2022年度　埼玉県

数学

kmkm

1

(1) 与式 $= -2x$

(2) 与式 $= -15 + 2$

$= -13$

(3) 与式 $= 4xy \times 2y$

$= 8xy^2$

(4) 式を整理すると、

$$7x - x = 1 + 2$$
$$6x = 3$$
$$x = \frac{1}{2}$$

(5) $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= \frac{12\sqrt{6}}{6}$

$= 2\sqrt{6}$

よって、

与式 $= 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6}$

$= -\sqrt{6}$

(6) 与式 $= (x+4)(x-5)$

(7) $\begin{cases} 4x - 3y = 10 & \text{—— ①} \\ 3x + 2y = -1 & \text{—— ②} \end{cases}$

①×3 − ②×4 より

$$\begin{array}{rr} & 12x - 9y = 30 \\ -) & 12x + 8y = -4 \\ \hline & -17y = 34 \\ & y = -2 \end{array}$$

$y=-2$ を①に代入して

$$4x - 3\times(-2) = 10$$
$$4x + 6 = 10$$
$$4x = 4$$
$$x = 1$$

よって，$x=1,\ y=-2$

(8) $2x^2-3x-3$ は因数分解できないので，解の公式を用いる．

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times2\times(-3)}}{2\times2}$$

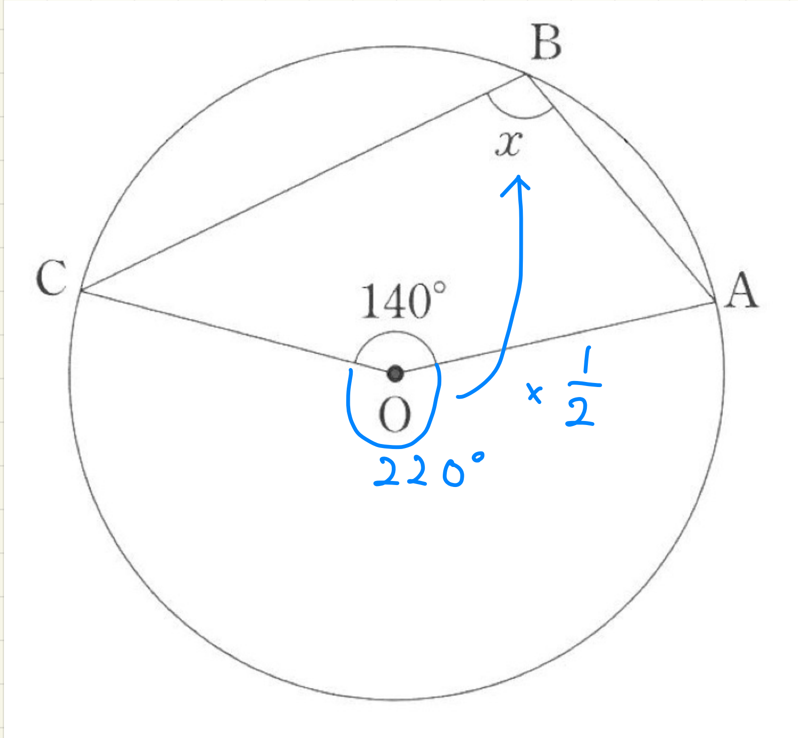
$$= \frac{3\pm\sqrt{33}}{4}$$

参考

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ の解の公式は．

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(9)



図の∠COAは、

$\angle COA = 360° - 140°$

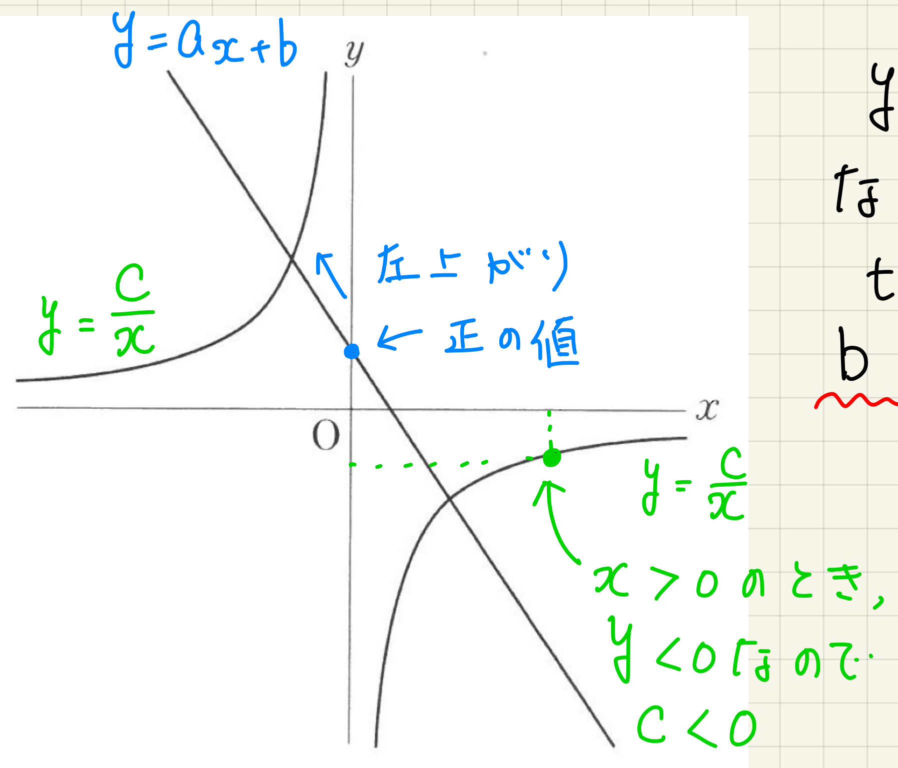
$= 220°$

円周角の定理より

$\angle x = \angle COA \times \frac{1}{2}$

$= 220 \times \frac{1}{2} = 110°$

(10)



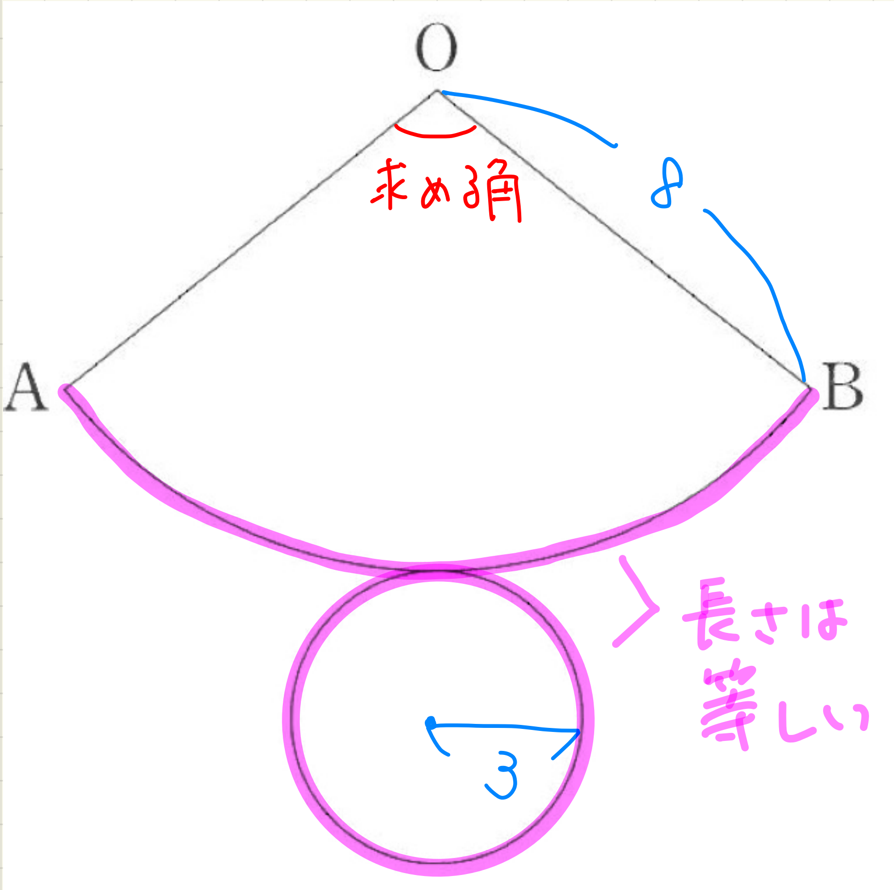
$y = ax + b$は、左上がりなので、$a < 0$

切片bは正の値なので$b > 0$

$y = \frac{c}{x}$は、xが正の値のとき、yは負の値なので、$c < 0$

よって答えは力

(11)



底面の円周の長さは

$$\text{直径} \times \pi = \underbrace{2 \times 3}_{\text{直径}} \times \pi = 6\pi$$

$\angle AOB = x^\circ$ とすると，おうぎ形の弧の長さは．

$$\text{直径} \times \pi \times \frac{\text{中心角}}{360^\circ} = \underbrace{2 \times 8}_{\text{直径}} \times \pi \times \frac{x}{360}$$

$$= \frac{2}{45}\pi x$$

円周の長さと弧の長さは等しいので．

$$6\pi = \frac{2}{45}\pi x$$

$$x = 6 \times \frac{45}{2} = 3 \times 45 = 135^\circ$$

(12)

$\sqrt{\dfrac{540}{n}} = \dfrac{6\sqrt{15}}{\sqrt{n}}$ より，$\sqrt{n} = ○\sqrt{15}$ の形をしていれば，分子の $\sqrt{15}$ と分母の $\sqrt{15}$ が約分できる。
また，整数になるには，○ が 6の約数 (1, 2, 3, 6) であれば良い。

$1\sqrt{15} = \sqrt{15}$

$2\sqrt{15} = \sqrt{60}$

$3\sqrt{15} = \sqrt{135}$

$6\sqrt{15} = \sqrt{540}$

※ $2\sqrt{15}$ のとき。

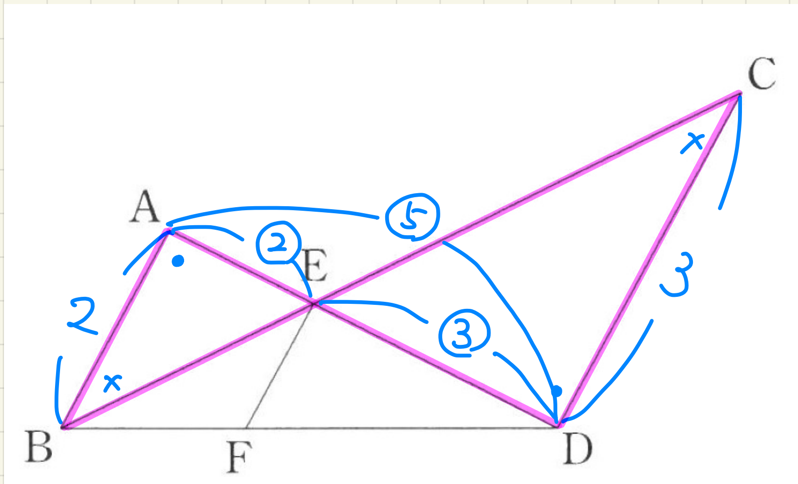
$\dfrac{6\sqrt{15}}{2\sqrt{15}} = 3$ 整数

$\sqrt{n}$ の形で答えるので。

$2\sqrt{15} = \sqrt{2\times2\times15} = \sqrt{60}$

より，$n = 15, 60, 135, 540$ の 4通り

(13)



△EAB と △EDC において，
AB // CD より 錯角が等しいので，

$\angle EAB = \angle EDC$ — ①

$\angle EBA = \angle ECE$ — ②

①，② より 2組の角がそれぞれ等しいので。

△EAB ∽ △EDC

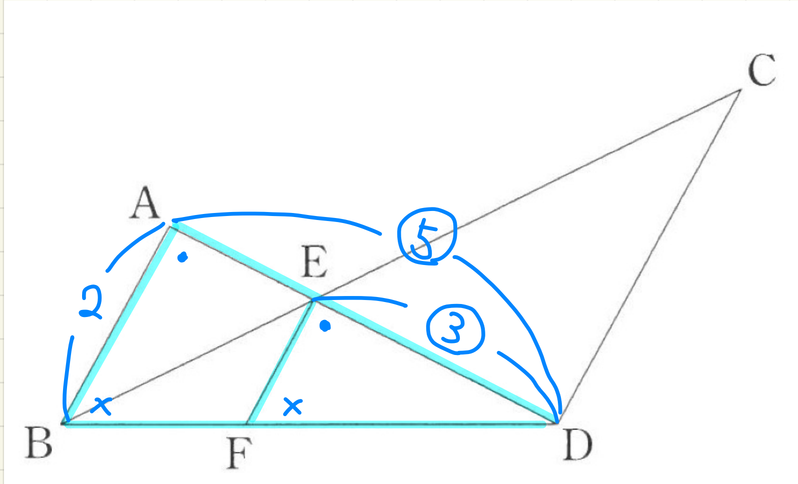
対応する辺の比は等しいので。

AE : ED = AB : CD

$= 2 : 3$

したがって,

$DE : DA = 3 : 5$



$\triangle DEF$ と $\triangle DAB$ において,
$EF /\!/ AB$ より同位角は等しいので,

$\angle DEF = \angle DAB$ ― ③

$\angle DFE = \angle DBA$ ― ④

③, ④ より, 2組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle DEF \backsim \triangle DAB$

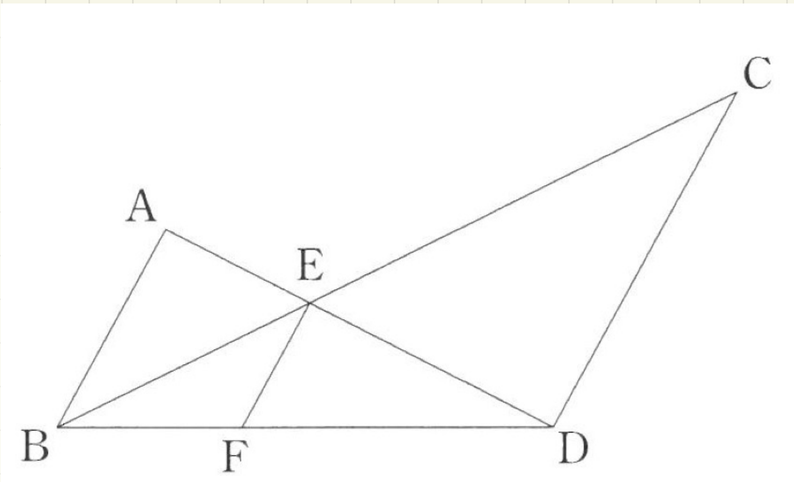
対応する辺の比は等しいので,

$\underbrace{DE}_{3} : \underbrace{DA}_{5} = EF : \underbrace{AB}_{2}$

よって,

$5EF = 6 \Rightarrow EF = \dfrac{6}{5}$ cm

(別解)



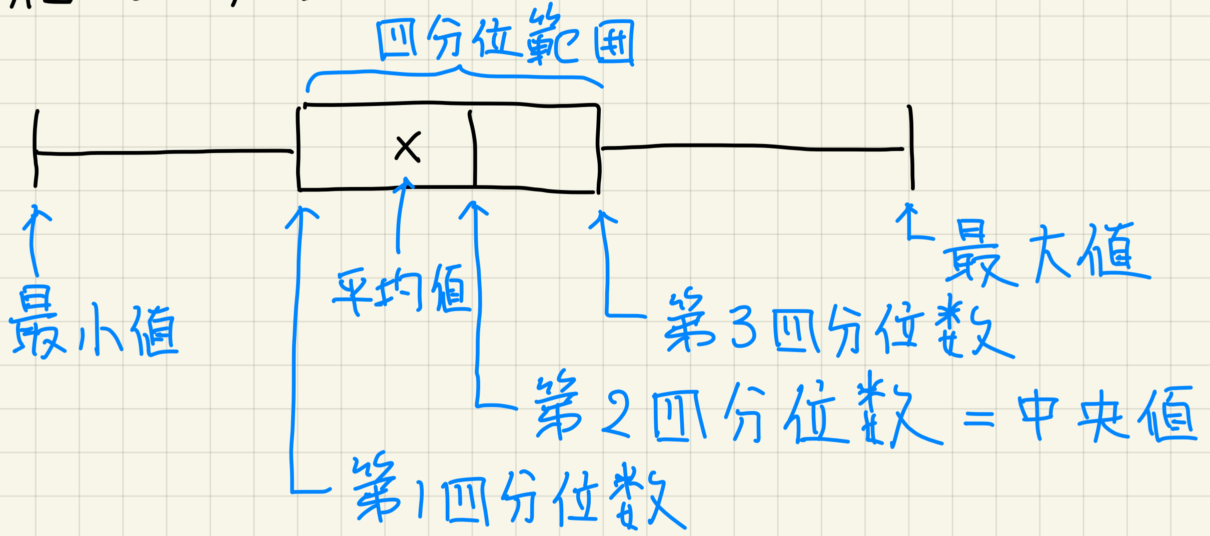
$$EF = \frac{AB \times CD}{AB + CD}$$

より,

$EF = \dfrac{2 \times 3}{2 + 3} = \dfrac{6}{5}$ cm

(14)

箱ひげ図



ア：四分位範囲＝第3四分位数－第1四分位数
　極端な値は、箱の外に出るので、その影響は受けにくい
　よって正しい

イ：四分位範囲＝第3四分位数－第1四分位数
　よって正しい

ウ：平均値は×なので記載するが、箱の中央にあるとは限らない。
　よって誤り

エ：第2四分位数と中央値は同じ意味である。
　よって正しい

以上より、答えはウ

(15)

魚の総数をx匹とする。

[1]より印のついた魚の割合は.

$$\frac{22}{x}$$ …… x匹中22匹に印あり

[2]より,印のついた魚の割合は.

$$\frac{3}{23}$$ …… 23匹中3匹に印あり

魚の総数を推定すると,これらの割合は変わらないので,

$$\frac{22}{x}=\frac{3}{23}$$

両辺にxをかけると.

$$22=\frac{3}{23}x$$

$\frac{3}{23}x=22$

$$x=22\times\frac{23}{3}$$

$$=\frac{506}{3}$$

$$=168.6\cdots$$

$$\fallingdotseq 169匹$$

(16) 難問

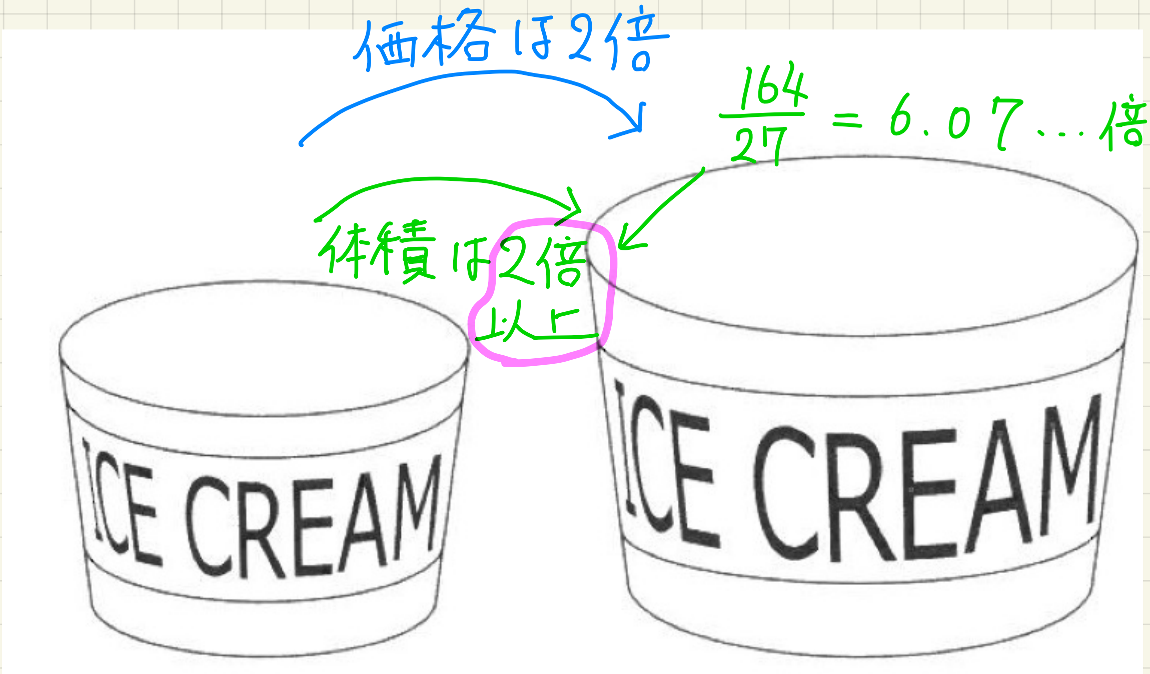
相似な面積比 ⇒ 相似比の2乗
相似な体積比 ⇒ 相似比の3乗

Sサイズ と Mサイズ を比較すると、

Sの体積 : Mの体積 $= 3^3 : 4^3 = 27 : 164$

Sの価格 : Mの価格 $= 160 : 320 = 1 : 2$

Mサイズの価格は、Sサイズの価格の2倍に対し、Mサイズの体積はSサイズの体積の2倍以上なので、Mサイズの方が割安



Sサイズ　　Mサイズ

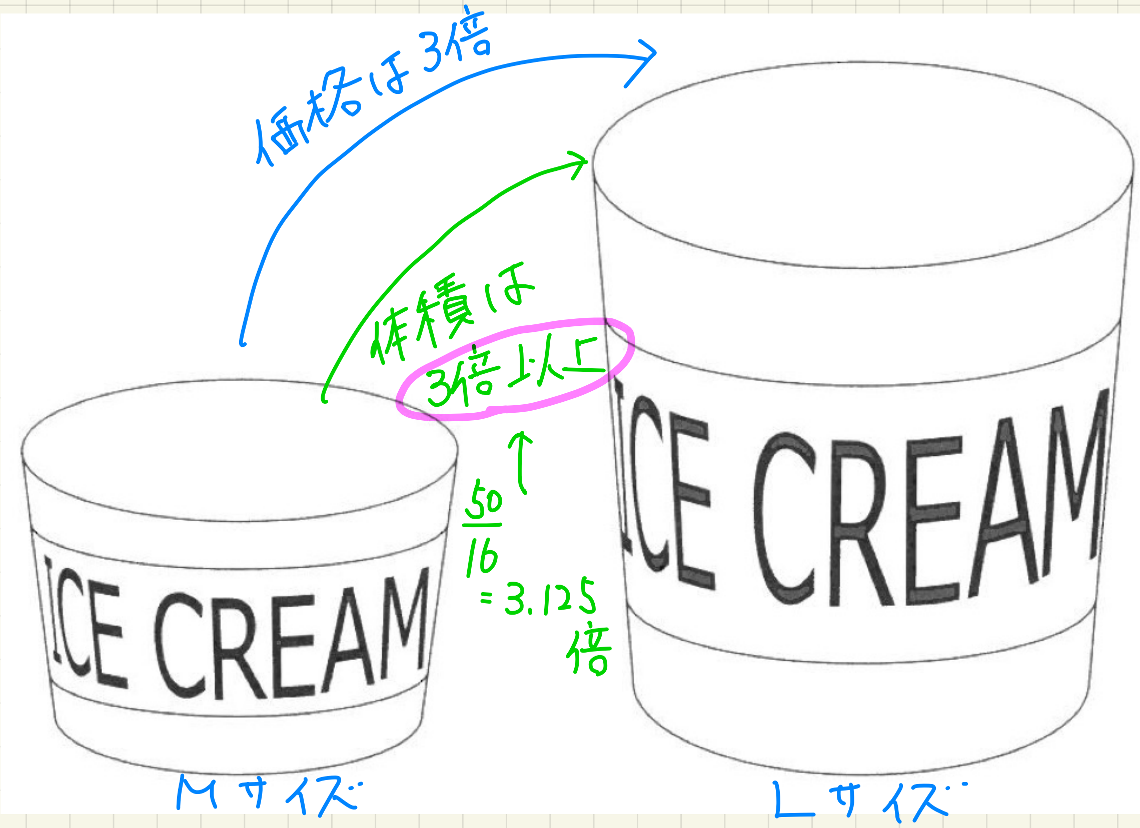
Mサイズ と Lサイズ を比較すると、

Mの表面積 : Lの表面積 $= 4^2 : 5^2 = 16 : 25$

Lの高さはMの高さの2倍なので

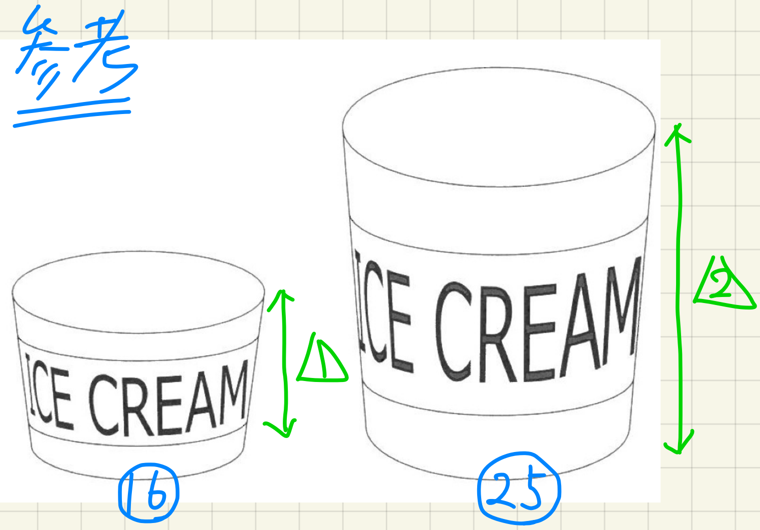
Mの体積 : Lの体積 $= 16 : \underbrace{50}_{25\times 2}$

Mの価格：Lの価格 ＝ 320：960 ＝ 1：3
Lサイズの価格は、Mサイズの価格の3倍に対し、Lサイズの体積はMサイズの体積の3倍以上なので、Lサイズの方が割安



よって Sサイズ よりも Mサイズの方が割安で、
Mサイズよりも Lサイズの方が割安なので、
最も割安なのは Lサイズ となる。

参考



体積 ＝ 表面積 × 高さ

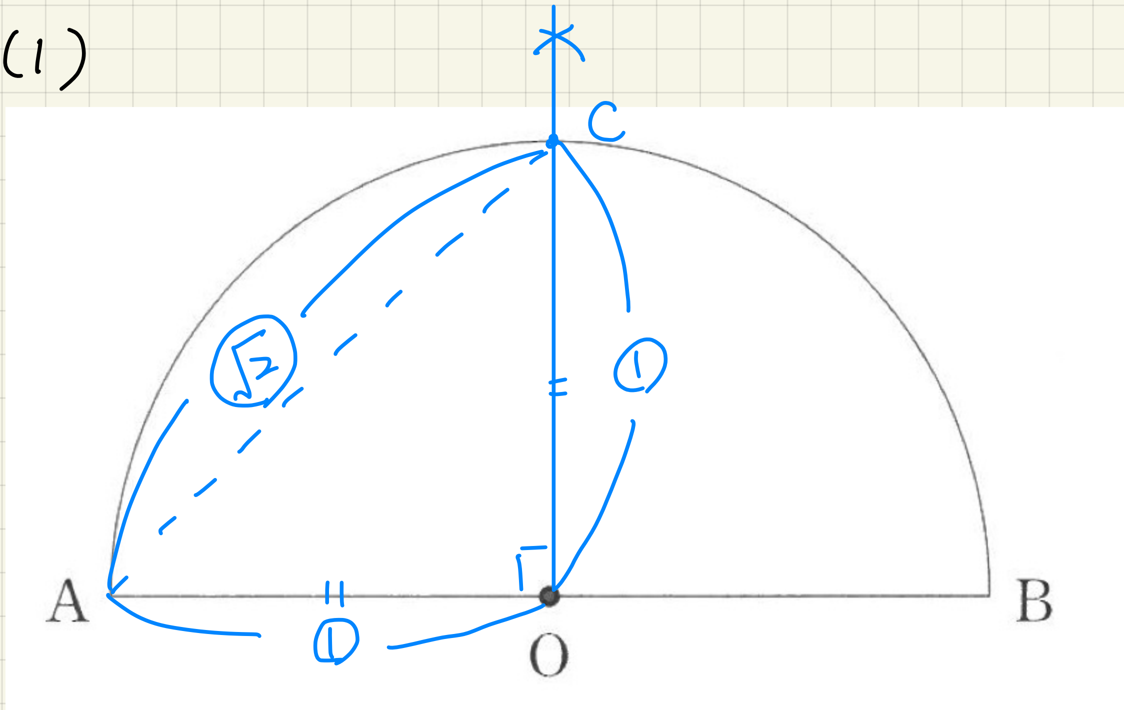
表面積が 16：25

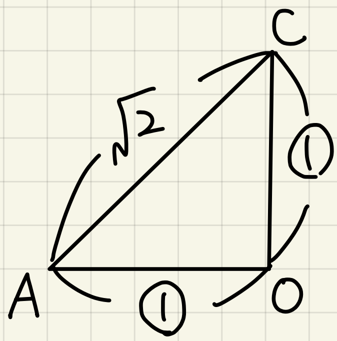
高さが 1：2
なので、

体積比は 16×1 ： 25×2 ＝ 16：50

2.

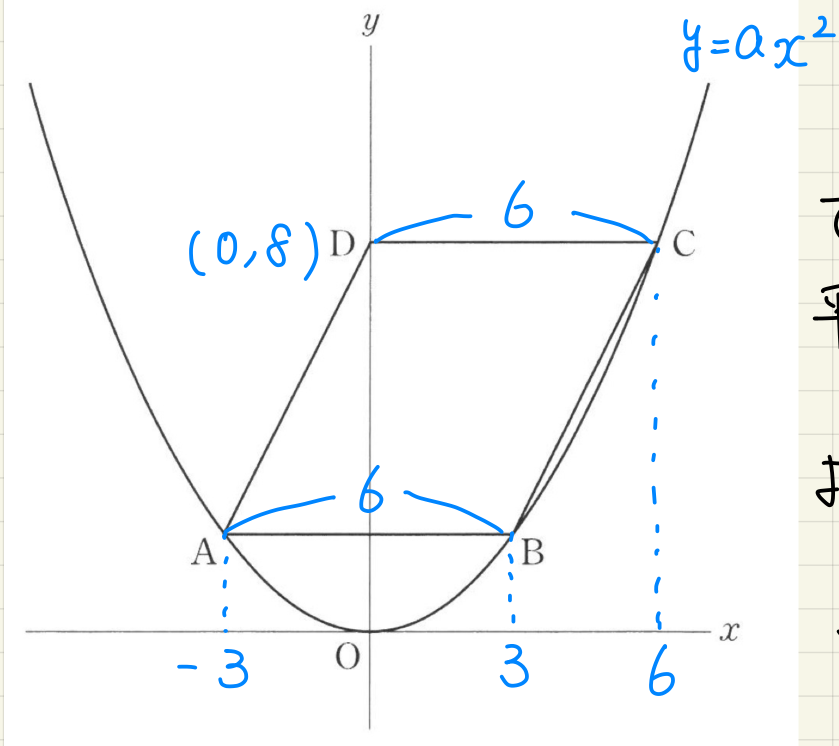
(1)





を利用する。

(2)



$AB = 3 - (-3) = 6\text{cm}$

で、四角形ABCDは、平行四辺形なので、

$AB = CD = 6\text{cm}$

よって、点Cのx座標は6。

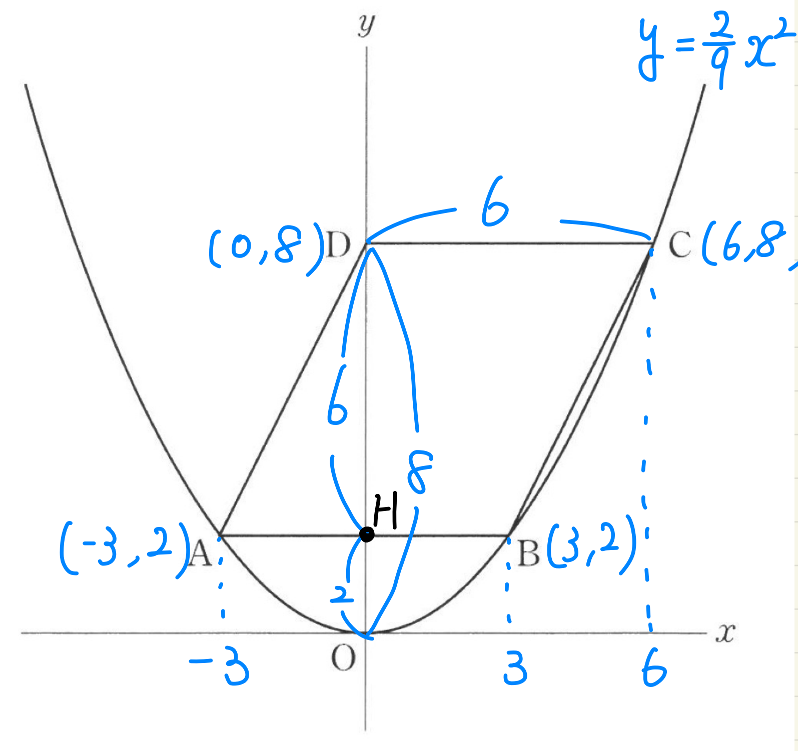
点Dのy座標は8で、$AB \parallel CD$より、点Cのy座標も8。よって点C$(6, 8)$。$y = ax^2$ に $x = 6$, $y = 8$ を代入して、

$$8 = a \times 6^2$$
$$= 36a$$
$$\therefore a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

点Aは $y=\frac{2}{9}x^2$ のグラフ上にあり、$x=-3$ より

$$y=\frac{2}{9}\times(-3)^2=2$$

点Bのy座標は、点Aのy座標と等しいので、
点Bのy座標も2



図のように点Hをとると、
$DO=8$, $HO=2$ より

$$\begin{aligned}DH&=DO-HO\\&=8-2\\&=6\end{aligned}$$

よって、▱ABCDの面積は、

$$\begin{aligned}\text{底辺}\times\text{高さ}&=6\times6\\&=36\text{ cm}^2\end{aligned}$$

3.

(1) A(2,1), B(4,5)を通るので、求める直線の式を $y=ax+b$ とすると、

$$\begin{cases}1=2a+b & \text{①}\\ 5=4a+b & \text{②}\end{cases}$$

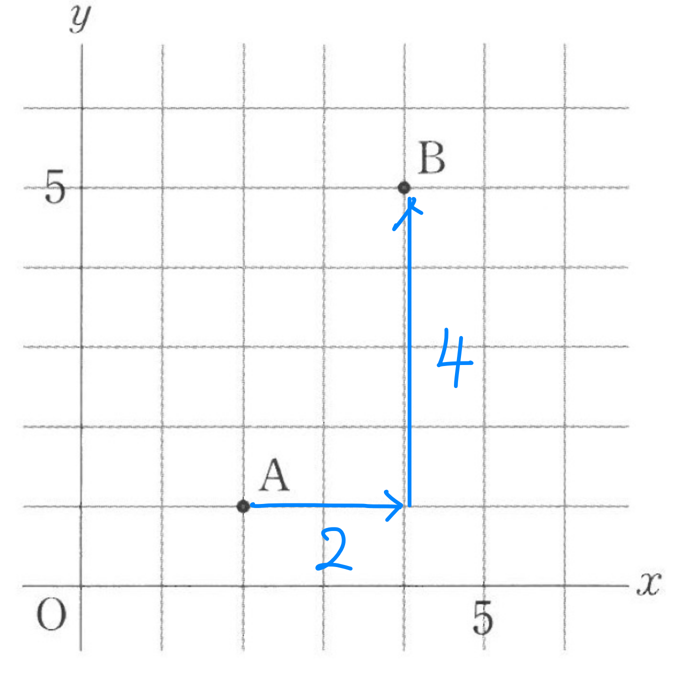
$$\begin{aligned}-)\ \ 5&=4a+b\\ -4&=-2a\\ a&=2\end{aligned}$$

$a=2$を①に代入して、

$$\begin{aligned}1&=2\times2+b\\ b&=-3\end{aligned}$$

よって、$y=2x-3$

(別解)



点Aから点Bまで，xの増加量は2，yの増加量は4なので，

$$変化の割合 = \frac{y の増加量}{x の増加量}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

1次関数では，傾きと変化の割合は等しいので，

傾き $= 2$

求める式を $y = ax + b$ とすると，$a = 2$ より $y = 2x + b$

これが点A $(2, 1)$ を通るので，

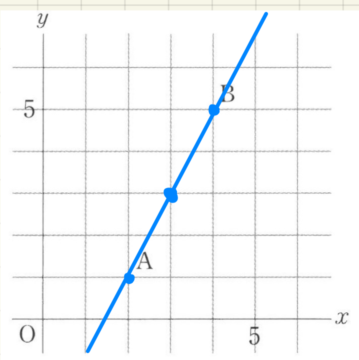
$1 = 2 \times 2 + b \Rightarrow b = -3$

よって，$y = 2x - 3$

(2)

Kさん「点Pが直線AB上にあるときは，３点A，B，Pを結んでできる図形が三角形にならないからね。」

より，点Pが $y = 2x - 3$ 上にある場合，3点A, B, Pを結んでできる図形は三角形にならない。



点Pの座標は (s, t) で，s, t はさいころを投げたときの出た目なので，

s : 1, 2, 3, 4, 5, 6

t : 1, 2, 3, 4, 5, 6

となる。このうち，点Pが $y=2x-3$ 上にあるのは，

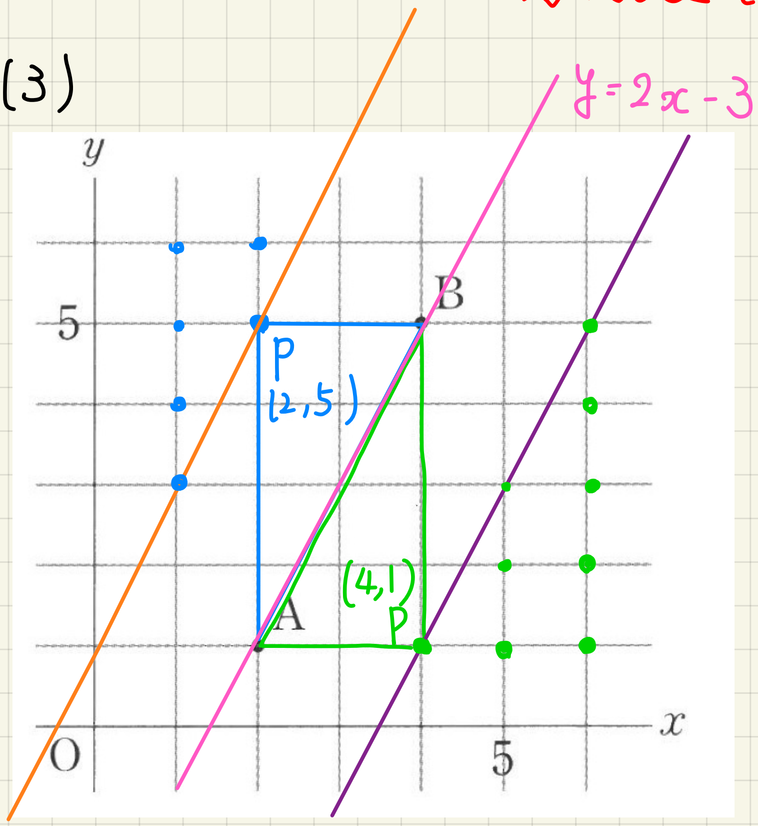
$(2,1),(3,3),(4,5)$

の3通りなので，三角形にならない点Pは3個ある。 (ア)

2つのさいころを投げたとき，全ての出る目の数は $6\times6=36$ 通りなので，三角形になる点Pの個数は，

$36-3=33$ 個 (イ)

(3)



まず △ABP が $4\,cm^2$ になるときの点Pの座標を考える。

点Pが $(2,5)$，$(4,1)$ のとき

$\triangle ABP=2\times4\times\frac{1}{2}=4\ cm^2$

となる。

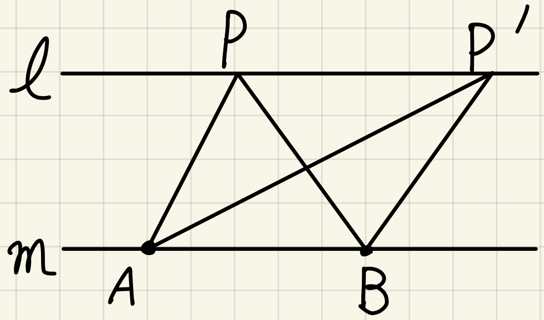
次に，ABを底辺としたときの高さを，ABに平行な直線を引いて考える。

平行線の外側に点Pがあれば，$4\,cm^2$ より大きくなるので，$4\,cm^2$ 以上となる点Pは $6+9=15$ 個ある

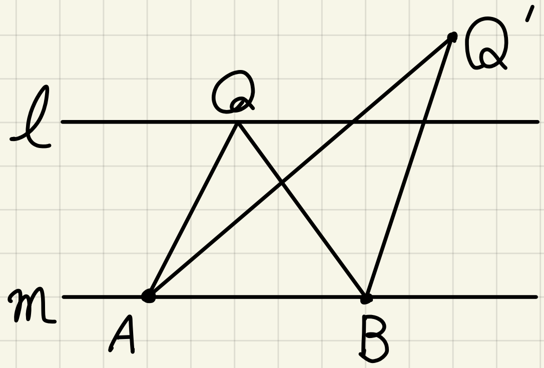
(2)より △ABP が三角形となるのは33個あるので，求める確率は

$$\frac{15}{33}=\frac{5}{11}$$

参考



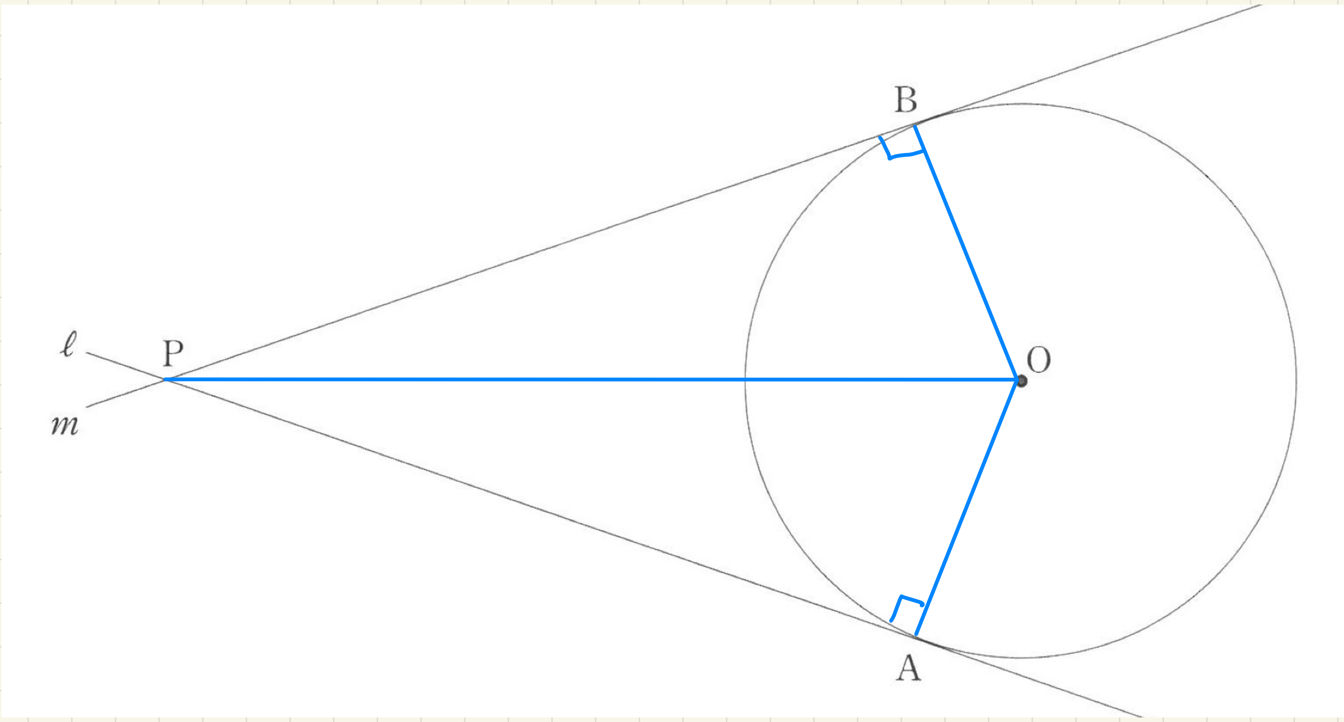
$\ell \parallel m$ ならば
$\triangle ABP = \triangle ABP'$
⇒面積は同じ



左図で Q' は ℓ の外側にあるので
$\triangle ABQ < \triangle ABQ'$
⇒ $\triangle ABQ'$ の方が面積は大きい

4.

(1)



△APO と △BPO において,
共通な辺は等しいので,

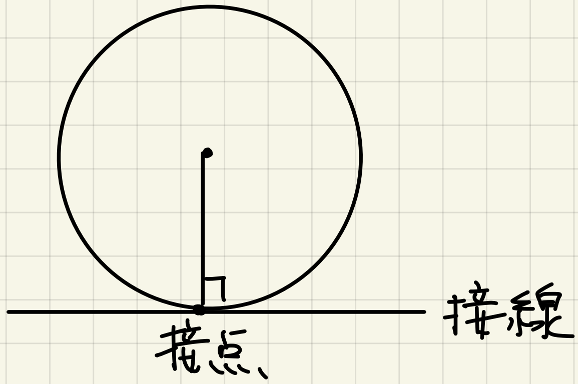
$PO = PO$ —— ①

円の半径は等しいので,

$OA = OB$ —— ②

A, B は, 円の接点なので

$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ —— ③

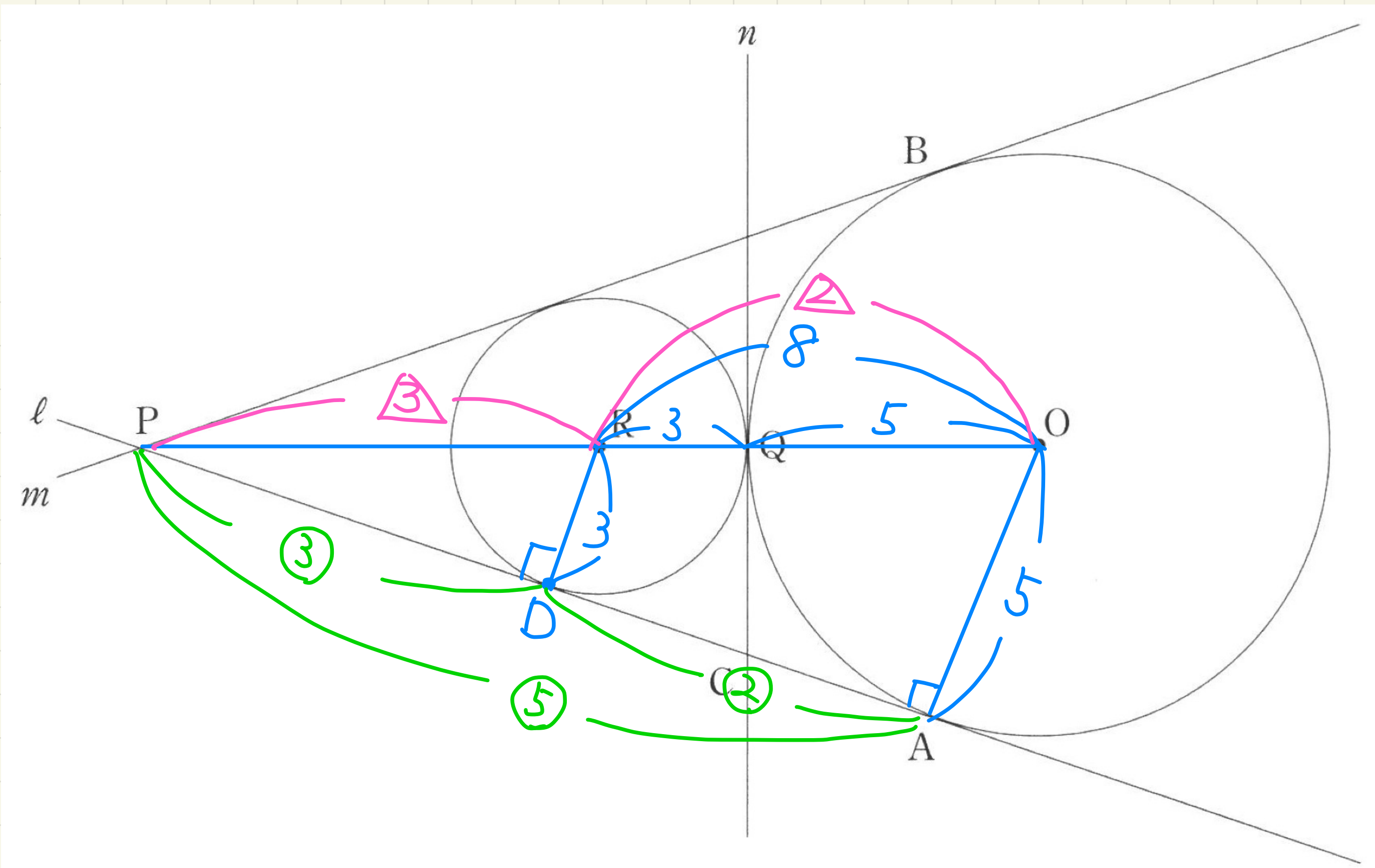


①, ②, ③より, 直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので

△APO ≡ △BPO

対応する辺は等しいので, PA = PB (証明終わり)

(2) 難問



円Rと直線ℓの交点(接点)をDとする。
$\triangle PRD$と$\triangle POA$において、
DとAは円の接点なので、
$\angle RDP = \angle OAP = 90°$ —— ①
①より同位角が等しいので、$RD \parallel OA$。よって、
$\angle PRD = \angle POA$ —— ②
①,②より2組の角がそれぞれ等しいので、
$\triangle PRD \backsim \triangle POA$
相似比は $RD : OA = 3 : 5$
よって、$AR : AO = 3 : 5 \Rightarrow AR : RO = 3 : 2$
PQ, QOはそれぞれ円の半径なので、
$RQ = 3$, $QO = 5$。よって
$RO = 3 + 5 = 8$ cm

$AR : \underset{8}{RO} = 3 : 2 \Rightarrow 2AR = 24$, $AR = 12$ cm

$\triangle PRD$で三平方の定理より

$$PD = \sqrt{12^2 - 3^2}$$

$\sqrt{144 - 9}$

$$= \sqrt{135}$$

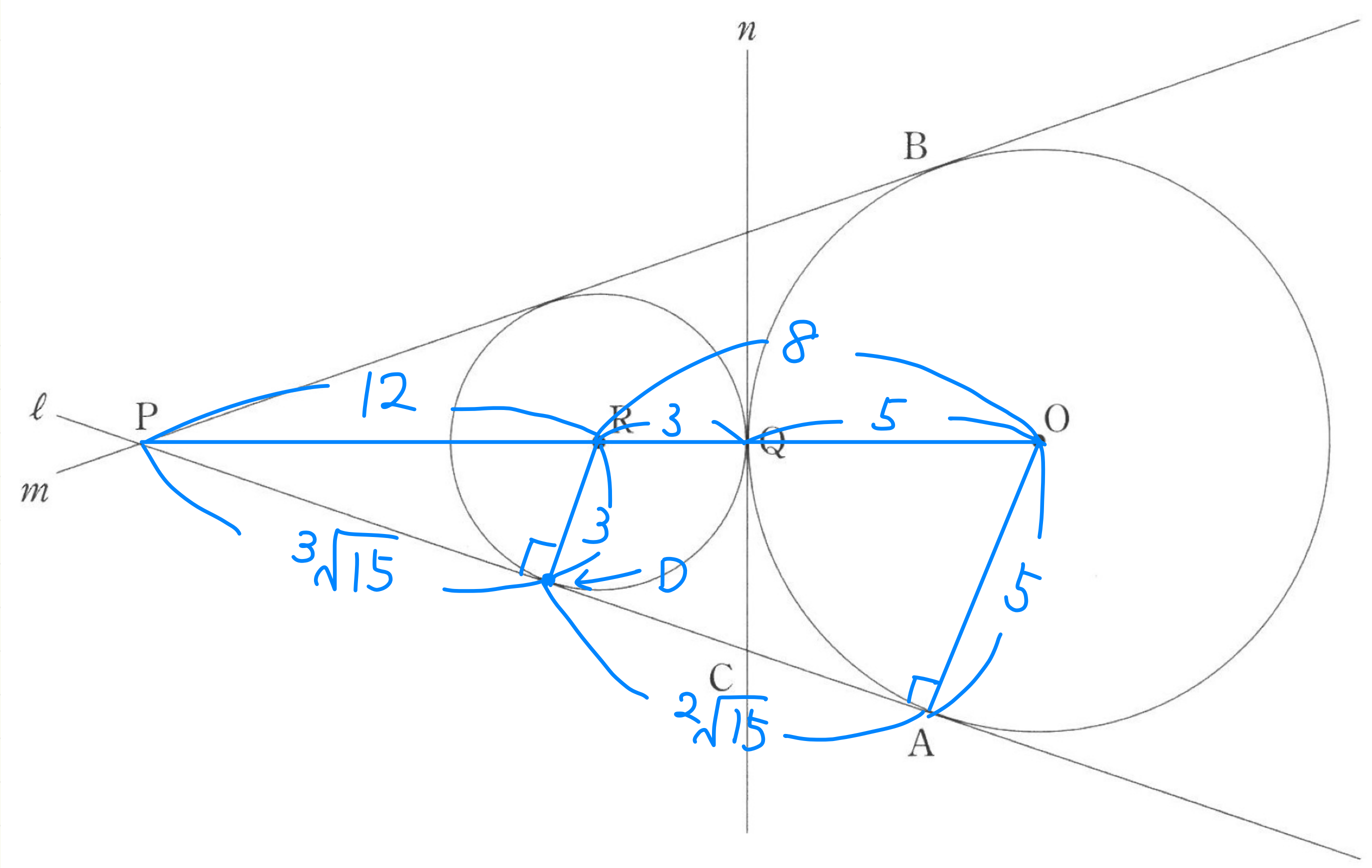
$$= 3\sqrt{15} \text{ cm}$$

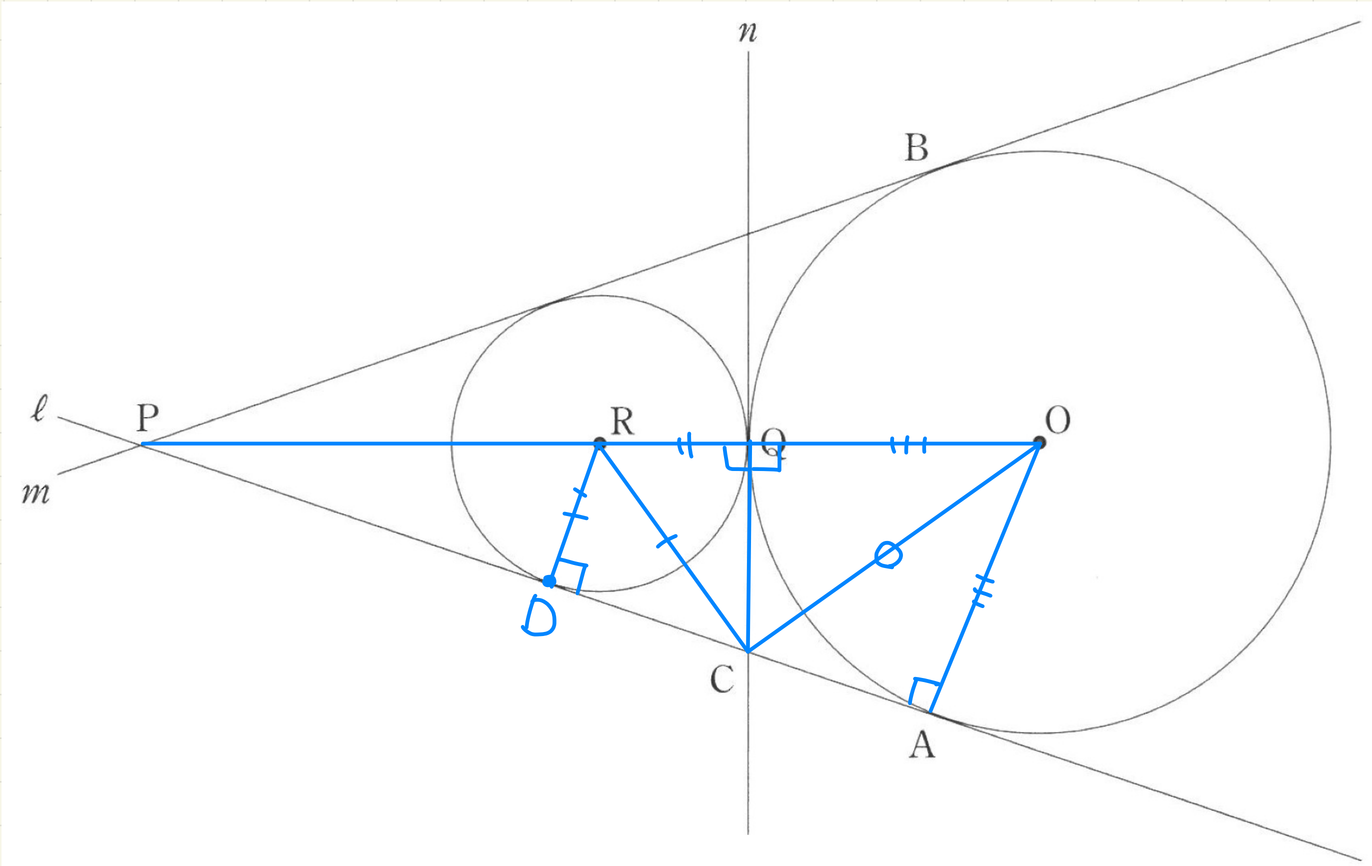
$\triangle PRD \backsim \triangle POA$で相似比が$3:5$より
$PD : PA = 3 : 5 \Rightarrow \underset{3\sqrt{15}}{PD} : DA = 3 : 2$

よって

$$3DA = 6\sqrt{15}$$

$$DA = 2\sqrt{15}\ \text{cm}$$





△RDCと△RQCにおいて，

DとQは接点なので，

$\angle PDC = \angle PQC = 90^\circ$ —— ④

共通な辺は等しいので，

$RC = RC$ —— ⑤

RD，RQは円Rの半径なので，

$RD = RQ$ —— ⑥

④，⑤，⑥より，直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので

$\triangle RDC \equiv \triangle RQC$

対応する辺は等しいので，

$DC = QC$ —— ⑦

△OACと△OQCにおいて．

AとQは接点なので，

$\angle OAC = \angle OQC = 90^\circ$ —— ⑧

共通な辺は等しいので

$OC = OC$ —— ⑨

OA，OQは円Rの半径なので，

$OA = OQ$ —— ⑩

⑧，⑨，⑩より，直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので

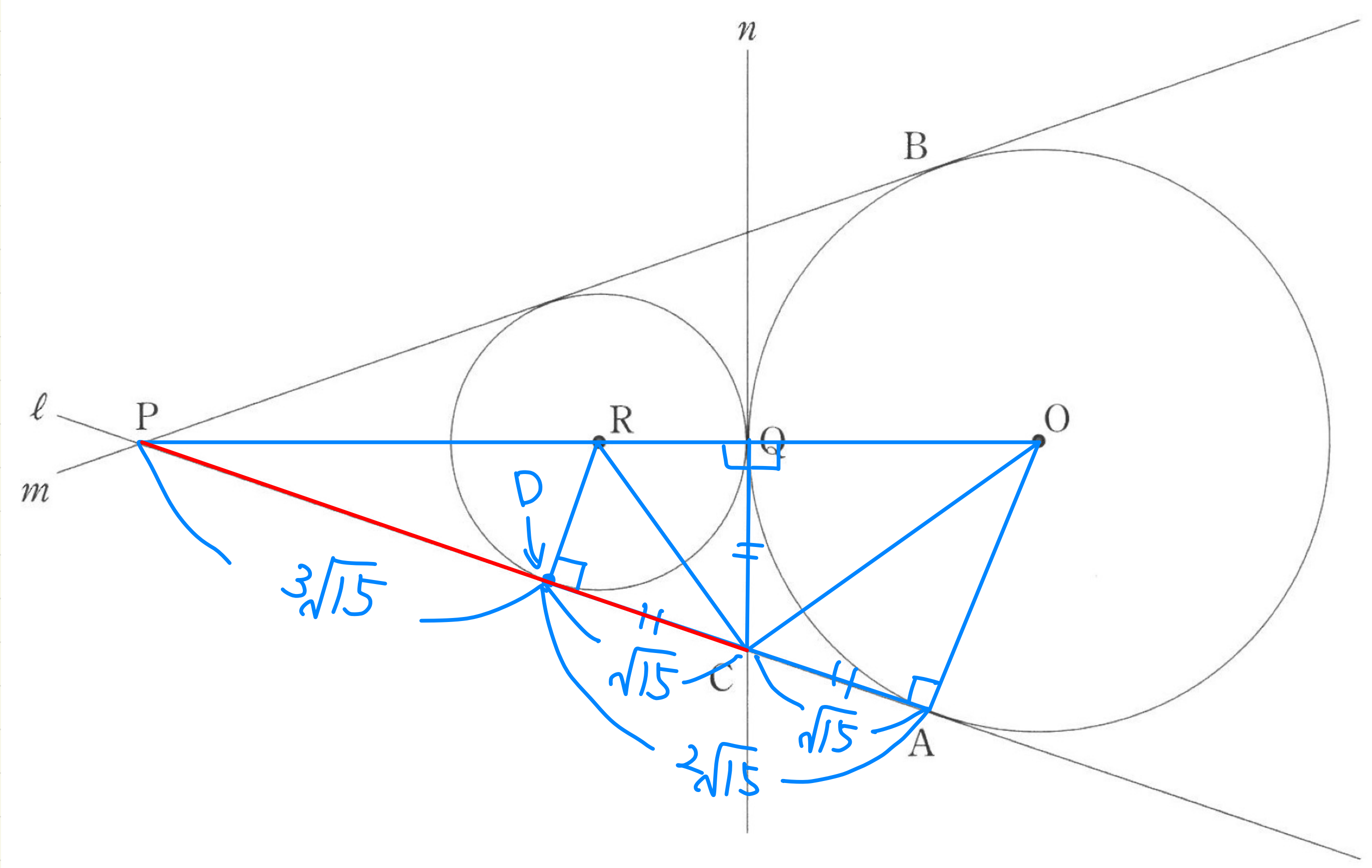
$\triangle OAC \equiv \triangle OQC$

対応する辺は等しいので，

$QC = AC$ —— ⑪

⑦, ⑪ より

$DC = AC$



よって Cは, DAの中点である。$DA = 2\sqrt{15}$ より

$DC = 2\sqrt{15} \div 2 = \sqrt{15}$

よって,

$$\begin{aligned} PC &= PD + DC \\ &= 3\sqrt{15} + \sqrt{15} \\ &= 4\sqrt{15}\ \text{cm} \end{aligned}$$