2022年度　栃木県
数学

kmkm

$\boxed{1}$

1. 与式 $= -2$

2. 与式 $= \dfrac{8}{12}a + \dfrac{3}{12}a$

$= \dfrac{11}{12}a$

3. 与式 $= x^2 + 9x + 20$

4. $2x^2 - 3x - 1$ は因数分解できないので、解の公式を用いる

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

参考

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ の解の公式は、

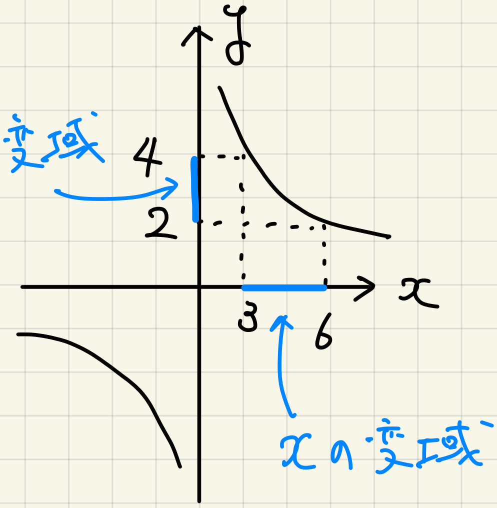
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. $x = 3$ のとき

$$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{3} = 4$$

$x = 6$ のとき

$$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{6} = 2$$



よって y の変域は $2 \leqq y \leqq 4$

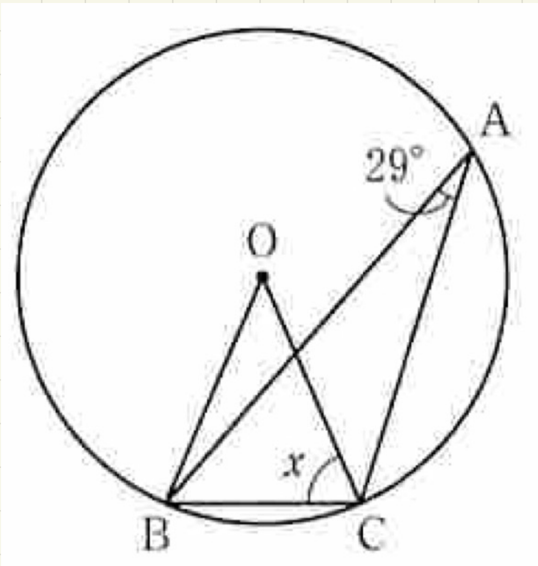
6. おうぎ形の弧の長さ $= 直径 \times \pi \times \dfrac{中心角}{360}$

$$= \underbrace{2 \times 9}_{直径} \times \pi \times \frac{60}{360}$$

$$= 18\pi \times \frac{1}{6}$$

$$= 3\pi \text{ cm}$$

7.



$\overset{\frown}{BC}$ に対して.

$\angle BAC$: 円周角

$\angle BOC$: 中心角

中心角 $= 2 \times$ 円周角より

$\angle BOC = 2 \times 29$

$= 58°$

△OBCにおいて,OB,OCは円Oの半径なので.

$$OB = OC$$

よって,△OBCは二等辺三角形。二等辺三角形は.底角が等しいので.

$$\angle OBC = \angle OCB = x$$

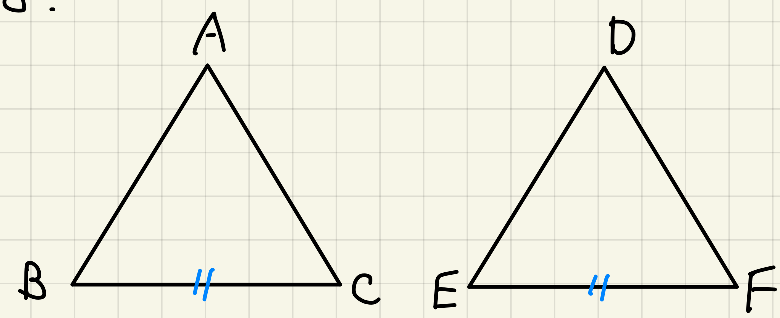
よって

$$58 + x + x = 180$$

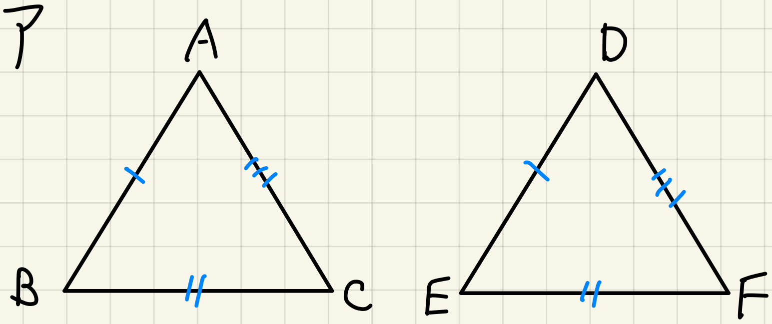
$$2x = 122$$

$$x = 61^\circ$$

8.

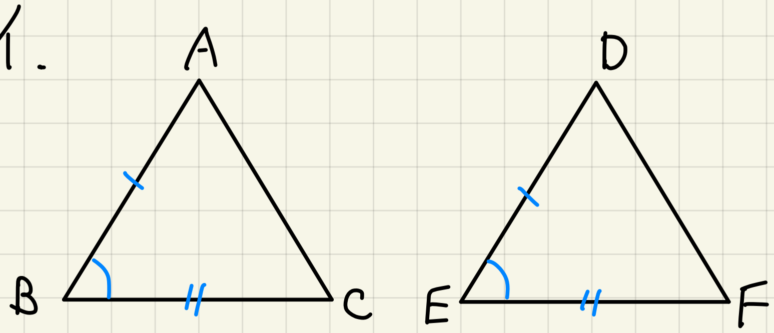


ア



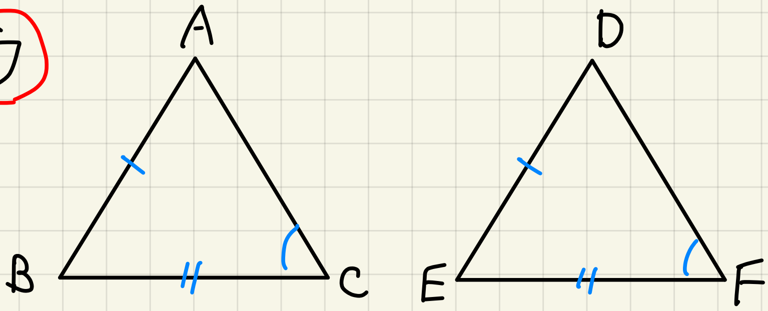
3辺がそれぞれ等しいので,常に成り立つ

イ.



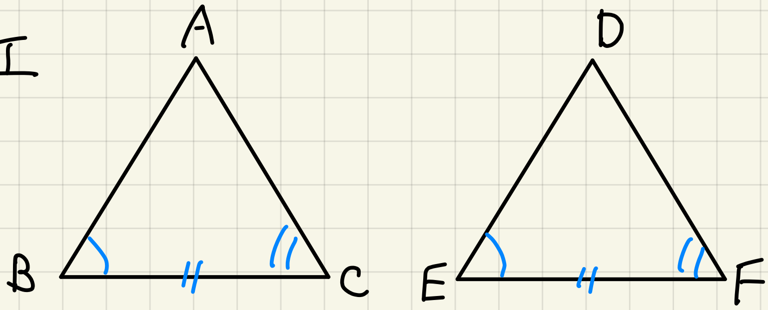
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので.常に成り立つ

ウ



三角形の合同条件に当てはまらないので、常に成り立つとは限らない

エ



1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので常に成り立つ

よって答えはウ

$\boxed{2}$

(1) $\sqrt{10-n} = 1, 2, 3, 4, \cdots$

となれば良い

$n=1 \Rightarrow \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$ ○

$n=2 \Rightarrow \sqrt{10-2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ×

$n=3 \Rightarrow \sqrt{10-3} = \sqrt{7}$ ×

$n=4 \Rightarrow \sqrt{10-4} = \sqrt{6}$ ×

$n=5 \Rightarrow \sqrt{10-5} = \sqrt{5}$ ×

$n=6 \Rightarrow \sqrt{10-6} = \sqrt{4} = 2$ ○

$n=7 \Rightarrow \sqrt{10-7} = \sqrt{3}$ ×

$n=8 \Rightarrow \sqrt{10-8} = \sqrt{2}$ ×

$n=9 \Rightarrow \sqrt{10-9} = \sqrt{1} = 1$ ○

$n=10 \Rightarrow \sqrt{10-10}=\sqrt{0}=0$ ×

0は正の整数でない

$n \geqq 11$ のとき、根号の中が負の数になるため、正の整数にならない。

よって、$n=1, 6, 9$

(別解)

$\sqrt{\bigcirc}$ が正の整数になるには、○が平方数となる必要がある。

1〜10 の中で平方数なのは、

$\underbrace{1}_{1^2}, \underbrace{4}_{2^2}, \underbrace{9}_{3^2}$

$\sqrt{10-n}=\sqrt{1^2}$ より $10-n=1^2$

$\sqrt{10-n}=\sqrt{2^2}$ より $10-n=2^2$

$\sqrt{10-n}=\sqrt{3^2}$ より $10-n=3^2$

よって

$10-n=1^2 \Rightarrow n=9$

$10-n=2^2 \Rightarrow n=6$

$10-n=3^2 \Rightarrow n=1$

よって、$n=1, 6, 9$

2. 大人1人の割引前の運賃を x 円

子ども1人の割引前の運賃を y 円

として連立方程式をつくる。

大人2人と子ども5人がロープウェイに乗車したところ、運賃の合計が3800円だったので

$$2x+5y=3800 \quad \text{—} \ ①$$

大人5人と子ども10人が同じロープウェイに乗車したところ，全員分の運賃が2割引となる

大人の2割引きの運賃は $\frac{8}{10}x$

子どもの2割引きの運賃は $\frac{8}{10}y$

団体割引が適用され，運賃の合計が6800円だったので

$$\frac{8}{10}x \times 5 + \frac{8}{10}y \times 10 = 6800 \quad \text{—— ②}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{10}x + \frac{80}{10}y = 6800$$

$4x + 8y = 6800$

$x + 2y = 1700$

$$\Rightarrow x + 2y = 1700 \quad \text{—— ③}$$

①，③より

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3800 & \text{—— ①} \\ x + 2y = 1700 & \text{—— ③} \end{cases}$$

① − ③ × 2 より

$$\begin{array}{rrrl} & 2x + 5y & = & 3800 \\ -) & 2x + 4y & = & 3400 \\ \hline & y & = & 400 \end{array}$$

$y = 400$ を③に代入して

$$x + 2 \times 400 = 1700$$

$x = 1700 - 800$

$$x = 900$$

よって 大人1人900円，子ども1人400円

3. $x^2-8x+2a+1=0$ —① に $x=3$ を代入すると

$$3^2-8\times3+2a+1=0$$
$$9-24+2a+1=0$$
$$2a-14=0$$
$$\therefore a=7$$

また、① に $a=7$ を代入すると

$$x^2-8x+2\times7+1=0$$
$$x^2-8x+15=0$$
$$(x-3)(x-5)=0$$
$$\therefore x=3,5$$

$x=3$ 以外の解なので、$x=5$

$\boxed{3}$

1. 大小2つのさいころの目の出方は

$$6\times6=36 \text{ 通り}$$

さいころの目の出方を(大きいさいころ, 小さいさいころ)と書くことにすると、積が25以上になるのは

$$(6,6),(6,5),(5,6),(5,5)$$

の4通り。したがって求める確率は

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

2.

$\times\frac{800}{50}$ キャップ 50個 ⟶ 赤が15個 $\times\frac{800}{50}$

キャップ 800個 ⟶ 赤が x個

$$\therefore\ x = 15 \times \frac{800}{50} = 240\ 個$$

3.

(1) 第1四分位数：下位データの中央値

第2四分位数：データ全体の中央値

第3四分位数：上位データの中央値

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
日数(日)	~~5~~	~~4~~	~~6~~	11	13	15	21	~~6~~	13	~~8~~	~~3~~	~~1~~

データを小さい順に並べると、

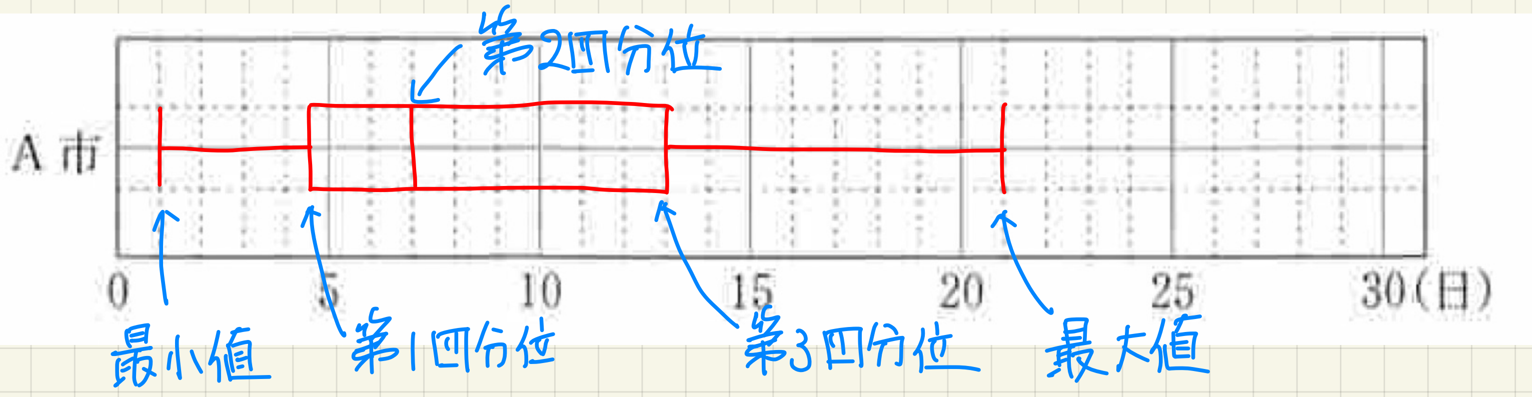
1, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 11, 13, 13, 15, 21

最小値　下位の中央値　中央値　上位の中央値　最大値

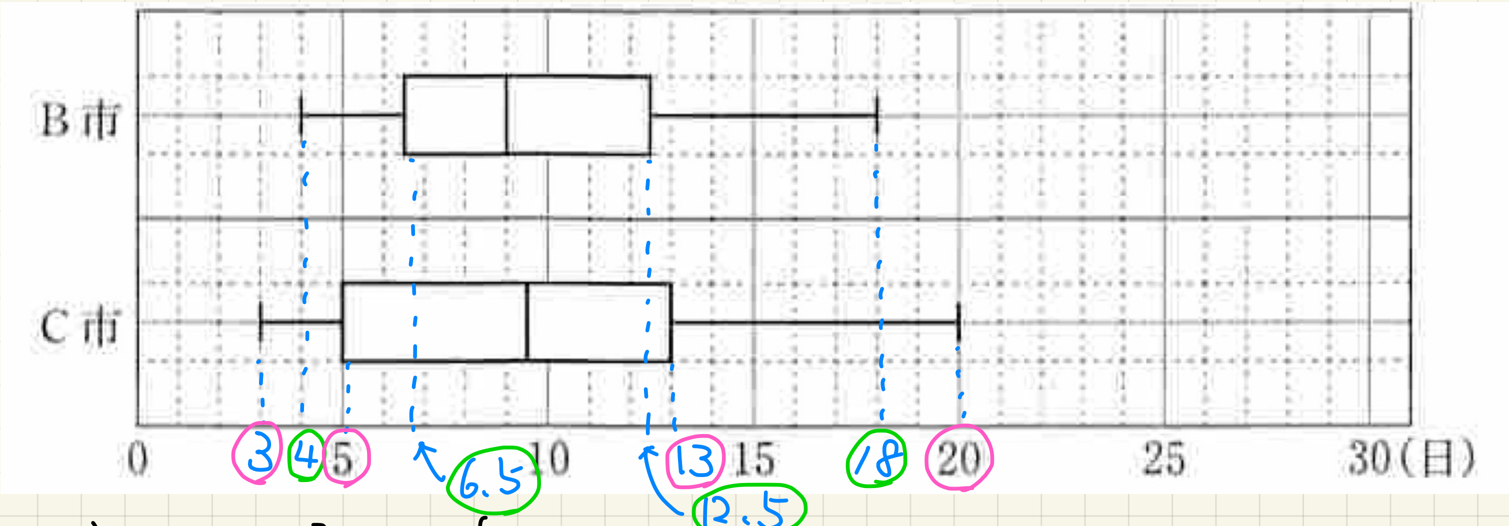
よって

第1四分位数：$\frac{4+5}{2} = 4.5$ 日

第2四分位数：$\frac{6+8}{2} = 7$ 日



(2)



B市とC市の範囲を比べると、

B市の範囲 : 18 − 4 = 14

C市の範囲 : 20 − 3 = 17

また、B市とC市の四分位範囲は、

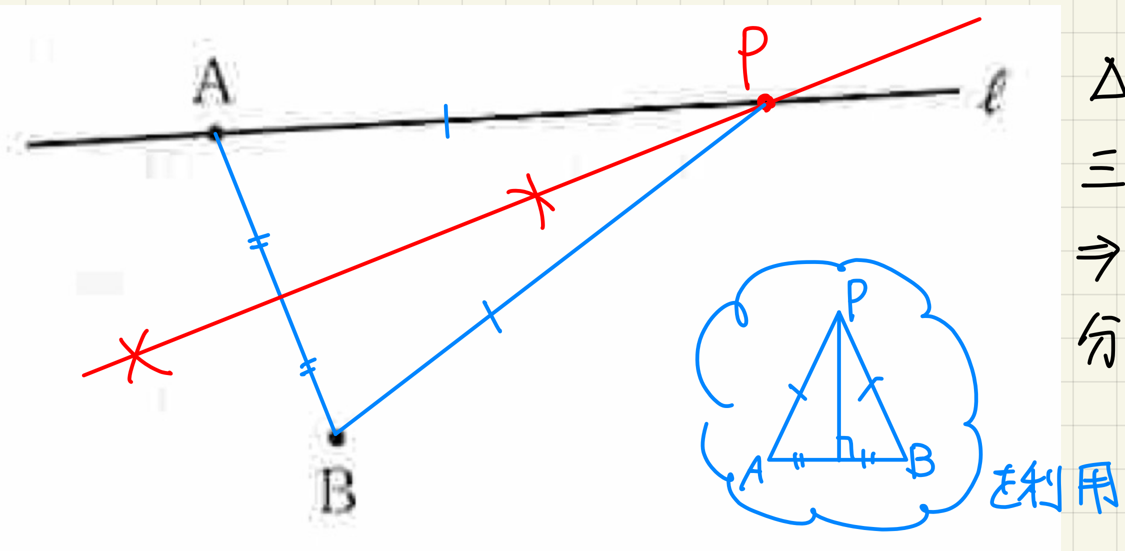
B市の四分位範囲 : 12.5 − 6.5 = 6

C市の四分位範囲 : 13 − 5 = 8

よってB市よりもC市の方が範囲も四分位範囲も大きいので、C市の方がデータの散らばりぐあいは大きい

4

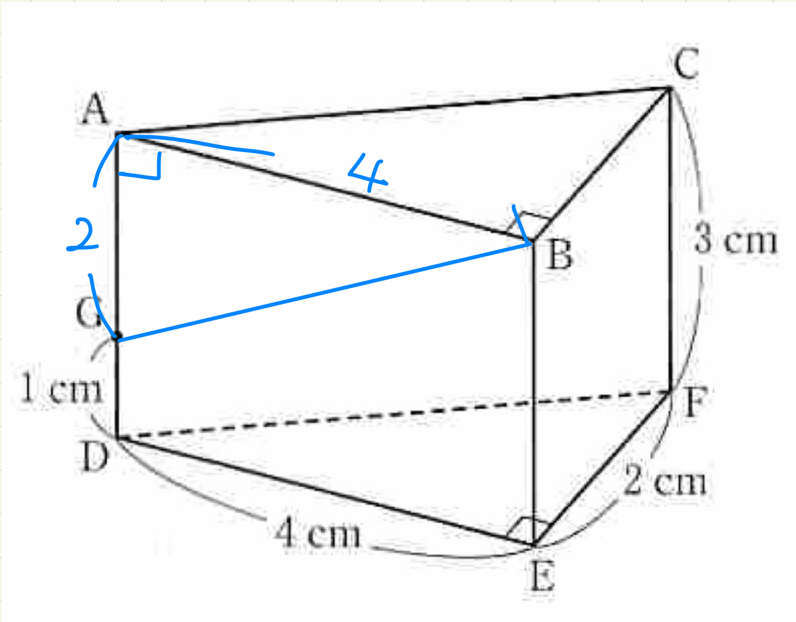
1.



△PABは二等辺三角形
⇒底辺の垂直二等分線が頂点P

2.

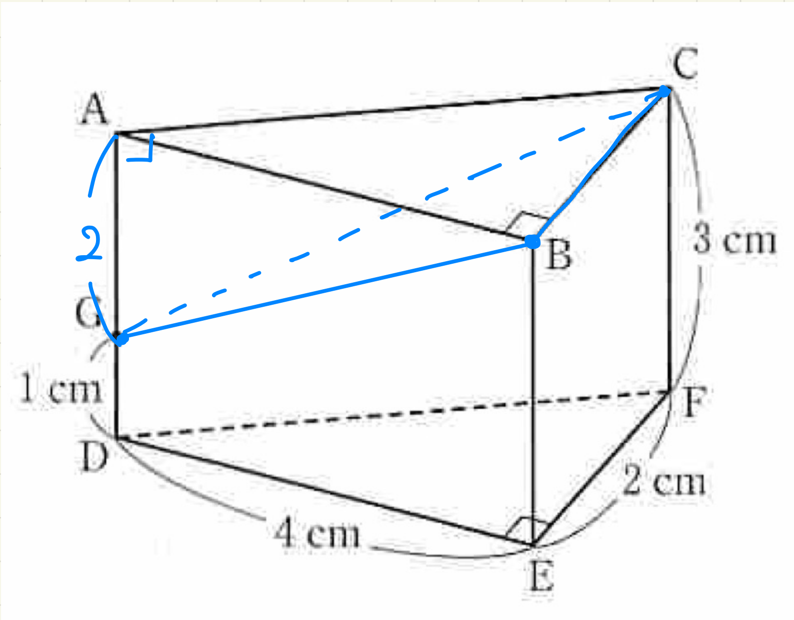
(1)



$\triangle ABG$で三平方の定理より

$$BG = \sqrt{4^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{16+4}$$
$$= \sqrt{20}$$
$$= 2\sqrt{5} \ \text{cm}$$

(2)



$\triangle ABC$を底面とすると、
$\triangle ABC \perp AG$より
三角すいの高さはAG

三角柱ABC-DFFの体積は

$$2 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 3 = 12 \ \text{cm}^3$$

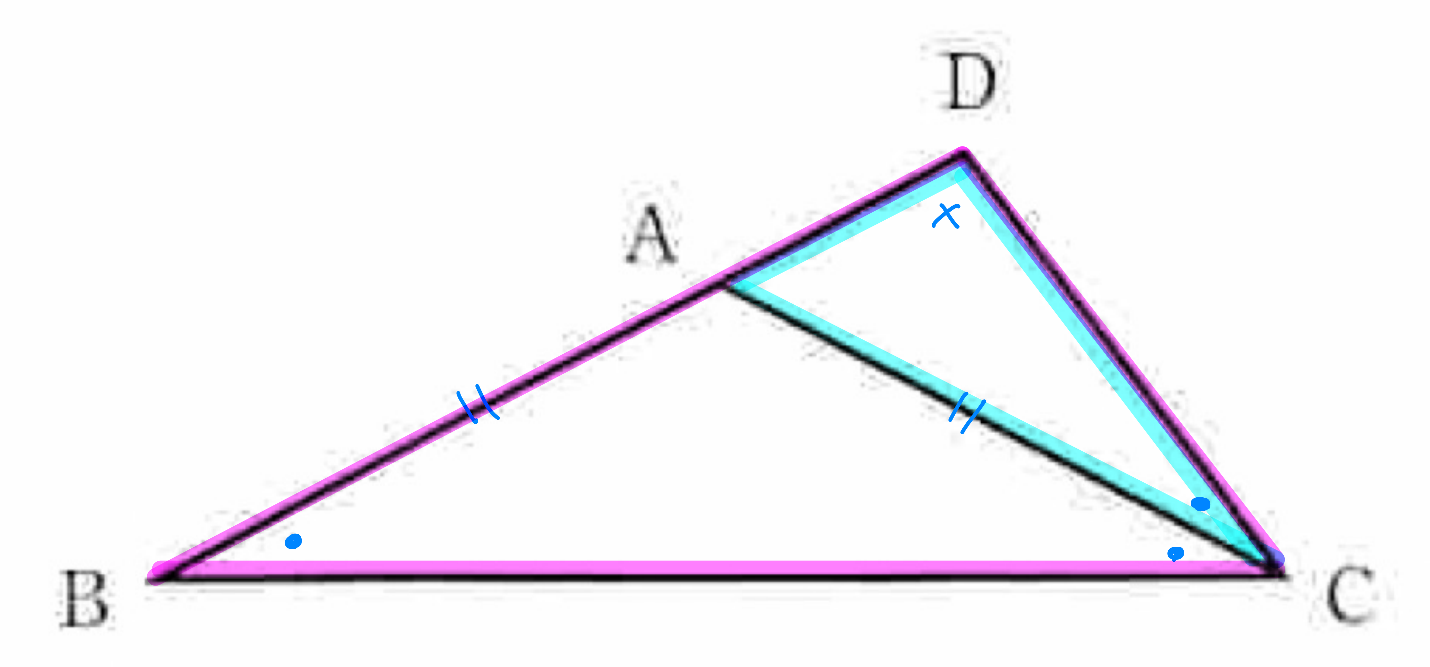
三角すいG-ABCの体積は

$$2 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \ \text{cm}^3$$

よって求める体積は

$$12 - \frac{8}{3} = \frac{36}{3} - \frac{8}{3} = \frac{28}{3} \ \text{cm}^3$$

3.

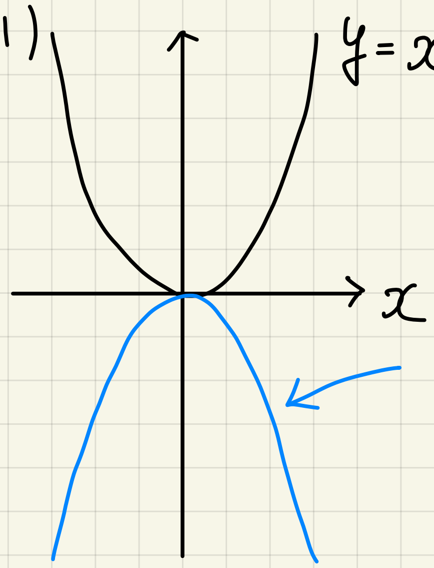


△ABCはAB＝ACの二等辺三角形なので、
底角が等しい。よって
　∠ACB＝∠ABC ―― ①

△DBCと△DCAにおいて
仮定より
　∠ACB＝∠ACD ―― ②
①, ②より
　∠DBC＝∠DCA ―― ③
共通な角は等しいので、
　∠BDC＝∠CDA ―― ④
③, ④より2組の角がそれぞれ等しいので
　△DBC ∽ △DCA （証明終わり）

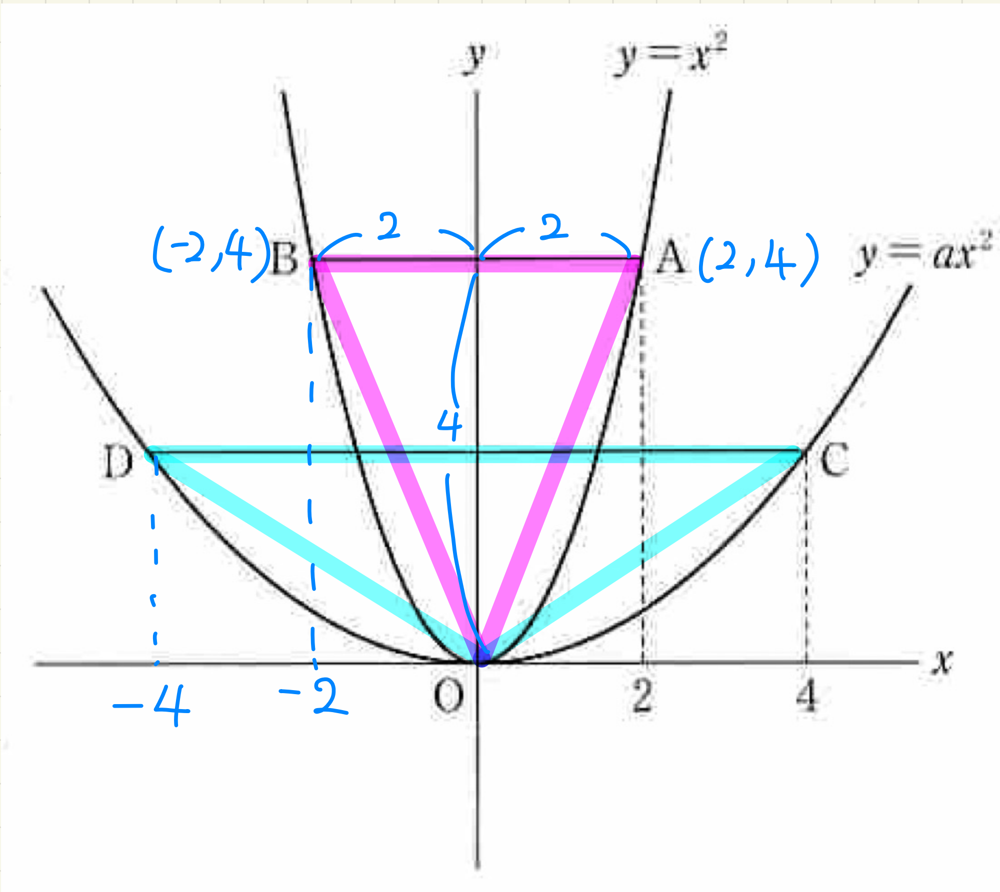
$\boxed{5}$

(1)



$y=x^2$ と x 軸で対称、
$\Rightarrow$ $y=-x^2$

(2)



点 A は $y=x^2$ のグラフ上にあり、$x=2$ なので、
$y=2^2=4$

点 B は、点 A について y 軸で対称なので、$x=-2$.
また、点 B は $y=x^2$ のグラフ上にあるので、
$y=(-2)^2=4$

よって △OABの面積は、

$$4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$$

したがって △OCDの面積が 8 になれば良い。

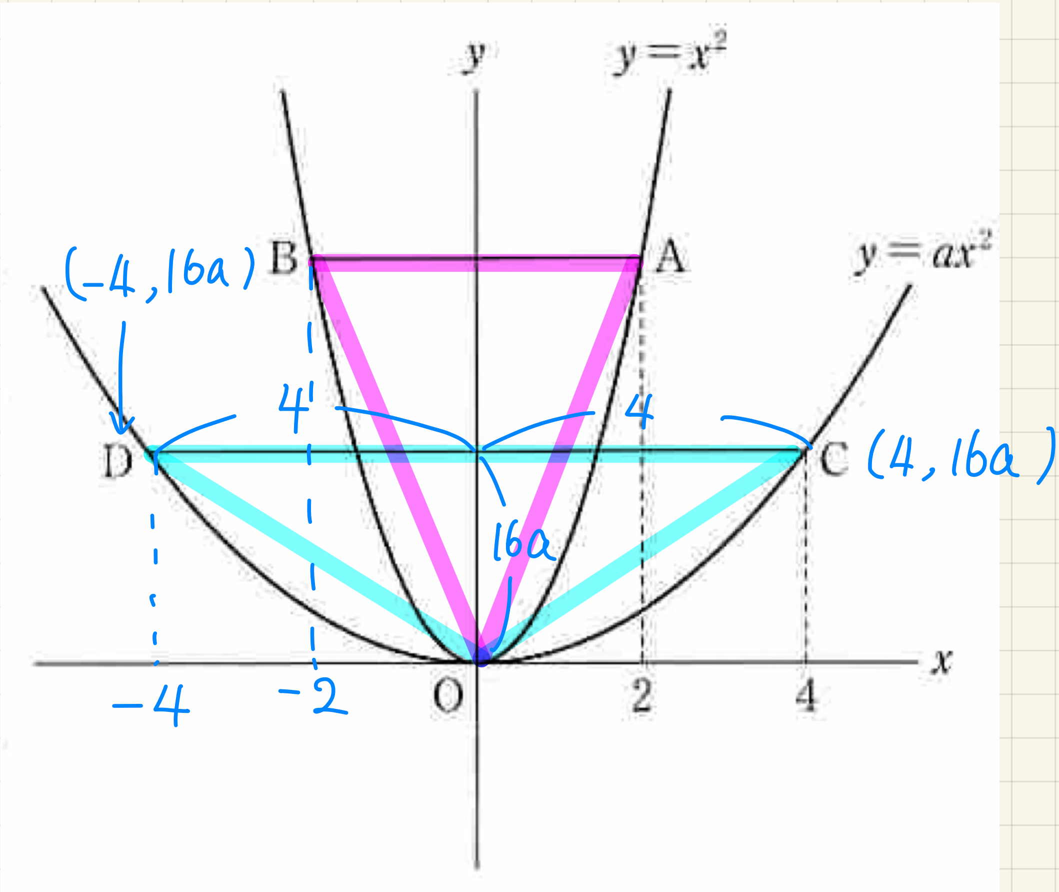
点Cは $y = ax^2$ のグラフ上にあり、$x = 4$ なので

$$y = a \times 4^2 = 16a$$

点Dは、点Cについて y軸で対称なので、$x = -4$.

また、点Dは $y = x^2$ のグラフ上にあるので、

$$y = a \times (-4)^2 = 16a.$$



よって △OCDの面積は、

$$8 \times 16a \times \frac{1}{2} = 64a$$

これが 8 になれば良いので

$$64a = 8 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

(別解)

△OAB の底辺 BA = 4, △OCD の底辺 CD = 8

よって底辺は2倍である。

面積が同じなので, 高さが $\frac{1}{2}$ となれば良い

したがって

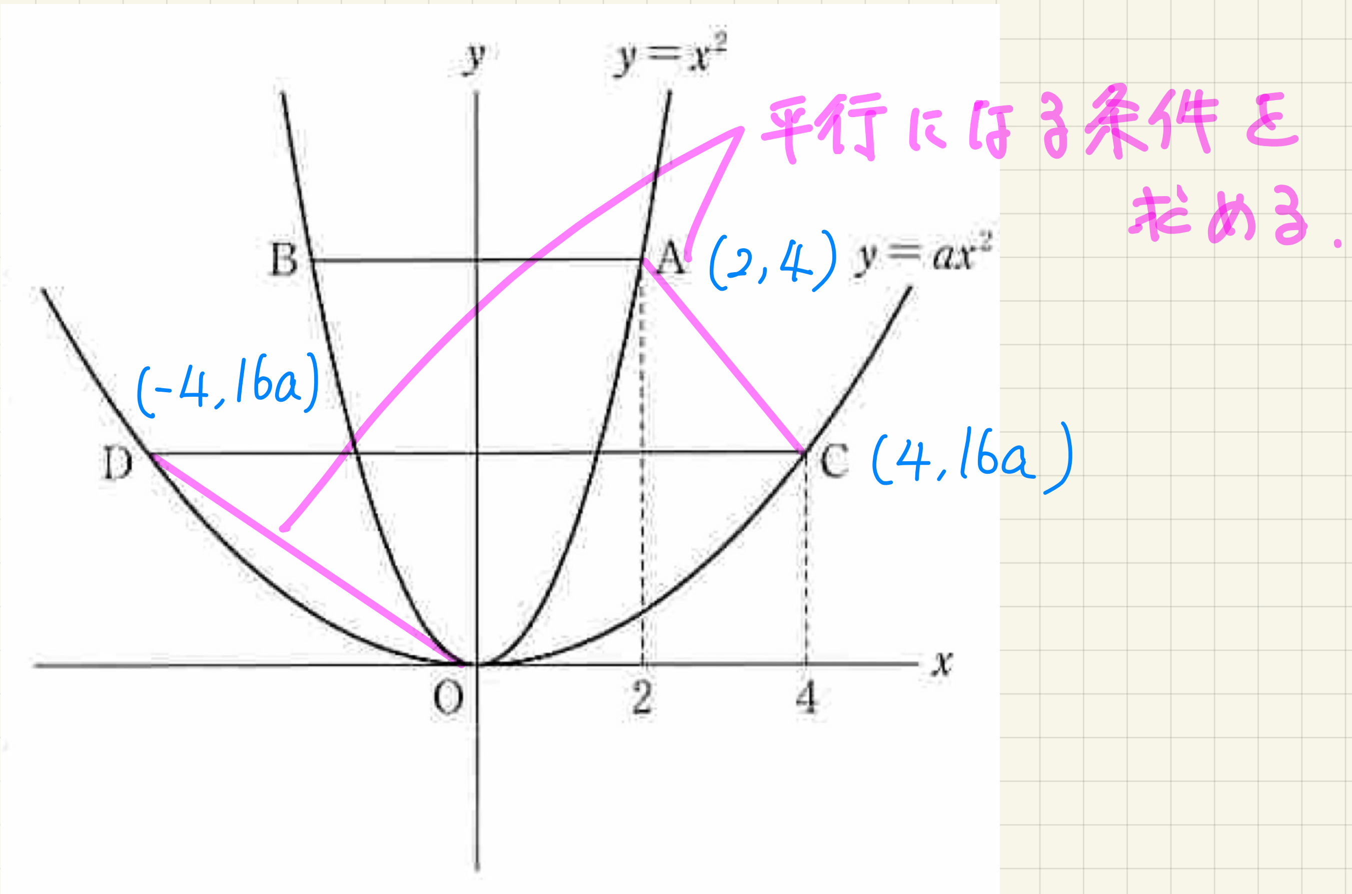
$$4 \times \frac{1}{2} = 16a \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

底辺が2倍

△OAB = △OCD

高さが $\frac{1}{2}$ 倍

(3)



AC // DO より、直線ACと直線DOの傾きが等しくなれば良い。

また、1次関数では、傾きと変化の割合は一致する。

$$\text{傾き} = \text{変化の割合} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

点A(2, 4)、点B(4, 16a)、点C(−4, 16a)より

$$\text{直線ACの傾き} = \frac{16a-4}{4-2} = 8a-2$$

$$\text{直線DOの傾き} = \frac{0-16a}{0-(-4)} = -4a$$

したがって

$$8a - 2 = -4a$$

$$12a = 2$$

$$a = \frac{1}{6}$$

aは、$0 < a < 1$ より $a = \frac{1}{6}$ は適する。

※ $a = 3$ であれば $0 < a < 1$ を満たさないので適さない。

2.

(1)

会社	基本料金	電力量料金（1 kWh あたり）	
A	2400 円	0 kWh から 200 kWh まで	22 円
		200 kWh を超えた分	28 円
B	3000 円	0 kWh から 200 kWh まで	20 円
		200 kWh を超えた分	24 円

B社の料金プランで、200kWhを使用したとき、
1kWhあたり20円なので、

$$\underbrace{3000}_{\text{基本料金}} + \underbrace{200}_{\text{電力量}} \times \underbrace{20}_{\text{料金}} = 7000\text{円}$$

電気料金が9400円なので、使用した電力量は、
200kWhを超える。
使用した電力量をx kWhとすると、200kWhを
超えた電力量は、

$$x - 200 \quad \text{kWh}$$

と表すことができる。したがって

$$\underbrace{3000}_{\text{基本料金}} + \underbrace{200 \times 20}_{\text{200kWhまでの料金}} + \underbrace{(x-200) \times 24}_{\text{200kWhを超えた料金}} = 9400$$

式を整理すると、

$$3000 + 4000 + 24x - 4800 = 9400$$

$$24x = 7200$$

$$x = 300$$

よって、電気使用量は 300 kWh

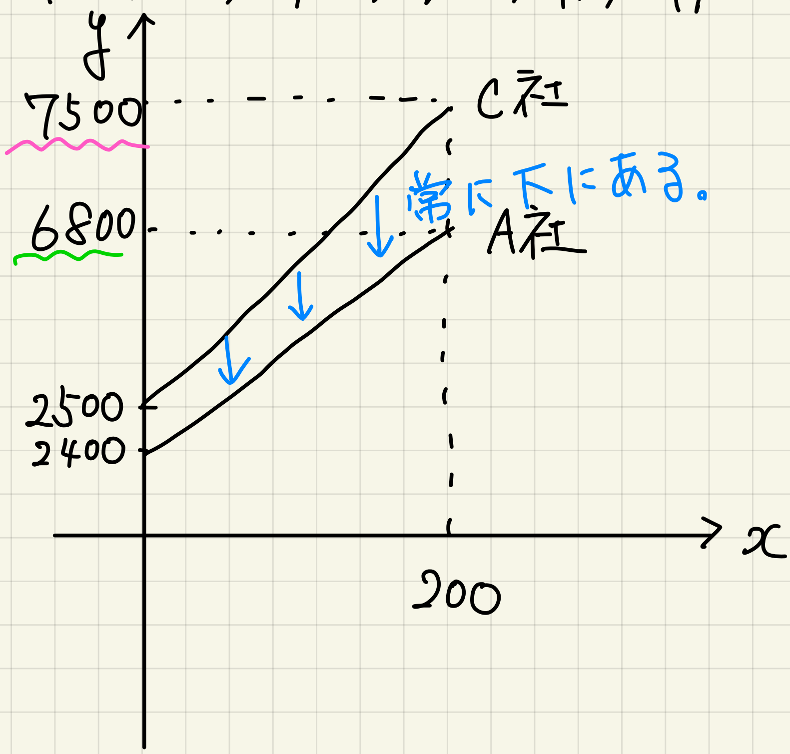
(2) 電気使用量 x kWh, 電気料金 y 円より
A社の料金プランは

$$y = \underbrace{2400}_{\text{基本料金}} + \underbrace{200 \times 22}_{\text{200kWhまでの料金}} + \underbrace{(x-200) \times 28}_{\text{200kWhを超えた料金}}$$

式を整理すると.

$$y = 2400 + 4400 + 28x - 5600$$
$$= 28x + 1200$$

(3) $0 \leqq x \leqq 200$ のとき.
A社の電気料金は.
$$y = 22x + 2400$$
C社の電気料金は
$$y = 25x + 2500$$
したがって, グラフの形状は以下の通り



A社で200kWh使用
$\Rightarrow 22 \times 200 + 2400$
$= 6800$

C社で200kWh使用
$\Rightarrow 25 \times 200 + 2500$
$= 7500$

$x \geqq 200$ のとき、

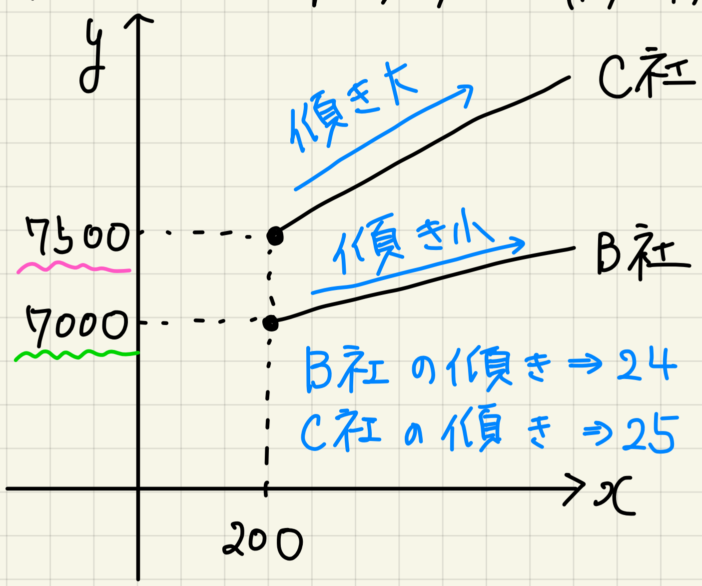
B社の電気料金は、

$$y = 3000 + 200 \times 20 + (x-200) \times 24$$
$$= 3000 + 4000 + 24x - 4800$$
$$= 24x + 2200$$

C社の電気料金は、

$$y = 2500 + x \times 25$$
$$= 25x + 2500$$

したがって、グラフの形状は以下の通り



B社で200kWh使用

$\Rightarrow 24 \times 200 + 2200$

$= 7000$

C社で200kWh使用

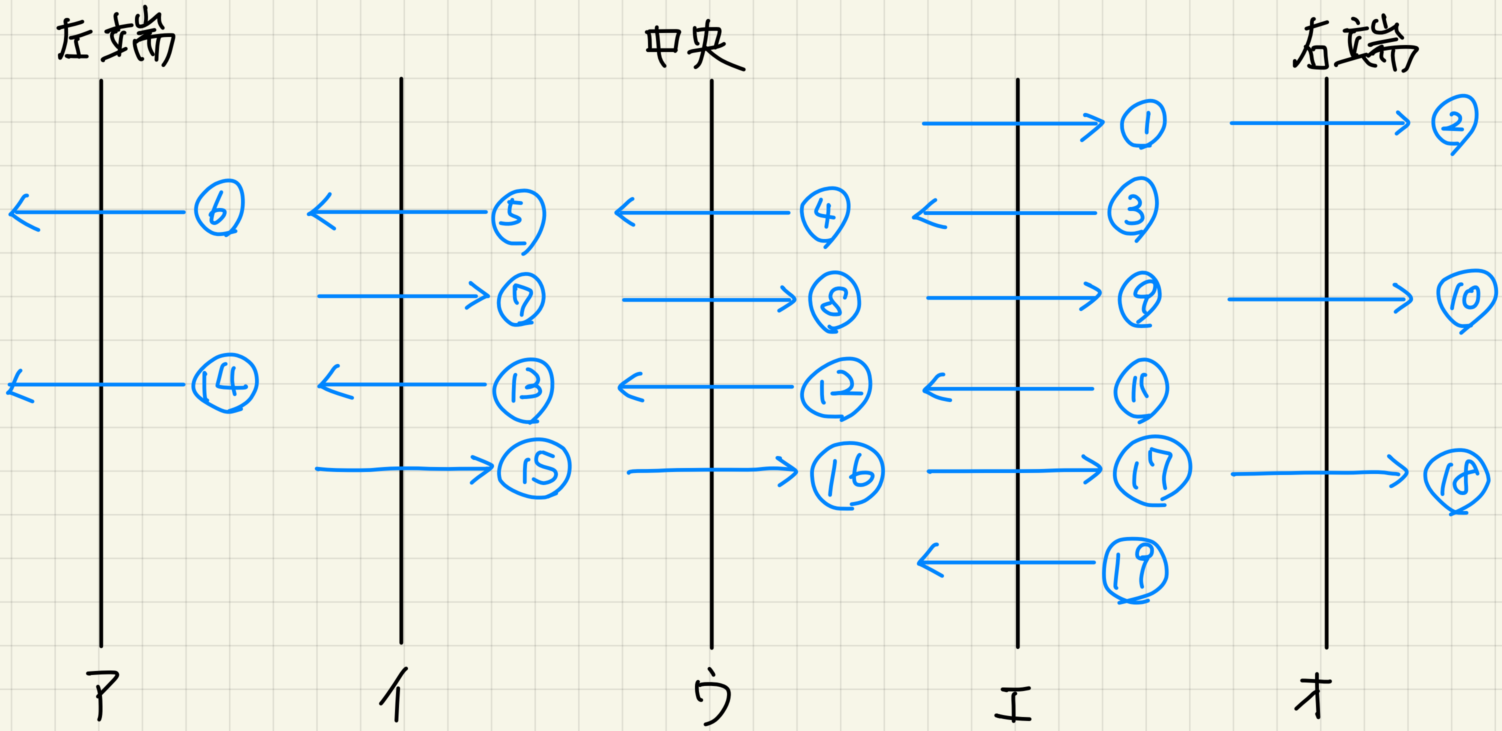
$\Rightarrow 25 \times 200 + 2500$

$= 7500$

よって、B社の通る点(200, 7000)は、C社の通る点(200, 7500)よりも下にあり、B社のグラフの傾きは24は、C社のグラフの傾きは25より小さいので、B社のグラフは、C社のグラフより下側にあり、B社の方が安い。

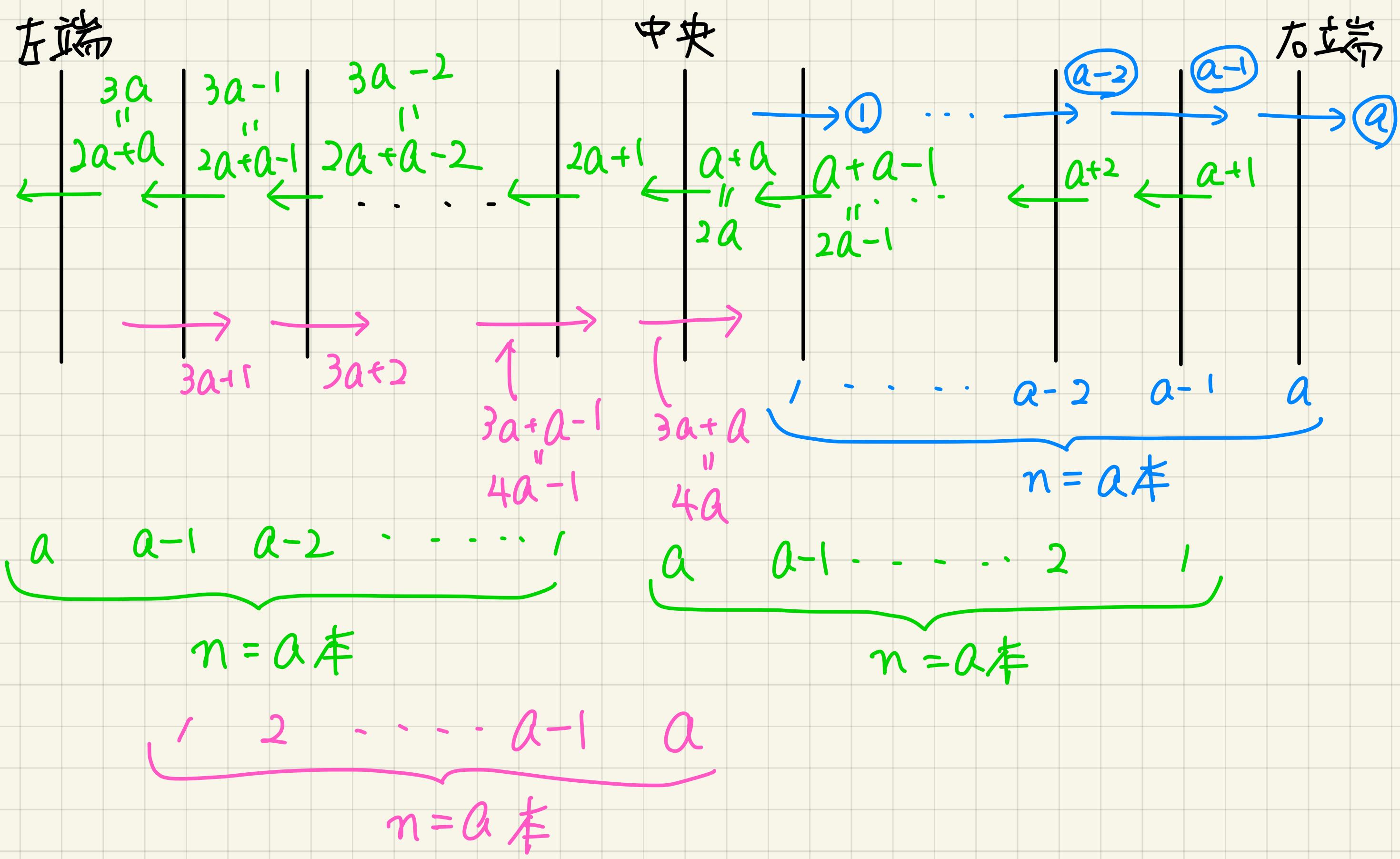
$\boxed{6}$

1.

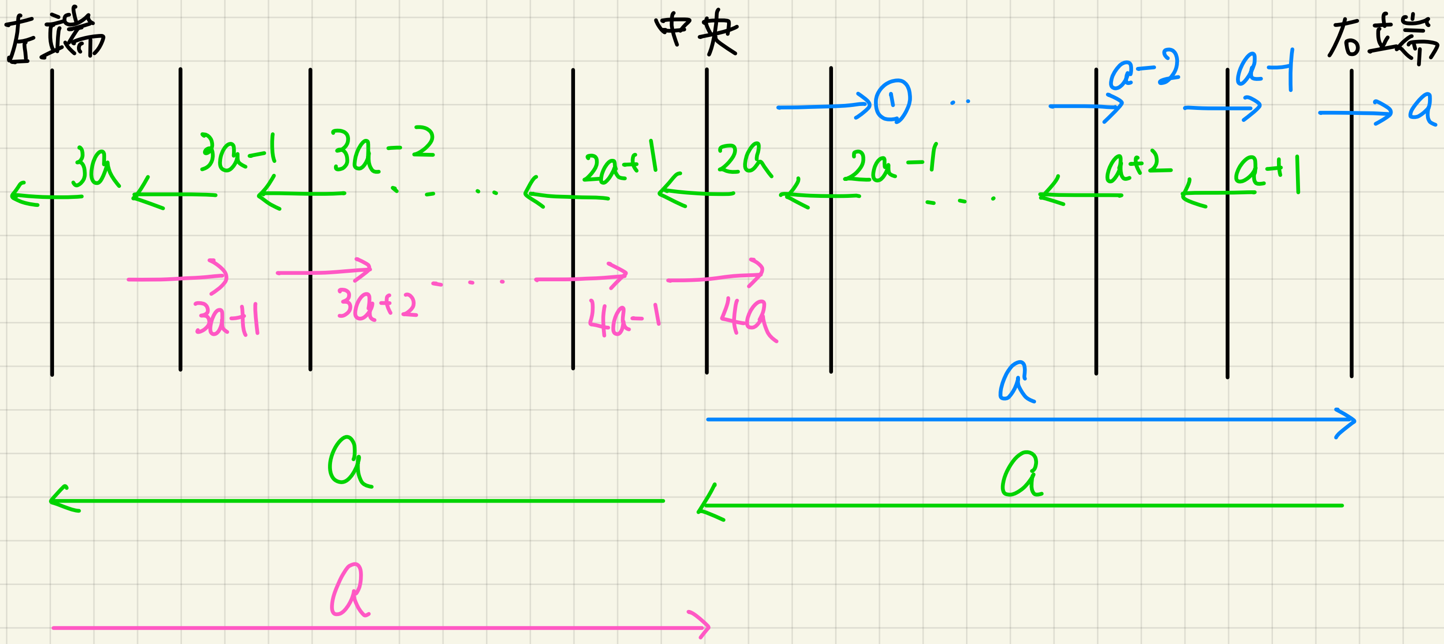


よって、全体の回数が19回目のときにまたいでいる線はエで、エをまたいでいるのは6回．

2



整理すると、

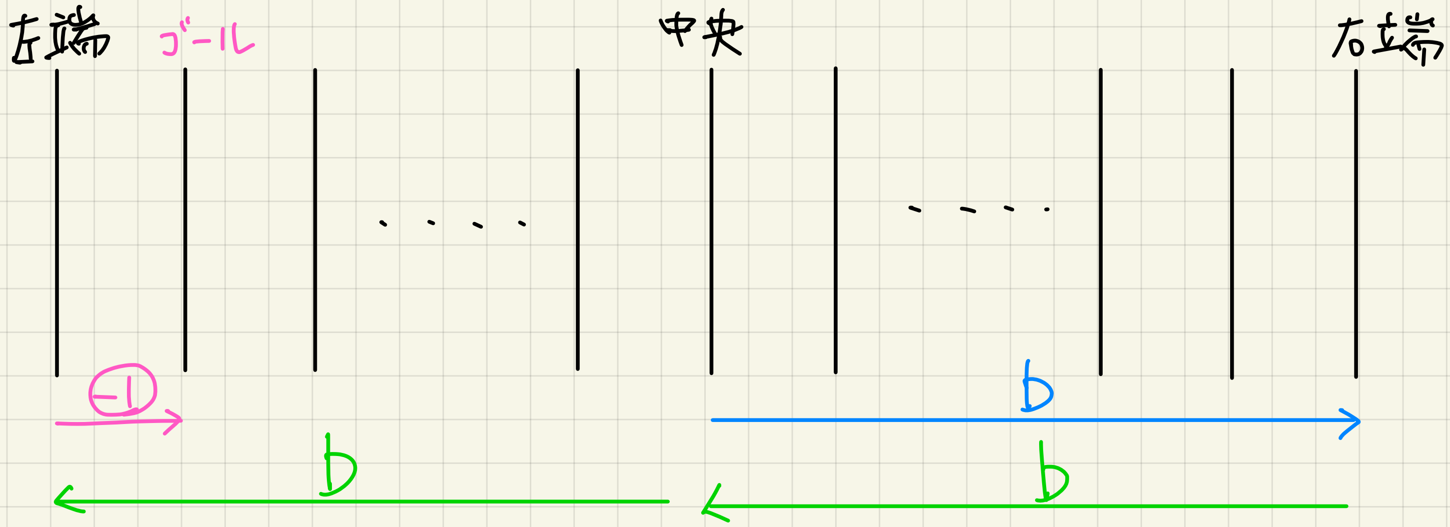


よって、1往復で $a + a + a + a = 4a$ 回なので、
3往復では

$$4a \times 3 = 12a \text{ 回}$$

3.

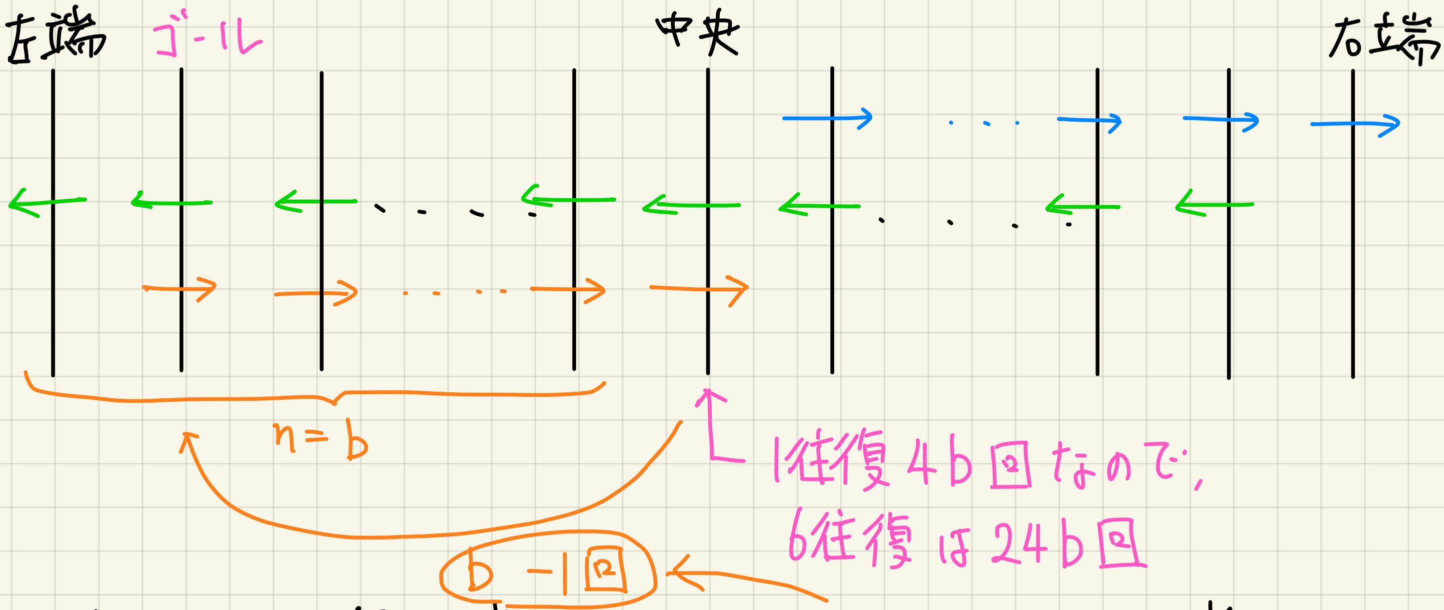
I　$n = b$ のとき



図より

$$b + b + b - 1 = 3b - 1 \text{ 回}$$

Ⅱ 難問



全体の往復回数を求め,行きすぎた回数を引く.

左端,右端以外は、1往復で2回またぐ。
よって,
左端から2番目を12回またぐ ⇒ $12 \div 2 = 6$ 往復

6往復の全体の回数は、2.より1往復が 4b 回
なので,$4b \times 6 = 24b$ 回

左から2番目は 24b 回より $b-1$ 回行きすぎるので,
$24b - (b-1) = 23b+1$ 回

これがⅠの $3b-1$ の8倍と等しくなるので.

$$8(3b-1) = 23b+1$$

$$24b - 8 = 23b+1$$

$$b = 9$$