: △PEFの面積 = 4 : 3 より

$$4 \times \triangle PEF = 30$$

$$\therefore \triangle PEF = \frac{30}{4}$$

$$= \frac{15}{2}$$



ここで、辺EFと面BFGCは垂直であり、

PFは、面BFGC上の線分であり

PFとEFは、点Fで交わるので、

EF⊥PF

よって△PEFは底辺をEFとすると、高さはPFとなる。

$$\underbrace{\triangle PEF}_{\frac{15}{2}} = \underbrace{EF}_{3} \times PF \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{2} = 3 \times PF \times \frac{1}{2}$$

両辺を2倍して

$15 = 3PF$, $PF = 5$

$$\therefore PF = 5$$

△PBFで三平方の定理より

$$BP = \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$\sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$

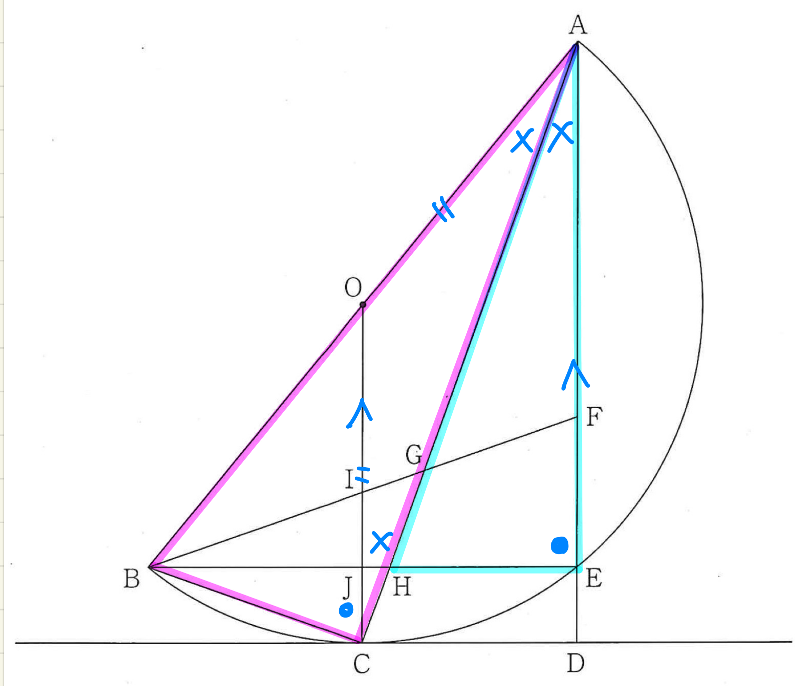
$$= 3$$

点Pは、点Bに着くまで9秒かかっているので、

$$9 + 3 = 12秒$$

4

1.



△ABCと△AHEにおいて、
線分ABは円Oの直径なので、半円の弧に対する円周角は等しいので

$\angle ACB = \angle AEH = 90°$ ――①

OC // ADで、錯角は等しいので

$\angle HAE = \angle OCA$ ――②

△OCAはOC=OA（半径）の二等辺三角形なので、

$\angle BAC = \angle OCA$ ――③

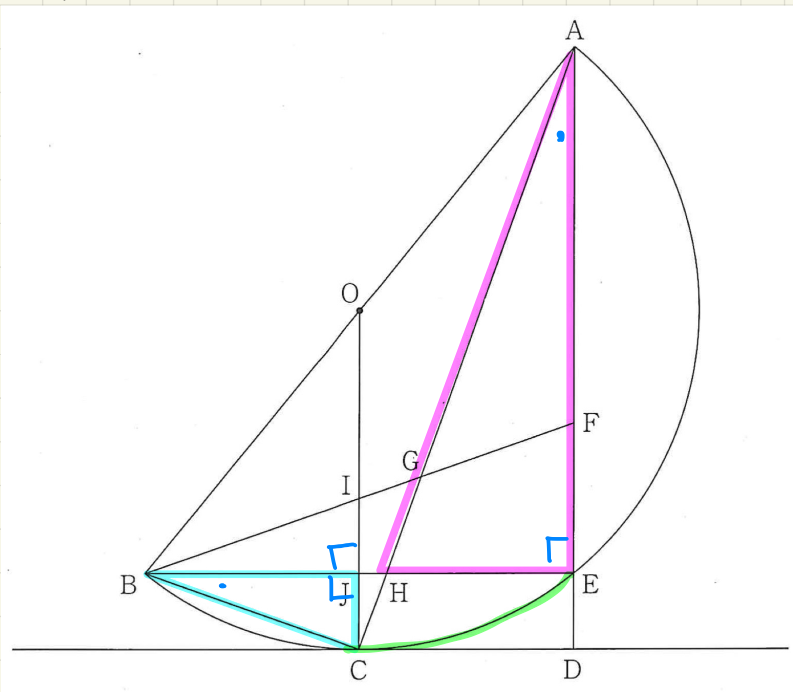
②,③より

$\angle HAE = \angle BAC$ ――④

①,④より2組の角がそれぞれ等しいので、
$\triangle ABC \backsim \triangle AHE$（証明終わり）

2

(1)



方針

CDの長さを求める

⇒ JEの長さと等しい

△JCEは直角三角形で、JCとCEの長さが分かれば、三平方の定理よりJEが求められる。

⇒ BC (=3) を活用して CEを求める。

⇒ △ABC ∽ △AHE ∽ △BCJ を活用してJCを求める。

(解答)

△AHEと△BCJにおいて

$\overset{\frown}{CE}$に対する円周角は等しいので

$\angle EAH = \angle CBJ$ —— ①

$OC /\!/ AD$より、同位角は等しいので、

$\angle AEH = \angle OJB = 90°$ —— ②

また、

$\angle BJC = 180° - \angle OJB$

$= 180° - 90°$

$= 90°$ —— ③

②, ③ より

$\angle AEH = \angle BJC = 90^\circ$ ―― ④

①, ④ より 2組の角がそれぞれ等しいので.

$\triangle AHE \backsim \triangle BCJ$

(1) より $\triangle ABC \backsim \triangle AHE$ なので.

$\triangle ABC \backsim \triangle AHE \backsim \triangle BCJ$

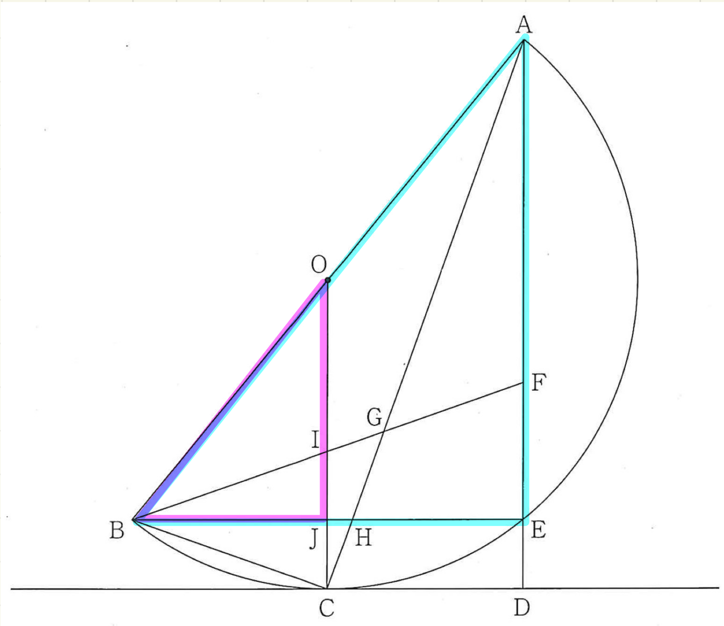
$\Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle BCJ$

対応する辺の比は等しいので.

$\underbrace{AB}_{9} : \underbrace{BC}_{3} = \underbrace{BC}_{3} : CJ$

$\Rightarrow 9CJ = 9$

$\therefore CJ = 1$



また, $\triangle OBJ$ と $\triangle ABE$ で. $OC /\!/ AD$ より. 同位角が等しいので,

$\angle BOJ = \angle BAE$ ― ①

$\angle BJO = \angle BED$ ― ②

①, ② より 2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OBJ \backsim \triangle ABE$

ここで，ABは直径で 9 cm なので，

$$OB = OA = 4.5\ \mathrm{cm}\ (半径)$$

よって．

$$BO : BA = 4.5 : 9$$
$$= 1 : 2$$

$\triangle OBJ \backsim \triangle ABE$ で．対応する辺の比は等しいので，

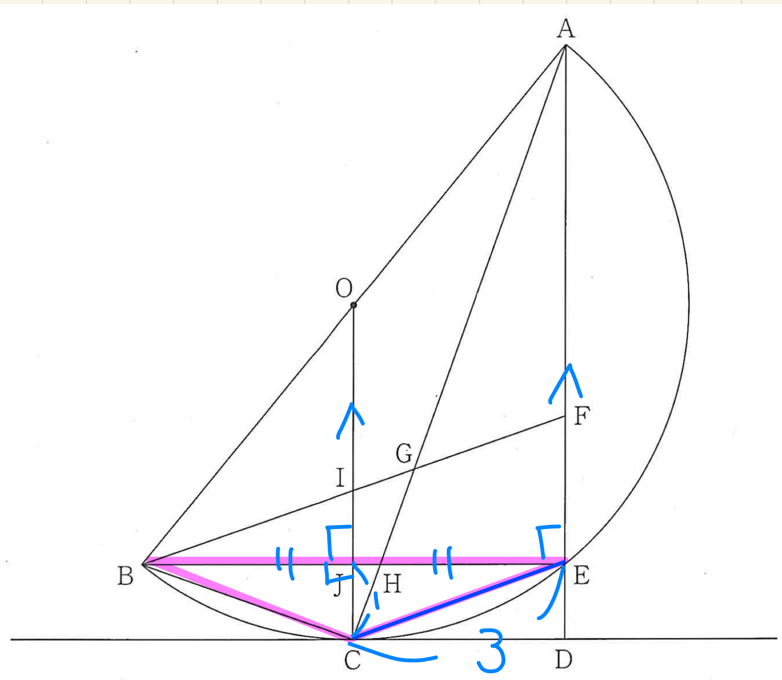
$$BJ : BE = 1 : 2$$

$$\Rightarrow BJ : JE = 1 : 1$$

$\underbrace{BJ}_{①} + JE = ②$ ○は比を表す．

$\Rightarrow JE = ①$

よって．点Jは．線分BEの中点である．



よって△CBEは．線分BCを底辺とすると．底辺の垂直二等分線が点Cを通るので，二等辺三角形となる。

CB = CE で，CB = 3 より．CE = 3

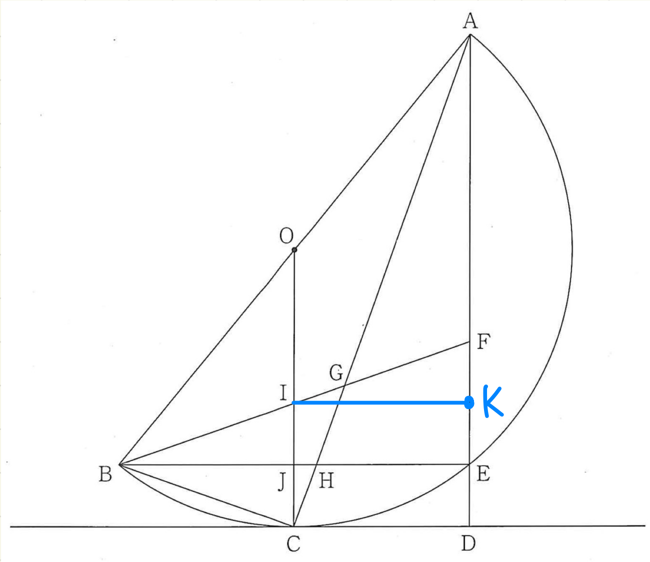
よって△JCEで三平方の定理より

$$JE = \sqrt{3^2 - 1^2}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

$\sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

JE = CD より．CD = $2\sqrt{2}$ cm

(2) 難問



方針

GIの長さを求める

⇒IF(①)とIG：GF(②)が分かれば、CEの長さを求められる。

⇒①IFの長さは、IK(③)とFK(④)の長さが分かれば、三平方の定理より求められる。

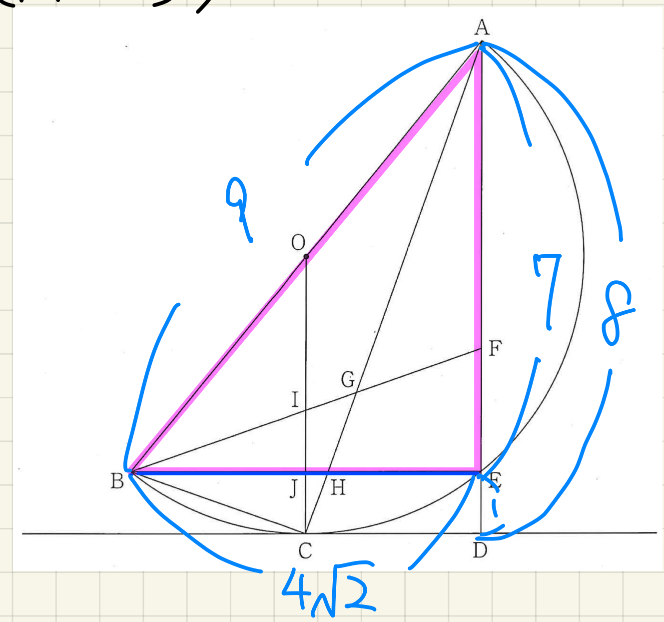
⇒③ $IK = CD = 2\sqrt{2}$

⇒④FKは、FEとIJの長さより求める

⇒$\triangle BIJ \backsim \triangle BFE$の相似比を利用

⇒②IG：GFは$\triangle IGC \backsim \triangle FGA$の相似比で求める。

(解答)



$BJ = JE = 2\sqrt{2}$ より

$BE = 4\sqrt{2}$

$\triangle ABE$で三平方の定理より

$AE = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{2})^2}$

$\sqrt{81-32}$

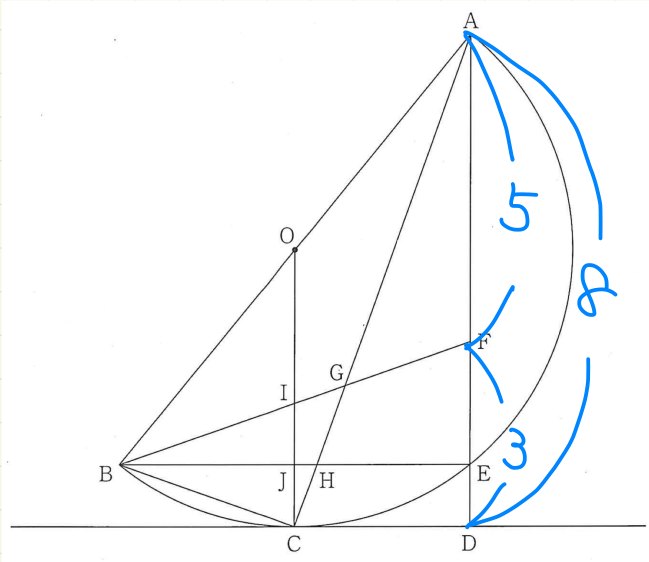
$= \sqrt{49}$

$= 7$

CJ = ED = 1 より

$AD = AE + ED$

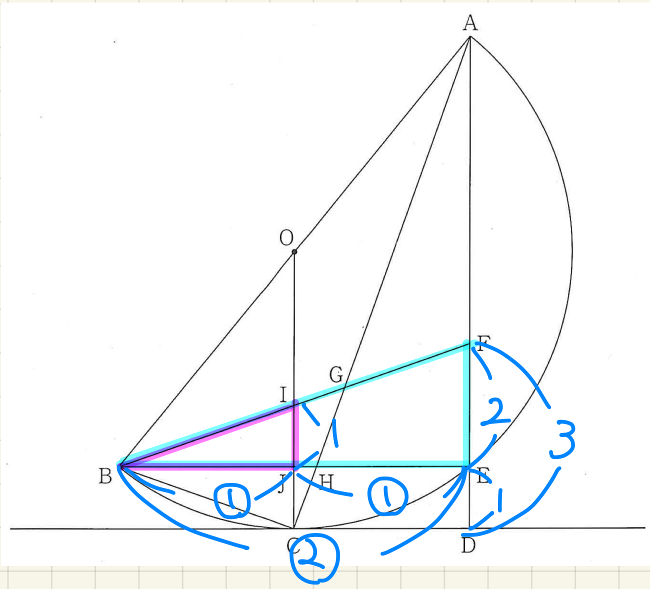
$= 7 + 1 = 8$



AF : FD = 5 : 3 より

$AF = \dfrac{5}{8} \times AD = 5$

$FD = \dfrac{3}{8} \times AD = 3$



△BIJ と △BFE において、
OC // AD で、同位角は等しいので、

$\angle BIJ = \angle BFE$ ― ③

$\angle BJI = \angle BEF$ ― ④

③、④より 2組の角がそれぞれ等しいので、△BIJ ∽ △BFE

点Jは BE の中点なので、△BIJ と △BFE の相似比は 1 : 2

FD = 3、ED = 1 より

$FE = FD - ED$

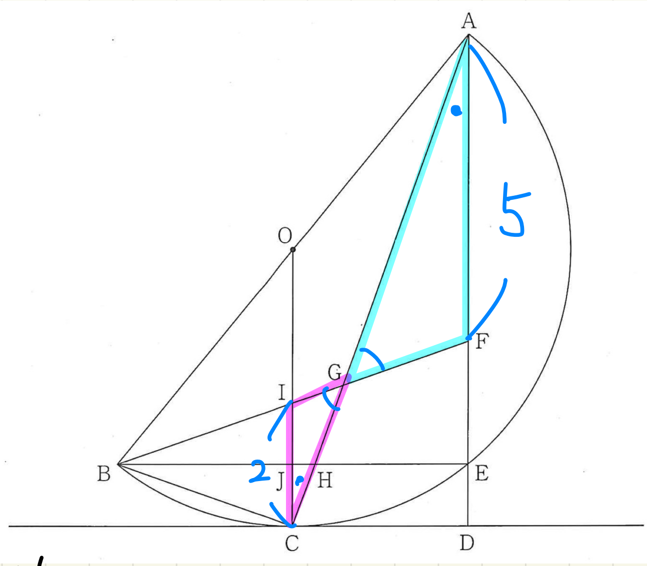
$= 3 - 1$

$= 2$

よって、

$IJ : \underbrace{FE}_{2} = 1 : 2$

$\Rightarrow IJ = 1\,\text{cm}$, $IC = IJ + JC = 1 + 1 = 2\,\text{cm}$



△IGCと△FGAにおいて,
対頂角は等しいので,

$\angle IGC = \angle FGA$ —①

OC//ADで,錯角は等しいので

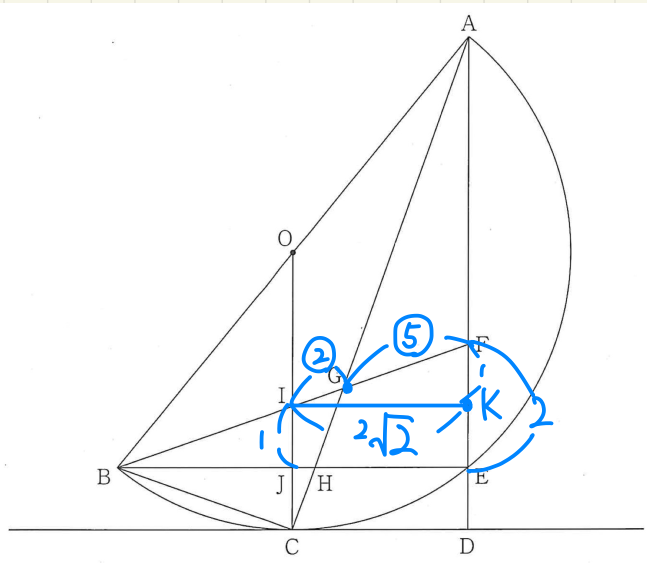
$\angle ICG = \angle FAG$ —②

①,②より,2組の角がそれぞれ等しいので,△IGC ∽ △FGA

IC = 2cm, FA = 5cm より,相似比は 2:5

対応する辺の比は等しいので

$IG : GF = 2 : 5$



FK = FE − KE で,FK = 2,

IJ = KE = 1 より

$FE = 2 - 1 = 1$ cm

よってIFは△IKFで三平方の定理より

$$IF = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2}$$
$$= 3$$

$\sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

IG : GF = 2 : 5 より

$$IG = \frac{2}{7} \times 3$$
$$= \frac{6}{7} \text{ cm}$$