2022年度　千葉県
数学

KmKm

1.

(1)

① 与式 $= -6 + 2$

$= -4$

② 与式 $= 4a - 9b - a + 3b$

$= 3a - 6b$

③ 与式 $= (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times (-1) + (-1)^2$

$= 12 - 4\sqrt{3} + 1$

$= 13 - 4\sqrt{3}$

(2)

① 縦の長さが横の長さの2倍より3cm長い。
横の長さをx cmとすると.

縦の長さ $= x \times 2 + 3$

$= 2x + 3$

よって長方形の面積は

$x \times (2x + 3) = x(2x + 3)$

② ①より

$x(2x + 3) = 7$

展開して整理すると、

$2x^2 + 3x - 7 = 0$

$2x^2 + 3x - 7$ は因数分解できないので、解の公式を用いると

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-7)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}$$

参考

$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ の解の公式は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ここで、$8^2 < (\sqrt{65})^2 < 9^2$ より

$8 < \sqrt{65} < 9$

なので、$\sqrt{65} = 8.\cdots\cdots$ よって、

$\underbrace{-3 - \sqrt{65}}_{分子} = -3 - 8.\cdots\cdots$

$= -11.\cdots\cdots < 0$

$\underbrace{-3 + \sqrt{65}}_{分子} = -3 + 8.\cdots\cdots$

$= 5.\cdots\cdots > 0$

横の長さは正なので、求める横の長さは、

$$x = \frac{-3 + \sqrt{65}}{4} \text{ cm}$$

(3)

① 中央値：データを小さい順に並べたときの中央の値。

データを小さい順に並べると、

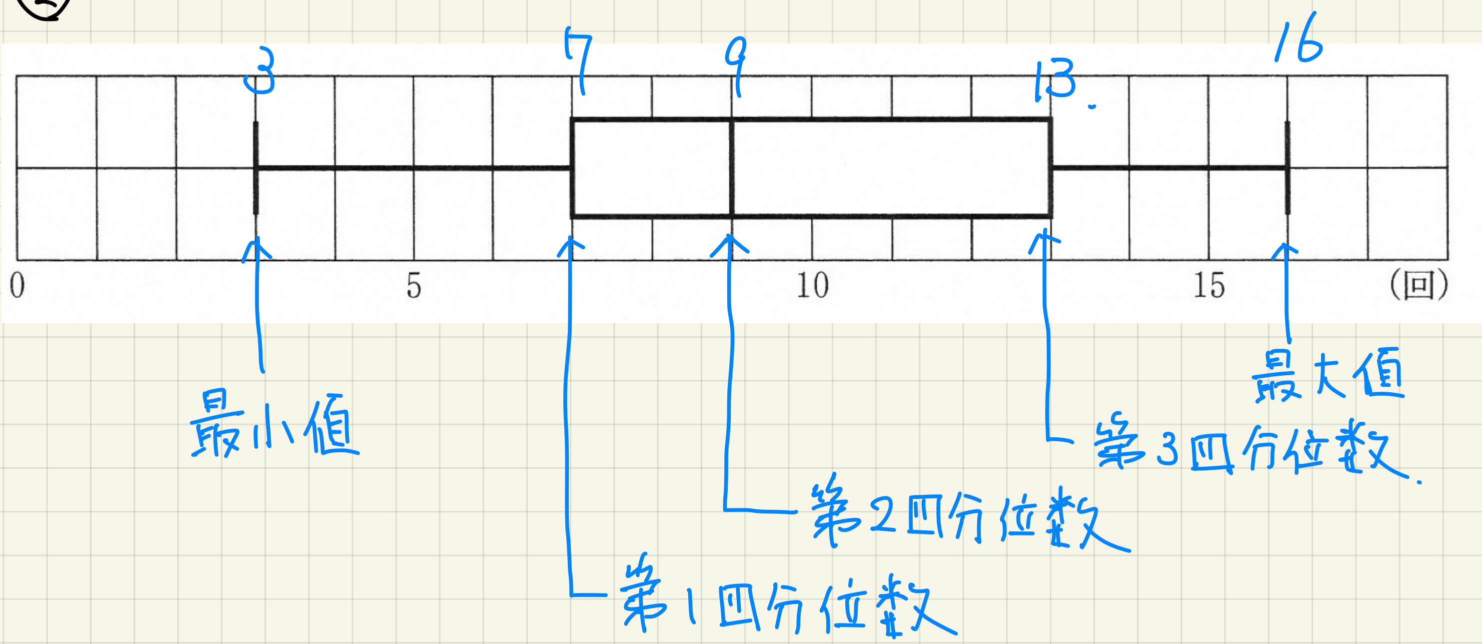
3, 7, 7, 9, 11, 12, 14, 16

中央

データの数は、偶数個なので、

$$中央値 = \frac{9 + 11}{2} = \frac{20}{2} = 10 回$$

②



9回目の練習をしたとき, 第2四分位数が10回 → 9回に変化している。
=中央値

データの数は9個なので, 中央値は5番目の数となる。

前半の4個のデータは, 3, 6, 7, 7 なので, $a > 9$ では, 中央値が9を超える。

$$\left.\begin{array}{l}\text{よって } a \text{ は9以下である。}\\ \text{また, 最小値が3なので, } a \text{ は3以上}\end{array}\right\} 3 \leqq a \leqq 9$$

箱ひげ図より, 第1四分位数は7回。

・ $3 \leqq a \leqq 6$ のとき.

中央値

$$3,\ \underset{\uparrow\ 3,4,5,6\text{のいずれか}}{\bigcirc},\ 7,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ 16$$

第1四分位数は $\dfrac{\bigcirc + 7}{2}$ で, ○に 3, 4, 5, 6 のいずれを入れても7回にならないので, 不一致.

・$a=7$ のとき.

$3,\ \underbrace{7,\ 7}, 7,\ 9,\ 11, 12, 14, 16$　中央値

第1四分位数は7なので, 適する.

・$a=8$ のとき

$3,\ \underbrace{7,\ 7}, 8,\ 9,\ 11, 12, 14, 16$　中央値

第1四分位数は7なので, 適する.

・$a=9$ のとき

$3,\ \underbrace{7,\ 7}, 9,\ 9,\ 11, 12, 14, 16$　中央値

第1四分位数は7なので, 適する.

よって, $a=7, 8, 9$

参考

$a \geqq 10$ のとき.

$3,\ 7,\ 7,\ 9,\ \bigcirc,\ 11,\ 12,\ 14,\ 16$

中央値が9より大きくなる

⇒箱ひげ図と不一致

(4)

① 素数：約数が1とその数自身のみの数
ただし，1を除く

20以下の素数は．
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$
なので 8個

② a, b はさいころの出る目なので，最大値は6.
よって，$2a+b$ の最大値は
$$2a+b = 2\times\underbrace{6+6}_{\text{最大値}} = 12+6 = 18$$

18以下の素数は．$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$．
一方．a, b の最小値は1なので，$2a+b$ の最小値は．
$$2a+b = 2\times\underbrace{1+1}_{\text{最小値}} = 3$$

よって．$2a+b$ がとりうる範囲は．$3, 5, 7, 11, 13, 17$

㋐ $2a+b=3$ のとき
$a=1, b=1$ の1通り

㋑ $2a+b=5$ のとき．
$a=1, b=3$　，$a=2, b=1$ の2通り

㋒ $2a+b=7$ のとき．

$a=1, b=5$, $a=2, b=3$, $a=3, b=1$
の 3通り

㊄ $2a+b=11$ のとき.
$a=3, b=5$, $a=4, b=3$, $a=5, b=1$
の 3通り

㊅ $2a+b=13$ のとき.
$a=4, b=5$, $a=5, b=3$, $a=6, b=1$
の 3通り

㊋ $2a+b=17$ のとき.
$a=6, b=5$ の 1通り

よって, $2a+b$ が素数となるのは.
$1+2+3+3+3+1=13$通り

さいころの目の出方は.全部で $6\times6=36$ 通りなので
求める確率は

$$\frac{13}{36}$$

(5)
$$\begin{cases} -ax+3y=2 \\ 2bx+ay=1 \end{cases}$$
に $x=1, y=-1$ を代入すると.

$$\begin{cases} -a-3=2 & —① \\ 2b-a=-1 & —② \end{cases}$$

①より

$$-a=3+2$$

$$a=-5$$

$a=5$ を②に代入して.

$$2b+5=-1$$

$$2b=-6$$

$$b=-3$$

(6)

① $V=\frac{1}{3}Sh$

$$h=\frac{3V}{S}$$

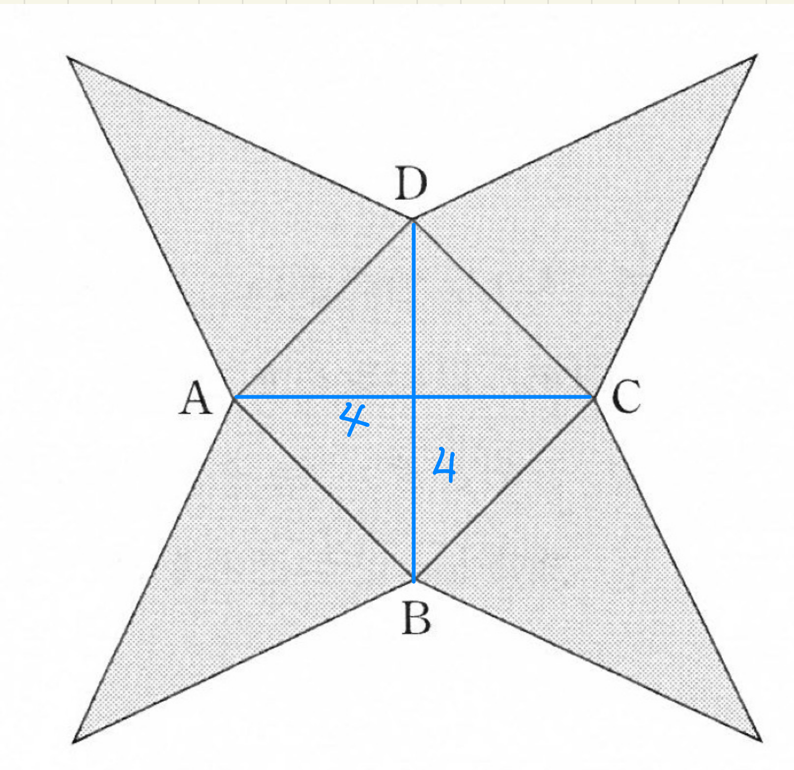
① 両辺×3で

$3V=Sh$

② 両辺÷Sで

$\frac{3V}{S}=h$

②



正方形ABCDの面積 = 対角線×対角線÷2

$= 4 \times 4 \div 2$

$= 8$ cm^2

①より $h = \dfrac{3V}{S}$ なので、

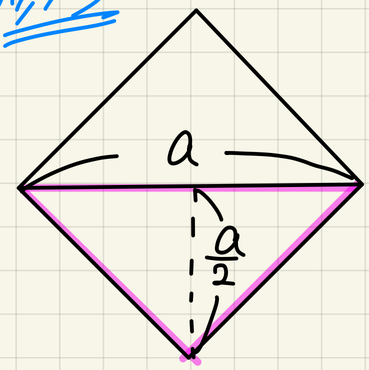
$h = 3 \times V \times \dfrac{1}{S}$

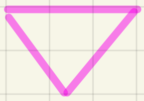
$= 3 \times \dfrac{32}{3} \times \dfrac{1}{8}$

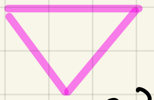
$= 4$ cm

正方形は、ひし形の一種。
ひし形の面積は、
対角線×対角線÷2
なので、正方形の面積も、
同様に求めることができる。

参考



 $= a \times \dfrac{a}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{4}$

正方形は  が2つあるので

$\dfrac{a^2}{4} \times 2 = \dfrac{a^2}{2}$

aは対角線の長さなので、

正方形の面積 = 対角線×対角線÷2

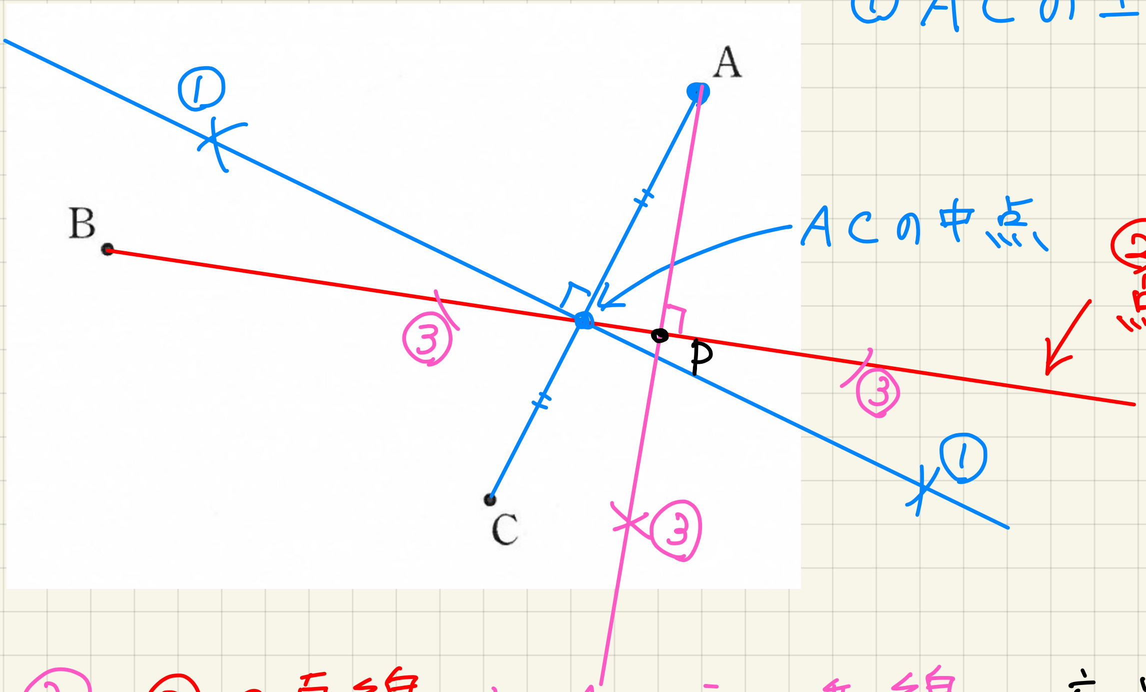
(7)

条件

・点Pは，線分ACの中点と点Bを結ぶ直線上の点である。①

・直線APと直線BPは垂直に交わる。

①ACの垂直二等分線.

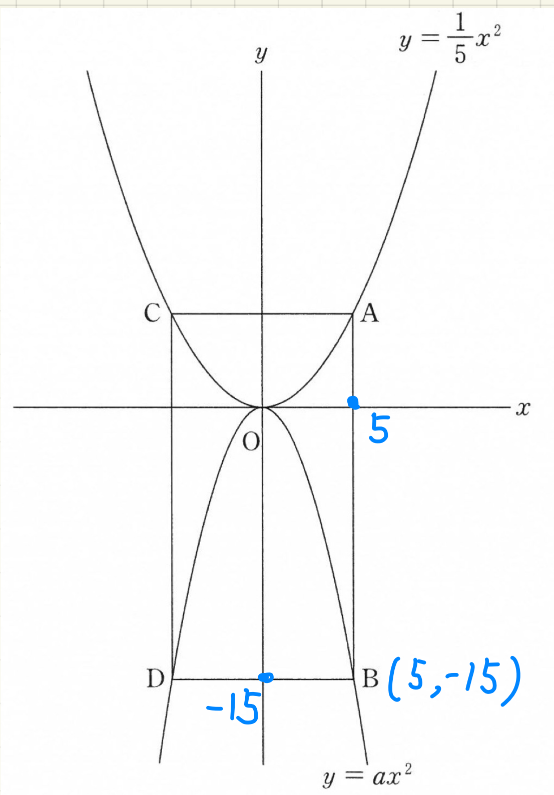


②点Pはこの直線上にある.

③ ②の直線とAからの垂線の交点が点P.

2.

(1)



点B(5, -15)は $y=ax^2$ のグラフ上にあるので，$x=5$，$y=-15$ を代入すると

$$-15 = a \times 5^2$$

$$-15 = 25a$$

$$a = -\frac{15}{25}$$

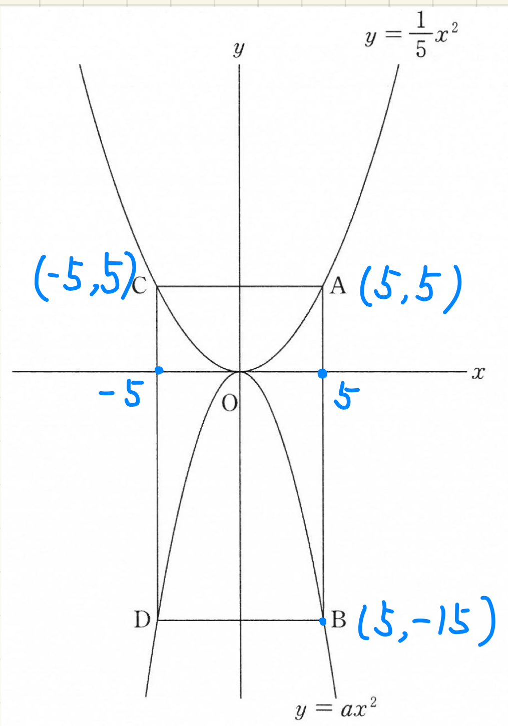
$$= -\frac{3}{5}$$

(2) まず点Cの座標を求める。
⇒点Aとy座標が同じ
⇒点Aは $y=\frac{1}{5}x^2$ のグラフ上にあり $x=5$ なのでy座標が求まる.

点Aは. $y=\frac{1}{5}x^2$ のグラフ上にあり. $x=5$ なので.

$$y=\frac{1}{5}\times5^2$$
$$=5$$

点Aと点Cのy座標は等しいので, 点Cのy座標も5。



また, 点Aと点Cはy軸について対称なので, 点Cのx座標は -5

よって点Cの座標は $(-5, 5)$

BCを通る直線の式を $y=ax+b$ とする. 点B, 点Cの座標を代入して,

$$\begin{cases} -15=5a+b & \text{—— ①} \\ 5=-5a+b & \text{—— ②} \end{cases}$$

①−② より

$-20 = 10a \Rightarrow a = -2$

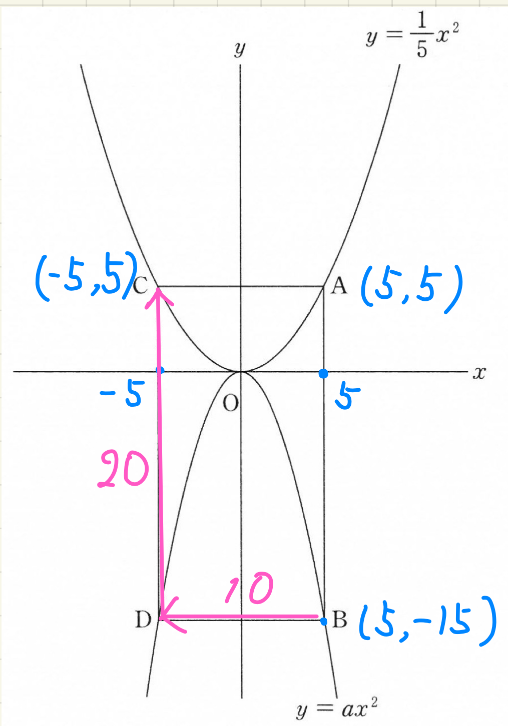
$a=-2$ を ② に代入して

$5 = -5 \times (-2) + b$

$5 = 10 + b \Rightarrow b = -5$

よって求める直線の式は $y = -2x - 5$

(別解)



左の図より変化の割合は

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{20}{-10} = -2$$

B→Cに左側にいっているので"−"

1次関数では、傾きと変化の割合は等しいので、$a = -2$

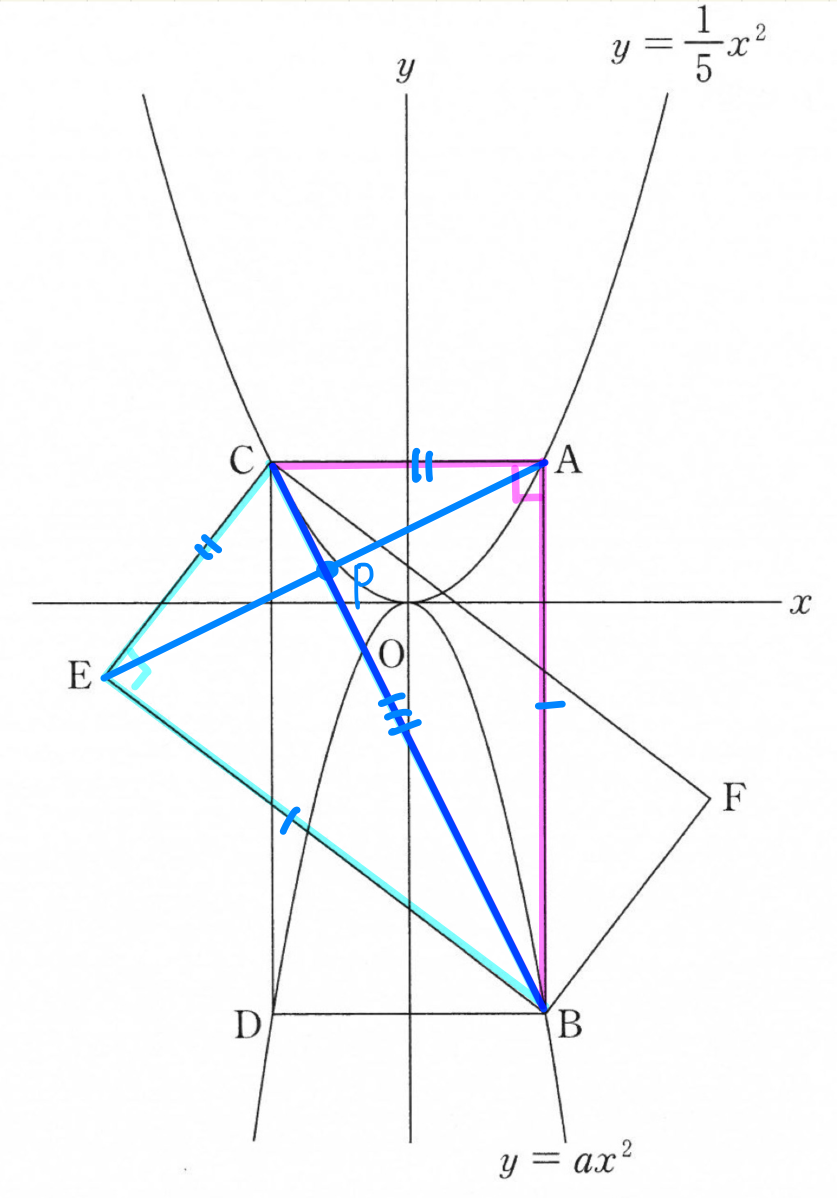
求める直線は $y = -2x + b$ で、点B(5, −15)を通るので

$-15 = -2 \times 5 + b$

$-15 = -10 + b \Rightarrow b = -5$

よって、求める直線の式は $y = -2x - 5$

(3) 難問



AEとCBの交点をPとする。

△ABCと△EBCにおいて、

□ABCD ≡ □CEBFより

AC = EC ― ①

AB = EB ― ②

共通な辺は等しいので、

CB = CB ― ③

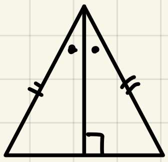
①, ②, ③より3組の辺がそれぞれ等しいので、

△ABC ≡ △EBC

対応する角は等しいので、

∠ACB = ∠ECB ― ④

①より△CEAは二等辺三角形で、④よりCBは、∠ECAを二等分するので、



∠CPE = ∠CPA = 90°

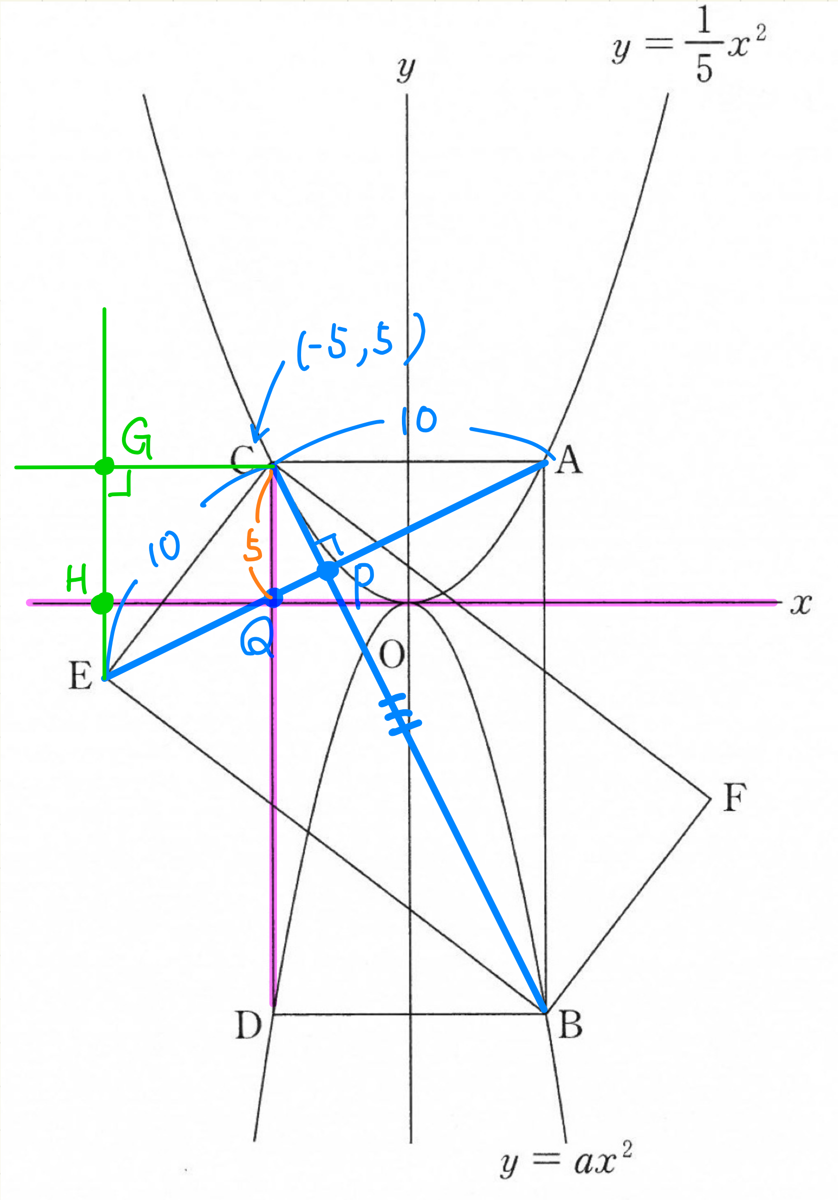
したがって、直線BCと直線EAは垂直となる。

⇒ 直線BCの傾き × 直線EAの傾き = −1

(2)より直線BCの傾きは −2 なので、

−2 × 直線EAの傾き = −1

直線EAの傾き = $\frac{1}{2}$



次に，直線CDとx軸との交点をQとする。

CA=10，CQ=5より
QAの傾きは

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

これは．EAの傾きと一致するので，点QはEA上にある。

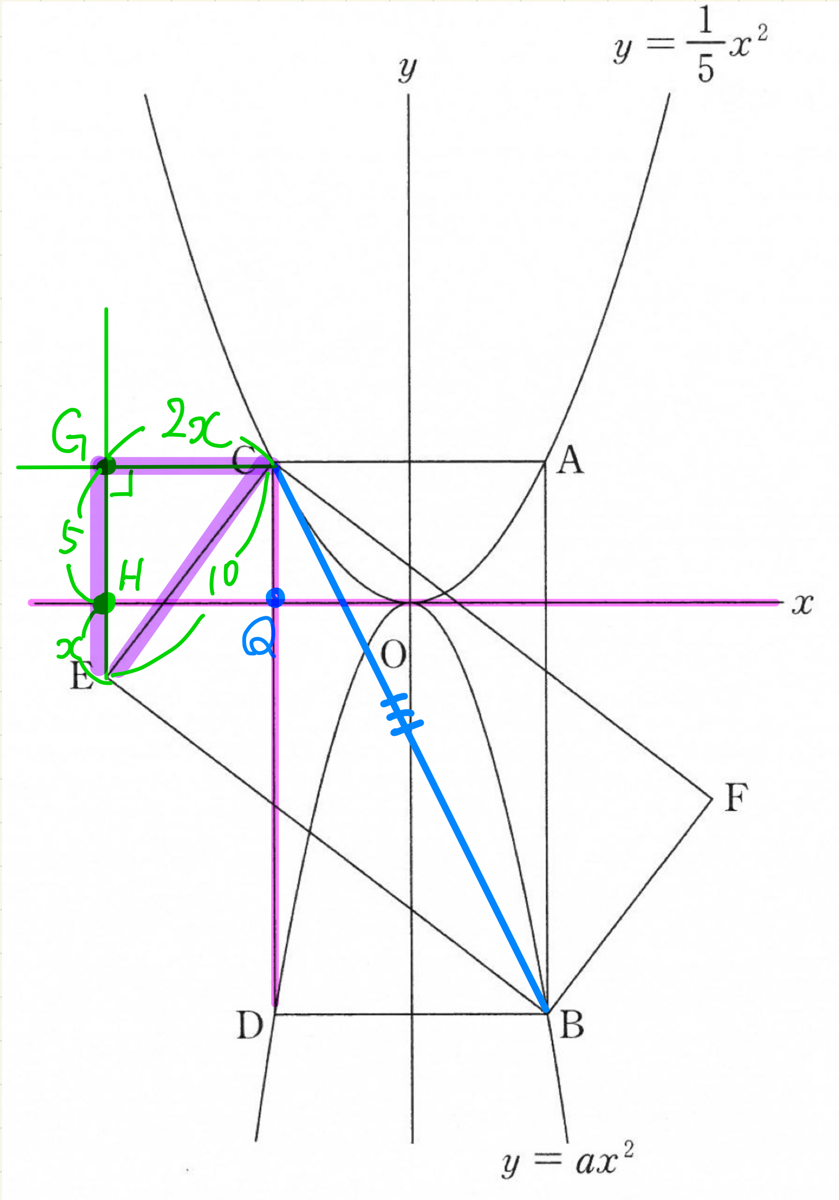
図のように，ACの延長線と点Eを通り垂直な交点をG，GEとx軸との交点をHとする。また，HEの長さをxとするとEQの傾きは$\frac{1}{2}$なので．

yの増加量

$$\frac{HE}{HQ}=\frac{1}{2}\quad\text{より}\quad\frac{x}{HQ}=\frac{1}{2}\Rightarrow HQ=2x.$$

xの増加量

GC = HQ より．CG = $2x$



△GECで三平方の定理より

$$10^2 = (2x)^2 + (x+5)^2$$

式を整理すると

$$4x^2 + x^2 + 10x + 25 = 100$$

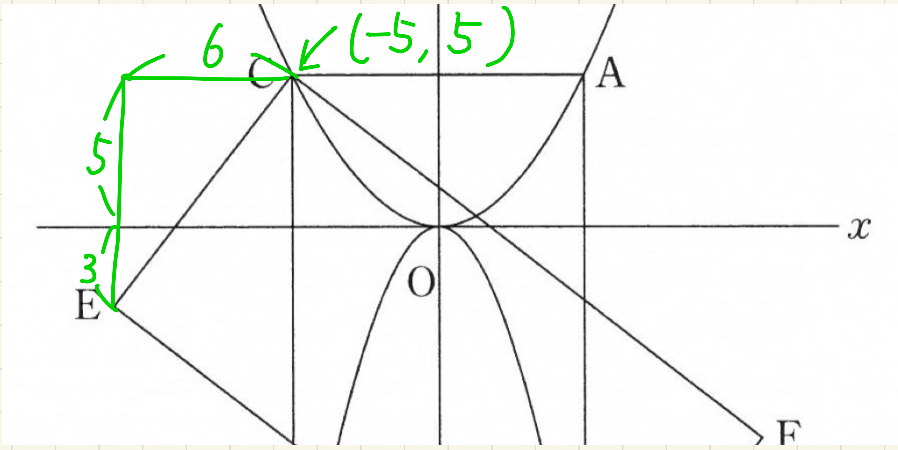
$$5x^2 + 10x - 75 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x-3)(x+5) = 0$$

$$x = 3,\ -5$$

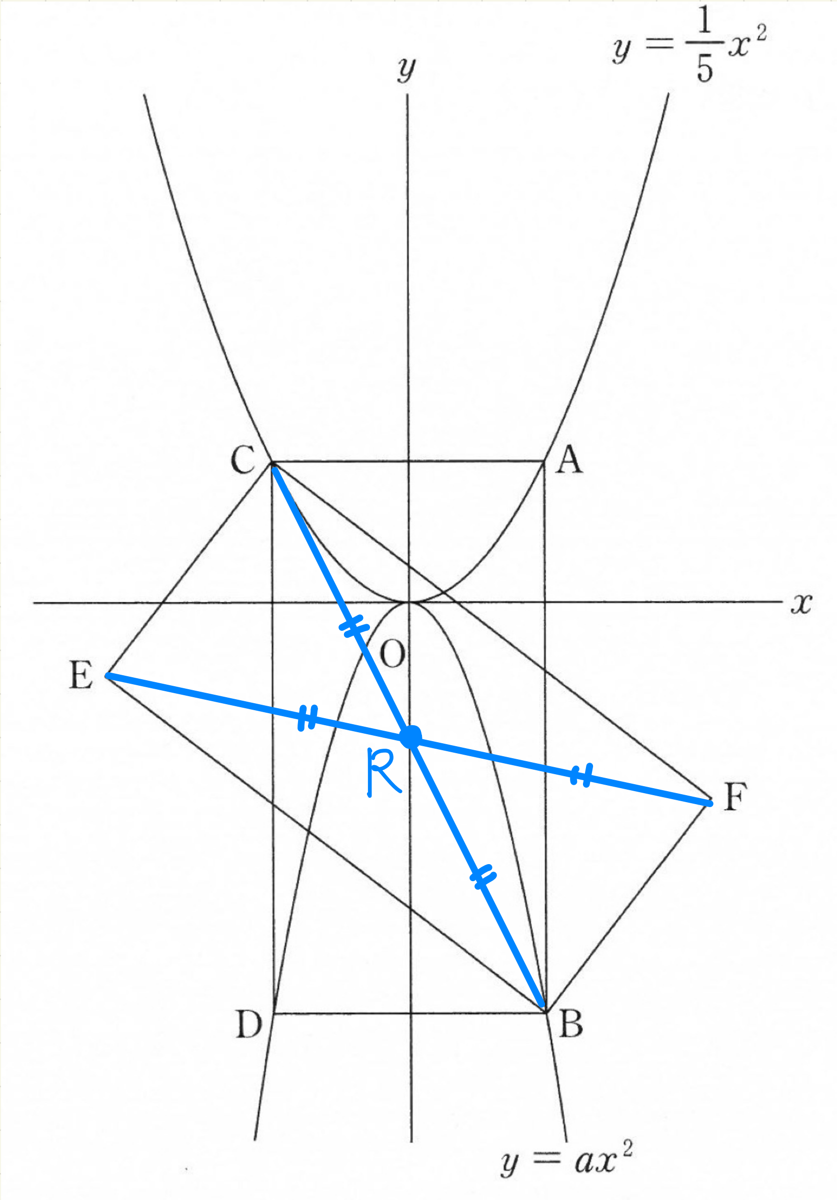
$x > 0$ より $x = 3$



よって、点Eは、点Cから左に6、下に8の点となる。

点C(-5, 5)より

点Eの座標は(-11, -3)



□CEBFの対角線の交点をRとする

長方形の性質より
点Rは対角線の中点である。

直線BCの式は、(2)より
$y=-2x-5$ なので、

切片である点Rの座標は、(0, −5)

よって直線ERの式は、

$y=ax-5$ に

点E(−11, −3)を代入して、

$$-3=-11a-5$$
$$11a=-2 \Rightarrow a=-\frac{2}{11}$$

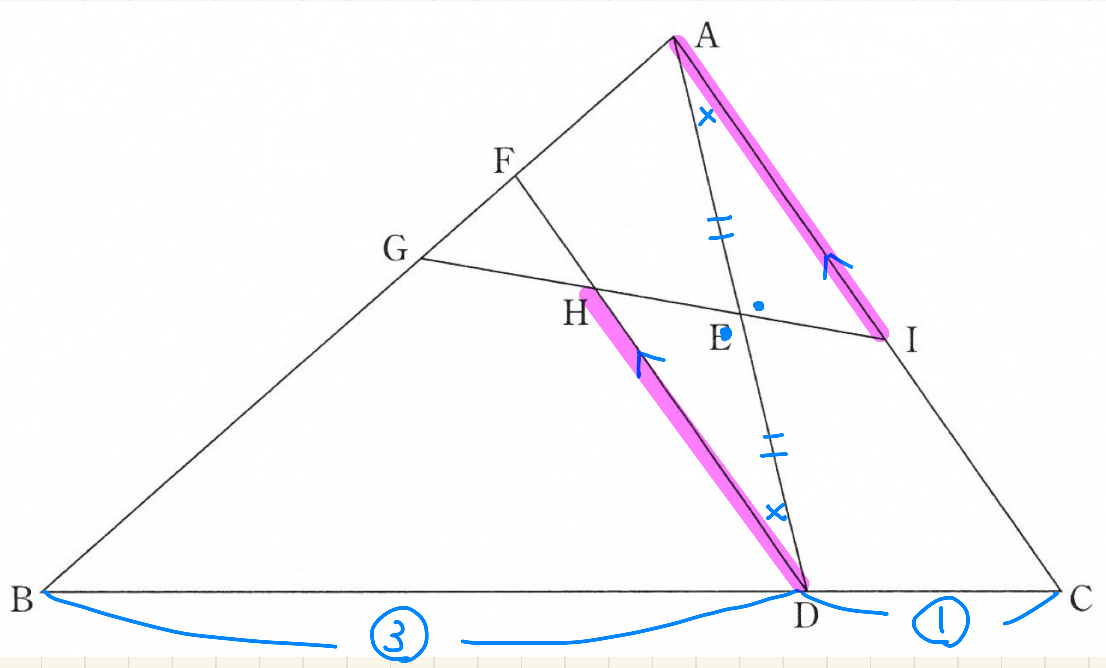
よって直線ERの式は、$y=-\frac{2}{11}x-5$。

点FはER上にあるので、直線EFの式は、

$$y=-\frac{2}{11}x-5$$

3.

(1)



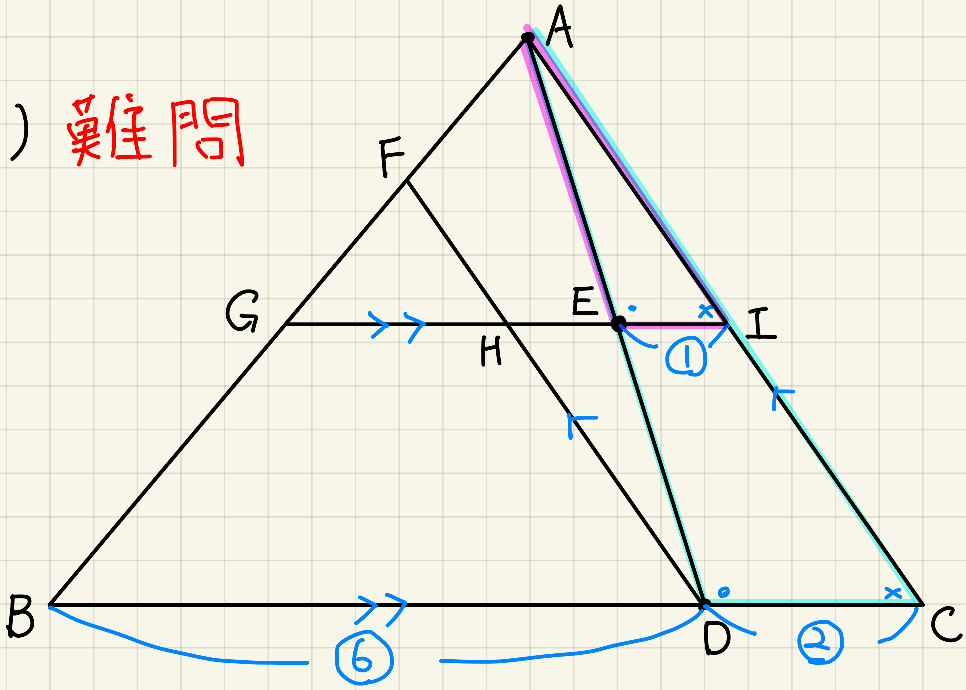
長さが等しい ⇒ 三角形の合同を利用する。
AI = DH を示したいので、AI と DH を含む
三角形の合同を示せば良い。
したがって、△AEI と △DEH が合同であることを証明する。
㋐ (a)　㋓ (b)　(c)

(2) △AEI と △DEH において、
仮定（線分 AD の中点を E）より
　$AE = DE$ ― ①
対頂角は等しいので、
　$\angle AEI = \angle DEH$ ― ②
AI // DH より錯角が等しいので、
　$\angle IAE = \angle HDE$ ― ③
①、②、③より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、△AEI ≡ △DEH

対応する辺の長さは等しいので、AI = DH

(証明終わり)

(3) 難問



△AEI と △ADC において、EI // DC より、同位角が等しいので

$\angle AEI = \angle ADC$ —— ①

$\angle AIE = \angle ACD$ —— ②

①、② より 2組の角がそれぞれ等しいので、

△AEI ∽ △ADC

対応する辺の比は等しいので、

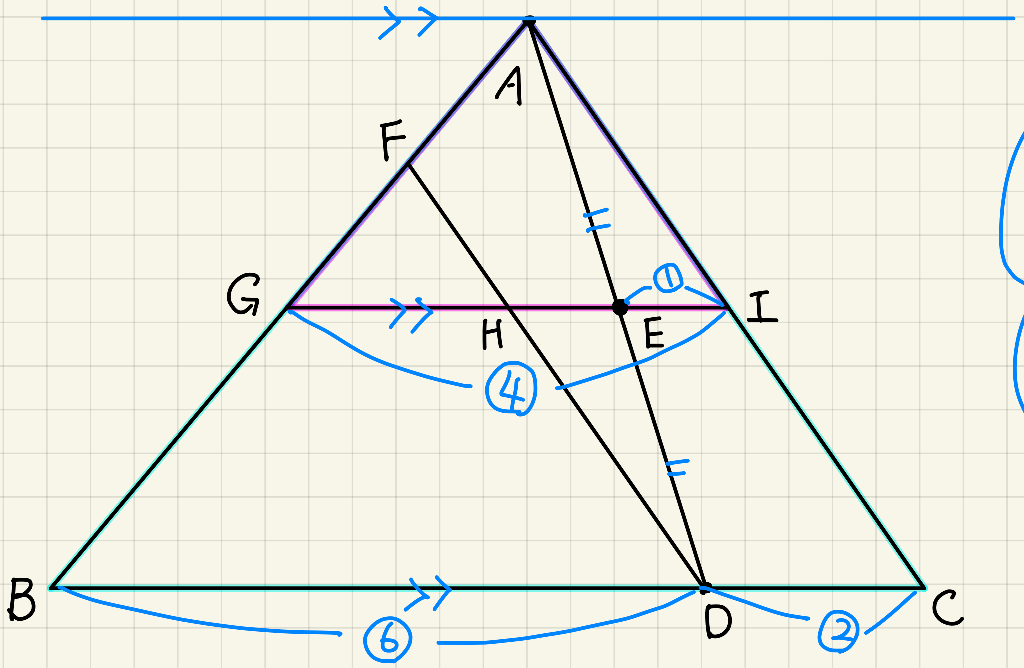
$\underbrace{AE}_{1} : \underbrace{ED}_{2} = EI : DC$

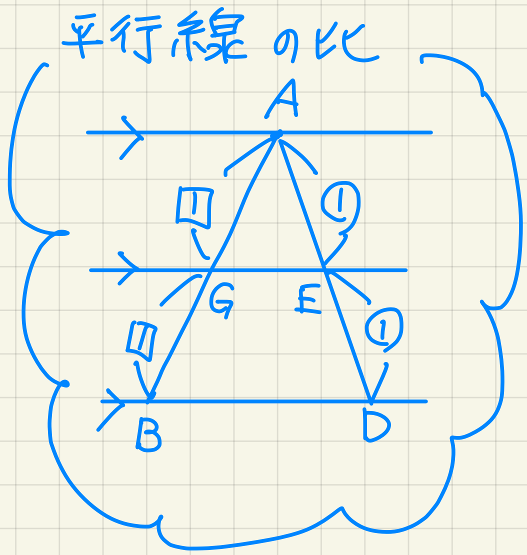
※ E は AD の中点なので、AE = ED

よって、EI = ① とすると、DC = ②

問題文から、$BD : \underbrace{DC}_{②} = 3 : 1$ なので、

BD = 3 × ② = ⑥





△AGIと△ABCにおいて、GI∥BCより同位角が等しいので、

$\angle AGI = \angle ABC$ ― ③

$\angle AIG = \angle ACB$ ― ④

③、④より2組の角がそれぞれ等しいので、

△AGI ∽ △ABC.

平行線の比から、

$AG : GB = \underbrace{AE : ED = 1 : 1}$

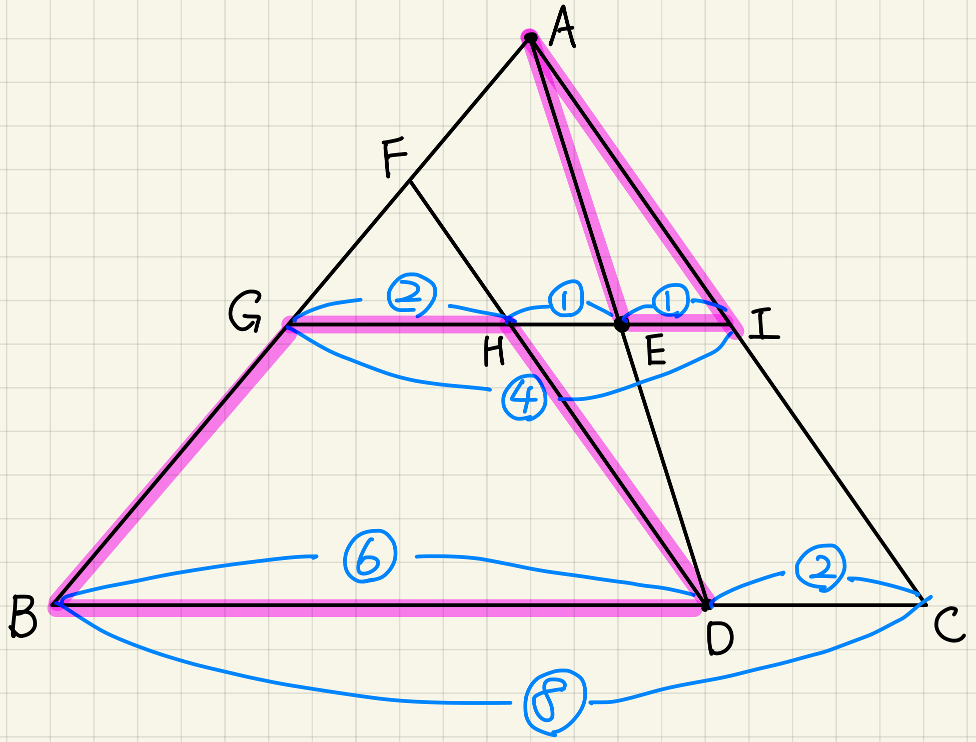
※EはADの中点なので、AE=ED.

対応する辺の比は等しいので、

$\underbrace{AG}_{1} : \underbrace{AB}_{2} = GI : \underbrace{BC}_{8}$

よって、

GI = ④　※ 2GI = ⑧ ⇒ GI = ④



(2) より △AEI ≡ △DEH なので、対応する辺の長さは等しいので、EI = EH　EI = ① より

EH = ①

GH = ④ − ② = ②

△AEI と □BDHG の高さは等しいので、面積比は底辺の比となる。

△AEI の底辺 = EI = ①

□BDHG の底辺 = 上底 + 下底

= GH + BD

= ② + ⑥

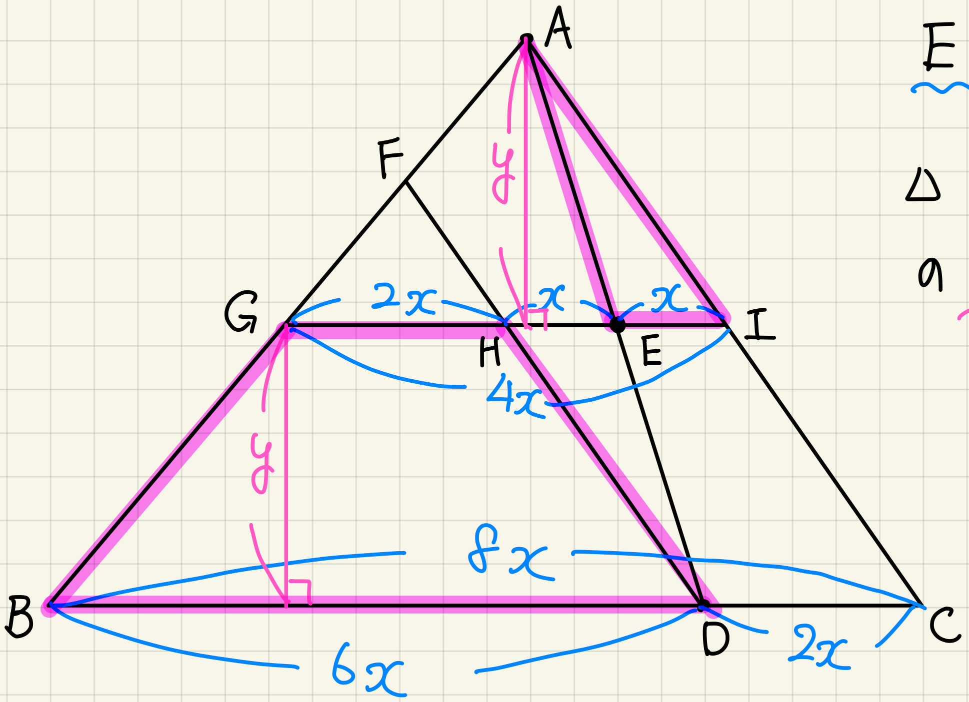
= ⑧

よって面積比は

△AEI : □BDHG = 1 : 8

参考

比で考えるのが難しい場合は、文字で考える。



$EI = x$ とする。

$\triangle AEI$ と $\square BDHG$ の高さを y とする

$$\triangle AEI = x \times y \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}xy$$

$$\square BDHG = \frac{(2x + 6x) \times y}{2} = 4xy$$

よって

$$\triangle AEI : \square BDHG = \frac{1}{2}xy : 4xy$$

$\times 2$

$$= xy : 8xy$$

$\div xy$

$$= 1 : 8$$

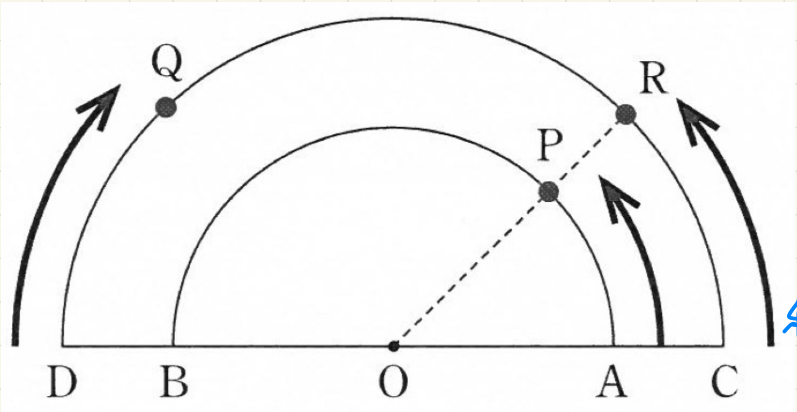
4.

(1)

(a) $\overset{\frown}{CD} = 90$ cm, 点Qの速さが秒速 9 cm なので、点QがDを出発してからCにはじめて到着するのは、

$$90 \div 9 = \underset{(エ)}{10} \text{ 秒}$$

(b)



$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD} = 2 : 3$

より

秒速 $\overset{\frown}{AP} : \overset{\frown}{CR} = 2 : 3$

1秒後を考えると、

$\overset{\frown}{AP} = 4$ cm なので、

$4 : \overset{\frown}{CR} = 2 : 3$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CR} = 6$ cm

$\overset{\frown}{AB} = 60$ cm, $\overset{\frown}{CD} = 90$ cm より

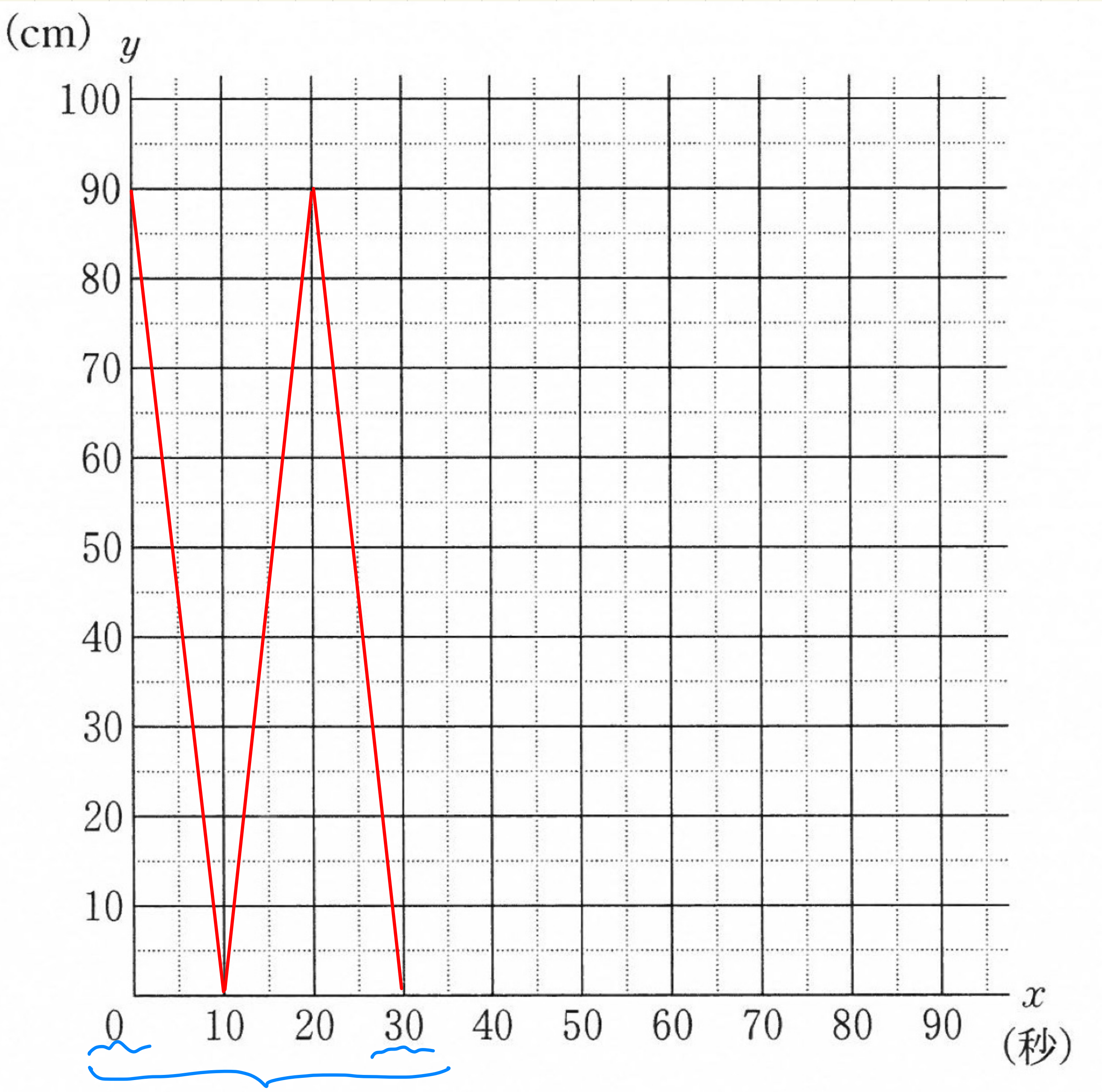
$$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD} = 60 : 90$$
$$= 2 : 3$$

したがって、同じ時間で、点Rは点Pの $\frac{3}{2}$ 倍動くことになる。点Pの速さは秒速 4 cm なので、点Rの速さは、

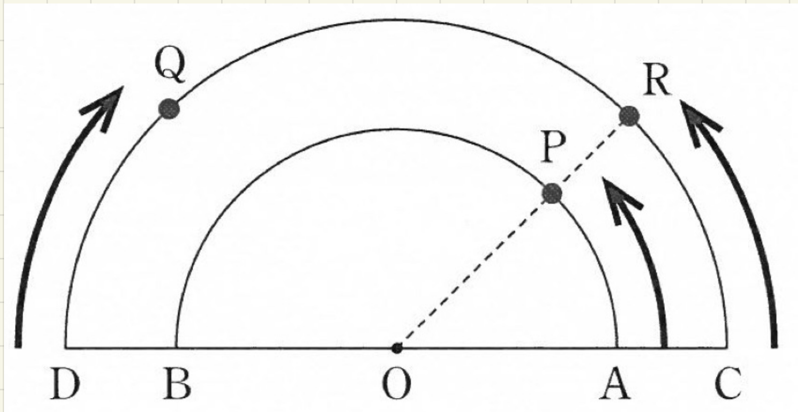
$$4 \times \frac{3}{2} = \underset{(イ)}{6}$$

(秒速 6 cm)

(2)



$0 \leqq x \leqq 30$ なので, グラフはこの範囲で書く



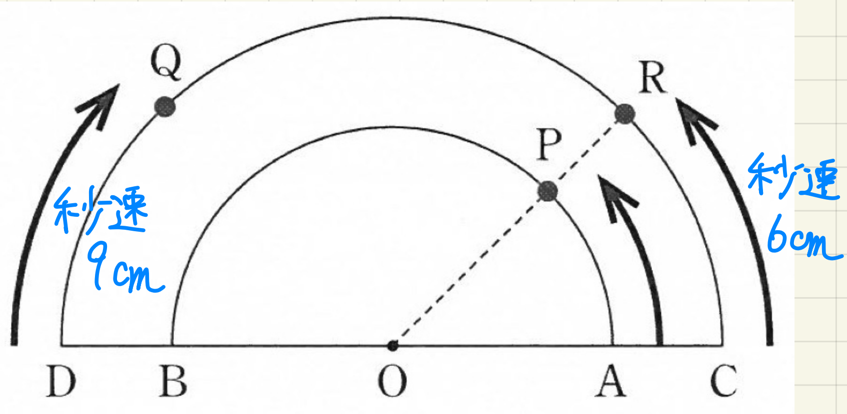
yはCQの長さ

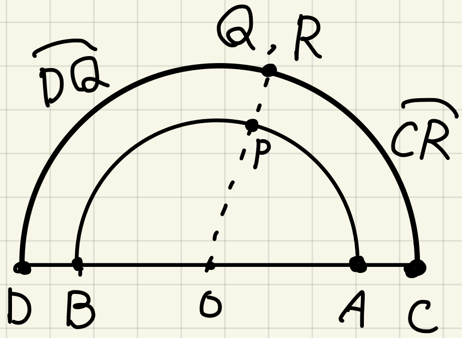
0秒のとき, 点QはD上にいるので,

$\overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{CD} = 90$cm

点Qは10秒で点Cに到着し, このときの$\overset{\frown}{CQ}$は0cm.

(3)

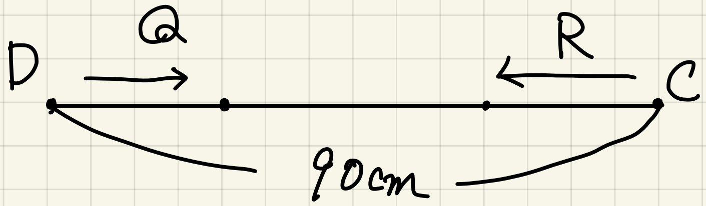




3点O，P，Qが，この順に一直線上に並ぶのは，$\overset{\frown}{CR} + \overset{\frown}{DQ} = 90$ cm のときだね。

↳QとRが重なるとき

点Qは秒速9cm，点Rは秒速6cmで動く。



QとRは1秒あたり15cm近づくので，

$90 \div 15 = 6$ 秒後.

(別解)

重なる時間をt秒後とすると，

$$\underbrace{9t}_{\text{Qが進むキョリ}} + \underbrace{6t}_{\text{Rが進むキョリ}} = 90$$

$$15t = 90$$

$$t = 6 \text{ 秒後}$$

(4) 難問

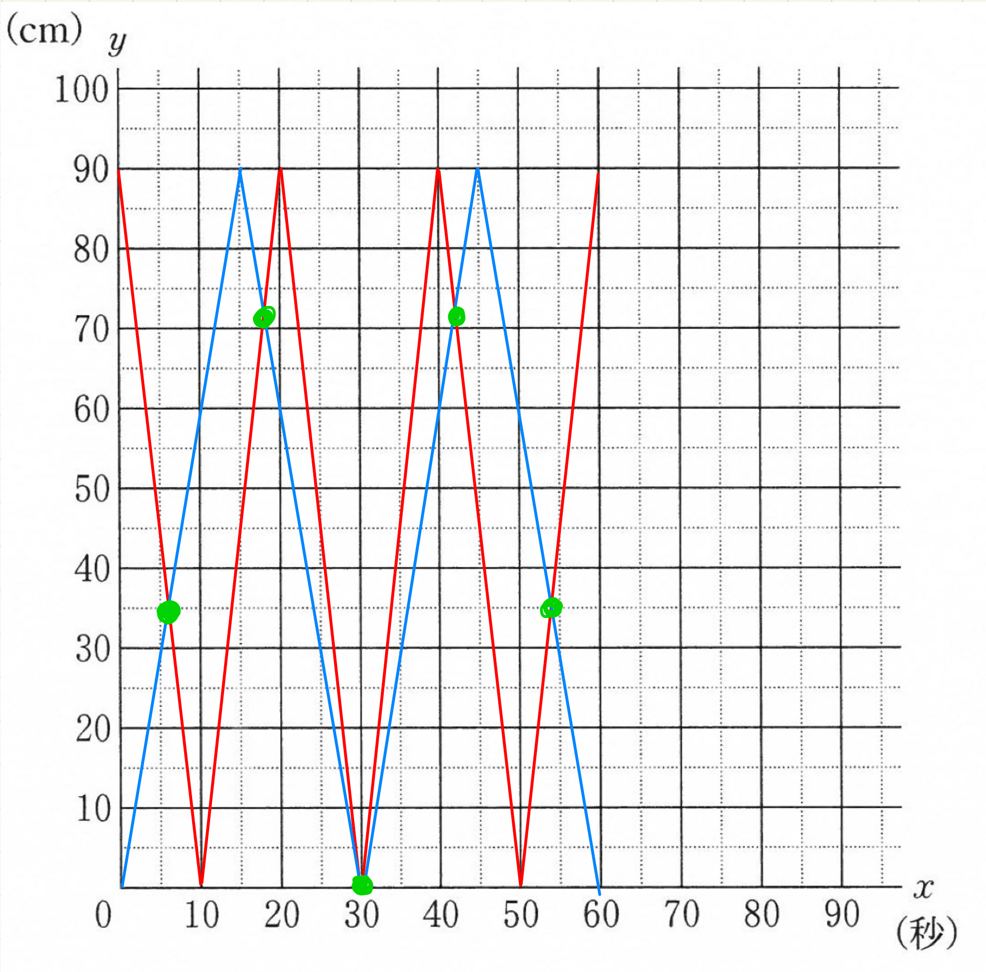
点PがAに、点QがDにはじめて同時に到着した時間を考える。

点Pが $\underbrace{A \to B}_{15秒} \underbrace{\to A}_{15秒}$ と動くのに30秒

点Qが $\underbrace{D \to C}_{10秒} \underbrace{\to D}_{10秒}$ と動くのに20秒

よって はじめて同時に到着するのは、30と20の最小公倍数の60秒 ※

点Qは片道10秒、点Rは片道15秒で進むので、(2)と同様のグラフを書き、交わる点がQとRが重なるときとなる ⇒ O, P, Qが一直線



—— : 点Q
—— : 点R
• : 交わる点

よって、交わる点が5個あるので、O, P, Qが一直線となるのは5回

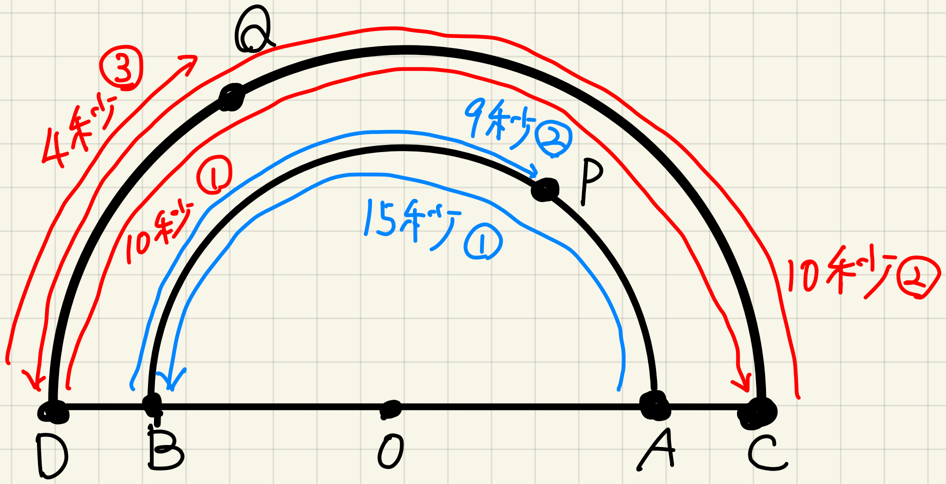
(5) 難問

144秒後に、点P, Qがどの位置にいるか考える。

(4) ※ より、60秒ごとに最初の状態に戻る。

→ 点PがA、点QがDにいる状態

したがって、120秒後も最初の状態である。
よって、$144-120=24$ 秒後の点P、点Qの位置を考える。



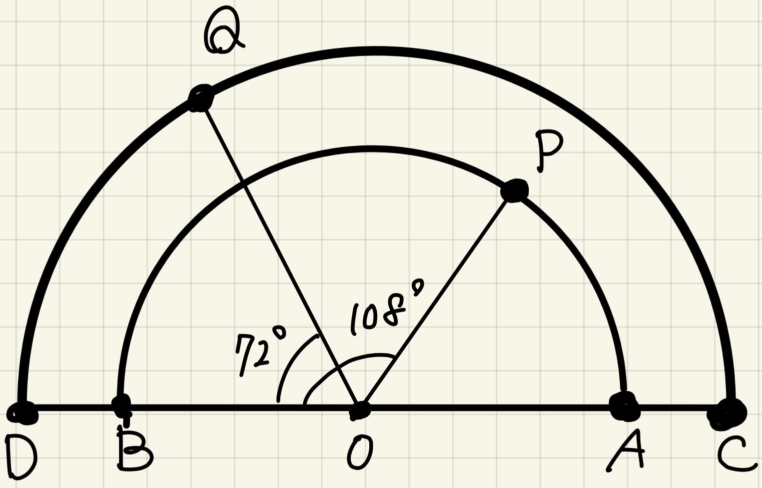
点Pは片道15秒なので、24秒後は、点Bから9秒後のところにいる。

点Qは片道10秒なので、24秒後は、点Dから4秒後のところにいる。

点P、点Qは各々の片道の時間で180°進むので、

$$\angle QOD = 180^\circ \times \frac{4}{10} = 72^\circ$$

$\angle POD = 180^\circ \times \frac{9}{15} = 108^\circ$



よって.

$\angle POQ = 108^\circ - 72^\circ$

$= 36^\circ$