# 2022年度　東京都

数学

kmkm

$\boxed{1}$

問1　与式 $= 1 - 36 \times \frac{2}{9}$

$= 1 - 8$

$= -7$

問2　与式 $= \frac{6a+2b}{8} - \frac{a-7b}{8}$

$= \frac{6a+2b-a+7b}{8}$

$= \frac{5a+9b}{8}$

問3　与式 $= 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2$

$= 4 + 4\sqrt{6} + 6$

$= 10 + 4\sqrt{6}$

問4　式を整理すると、

$5x - 7 = 9x - 27$

$5x - 9x = -27 + 7$

$-4x = -20$

$x = 5$

問5

$$\begin{cases} x = 4y + 1 & \text{— ①} \\ 2x - 5y = 8 & \text{— ②} \end{cases}$$

①を②に代入して

$$2(4y+1) - 5y = 8$$
$$8y + 2 - 5y = 8$$
$$3y = 6$$
$$y = 2$$

$y=2$を①に代入して

$$x = 4 \times 2 + 1$$
$$= 8 + 1$$
$$= 9$$

よって $x = 9, y = 2$

問6　$4x^2 + 6x - 1$ は因数分解できないので、解の公式を用いる。

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{8}$$

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{8}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}$$

分子・分母を2で割る

参考

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ の解の公式は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

# 問7

中央値：データを小さい順に並べたときの
真ん中の値

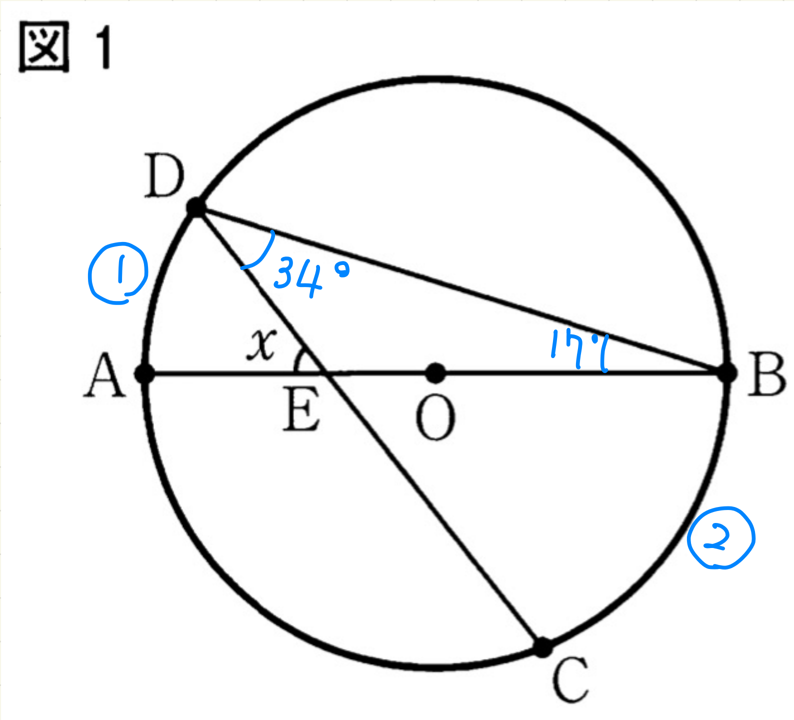
データを小さい順に並べると、

中央値

0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4,
4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10

よって、中央値は 4

# 問8




$\overset{\frown}{BC} = 2\overset{\frown}{AD}$ より

$\angle BDC = 2\angle ABD$

34°

よって

$\angle ABD = \frac{1}{2}\angle BDC$

$= \frac{1}{2} \times 34 = 17°$

$\angle x$ は $\triangle BDE$ の外角の1つなので、

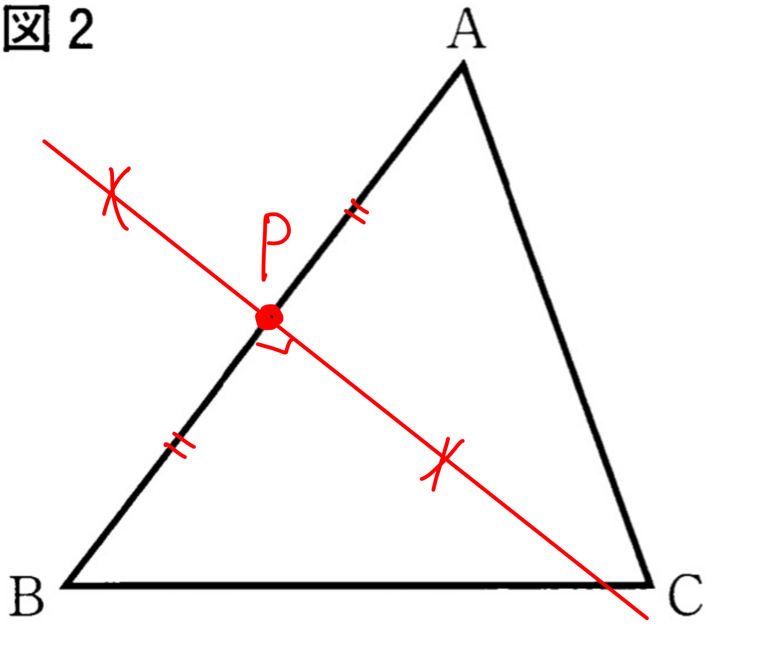
$\angle x = \angle BDE + \angle EBD$

$= 34 + 17$

$= 51°$

問9

図2




$\triangle ACP = \triangle BCP$
$\triangle ACP$の底辺を$AP$,
$\triangle BCP$の底辺を$BP$
とすると，高さは等しいので，
$AP = CP$ となれば良い。
⇒ $AB$の垂直二等分線を作図し，$AB$との交点が$P$となる。

$\boxed{2}$

問1　$P = 78$ で，$Q$ は $P$ の一の位から十の位を引いた数なので

$$Q = 8 - 7 = 1$$

よって

$$P - Q = 78 - 1 = 77 \text{ —— ①}$$

また，$P = 41$ のとき

$$Q = 1 - 4 = -3$$

よって

$$P - Q = 41 - (-3) = 44 \text{ —— ②}$$

求める値は ① − ② なので

$$77 - 44 = 33$$

問2

Xの百の位がa，十の位がb，一の位がcより

$X = 100a + 10b + c$.

問題文から

$Y = c - b + a$

よって，

$X - Y = 100a + 10b + c - (c - b + a)$

$= 100a + 10b + c - c + b - a$

$= 99a + 11b$

$= 11(9a + b)$

a，bは整数なので，9a+bも整数，よって，

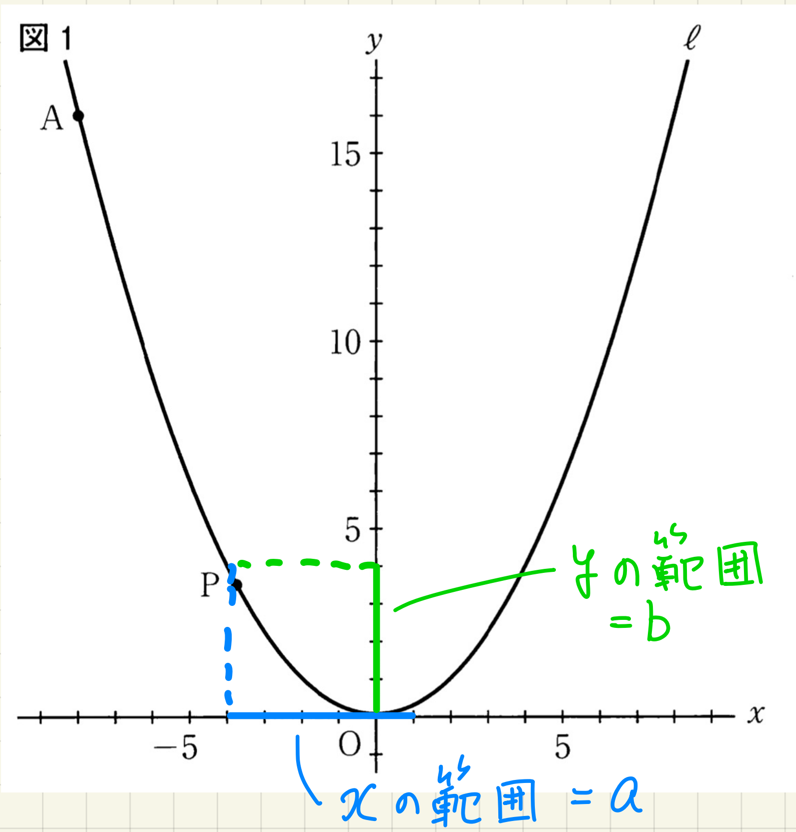
11(9a+b)は11の倍数である。

したがって，X−Yの値は11の倍数になる

（証明終わり）

$\boxed{3}$

問1




$x = -4$ のとき，

$y = \frac{1}{4} \times (-4)^2$

$= 4$

ℓは下に凸のグラフなので，

bのとりうる範囲は，

$0 \leqq b \leqq 4$

①ラ　②キ

問2

点Aは $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあり $x=-8$ なので、

$$y=\frac{1}{4}\times(-8)^2 \quad \frac{1}{4}\times 64$$

$$=16$$

点Pは $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあり、$x=2$ なので、

$$y=\frac{1}{4}\times 2^2 \quad \frac{1}{4}\times 4$$

$$=1$$

よって直線APは A$(-8,16)$, P$(2,1)$ を通る。

求める直線の式を $y=ax+b$ とすると、

$$\begin{cases} 16=-8a+b & \text{——①} \\ 1=2a+b & \text{——②} \end{cases}$$

①−②より

$$15=-10a \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

$a=-\frac{3}{2}$ を②に代入して、

$$1=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+b$$

$$1=-3+b \Rightarrow b=4$$

よって求める直線の式は、

$$y=-\frac{3}{2}x+4$$

③ア　　④エ

(別解)

点A(−8, 16), 点P(2, 1)より. 変化の割合は.

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{1-16}{2-(-8)}$$

$$= \frac{-15}{10}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

1次関数では. 変化の割合 = 傾きなので, 求める直線の式は.

$$y = -\frac{3}{2}x + b$$

これが点P(2, 1)を通るので.

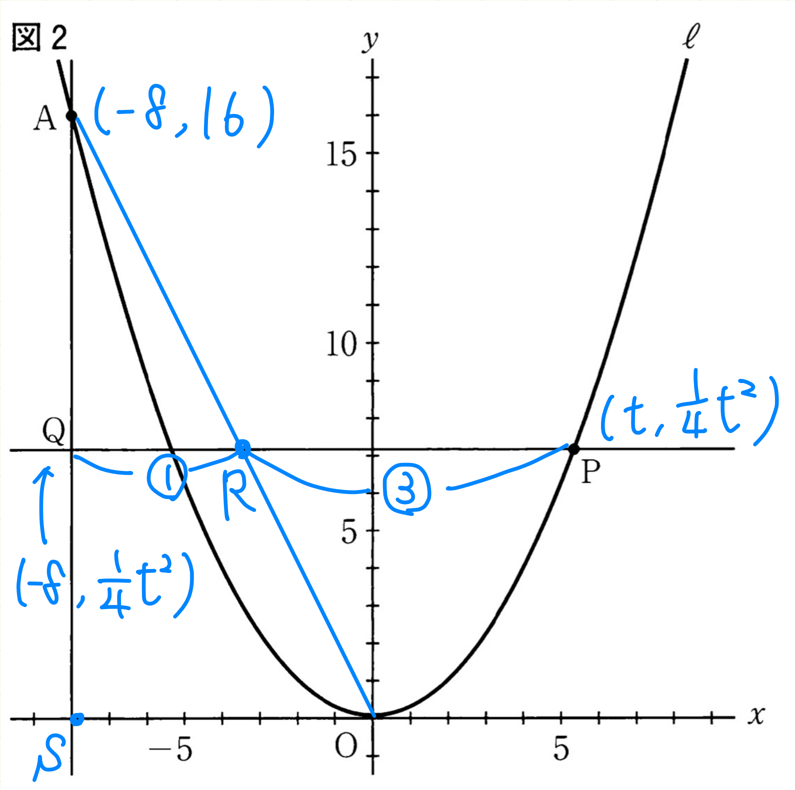
$$1 = -\frac{3}{2} \times 2 + b$$

$$1 = -3 + b \Rightarrow b = 4$$

よって, 求める直線の式は.

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

# 問3




点Pのx座標をtとする。
点Pは、$y=\frac{1}{4}x^2$のグラフ上にあるので

$$y=\frac{1}{4}t^2$$

点Qと点Aのx座標は同じで、PQとx軸が平行なので、点Qと点Pのy座標は同じ。

よって、点Q $(\underbrace{-8}_{\text{点Aのx座標}}, \underbrace{\frac{1}{4}t^2}_{\text{点Pのy座標}})$

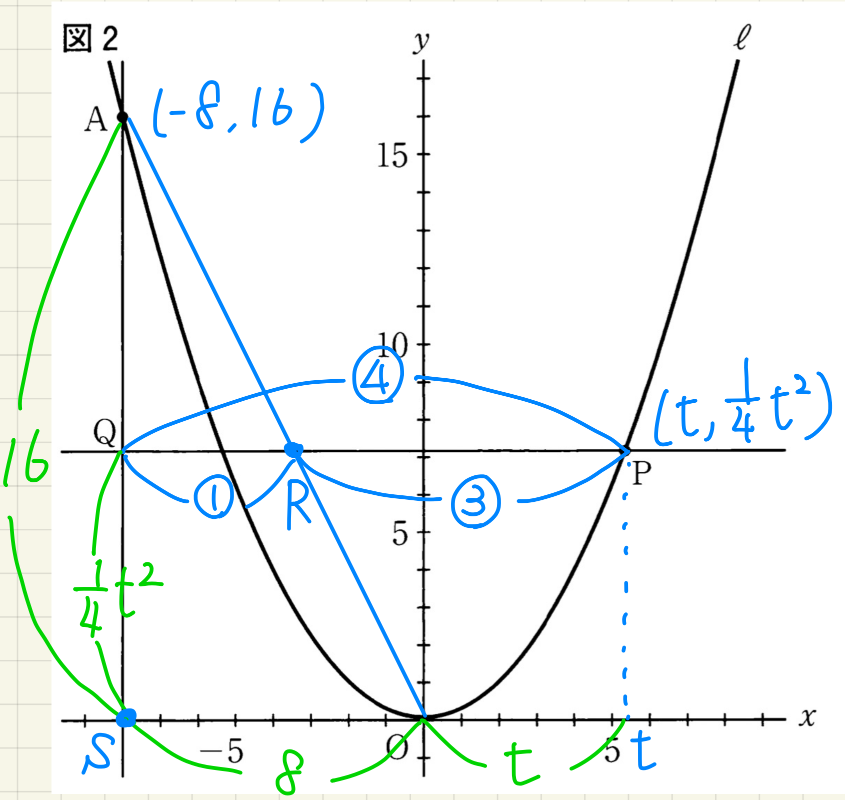
(-8, 0)の点をSとする。
△AQRと△ASOについて、QR∥SOより、
同位角が等しいので、

$\angle AQR = \angle ASO$ —— ①

$\angle ARQ = \angle AOS$ —— ②

①, ②より2組の角がそれぞれ等しいので、

△AQR ∽ △ASO




各点の座標より

$$AQ = 16 - \frac{1}{4}t^2$$

よって、対応する辺の比は等しいので、

$$QR : \underbrace{SO}_{8} = \underbrace{AQ}_{16-\frac{1}{4}t^2} : \underbrace{AS}_{16}$$

よって、

$$16QR = 8\left(16 - \frac{1}{4}t^2\right)$$

$$QR = \frac{8}{16}\left(16 - \frac{1}{4}t^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(16 - \frac{1}{4}t^2\right)$$

$$= -\frac{1}{8}t^2 + 8$$

PR : RQ = 3 : 1 で、QP = PR + RQ より

$$QP = 4QR$$

$$= 4\left(-\frac{1}{8}t^2 + 8\right)$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + 32. \quad —— ③$$

一方，点Pの$x$座標は$t$，点Qの$x$座標は$-8$なので，QPの長さは

$$QP = t-(-8)$$
$$= t+8 \quad —— ④$$

③，④は同じQPの長さを表しているので，等しい。
よって

$$-\frac{1}{2}t^2+32 = t+8$$

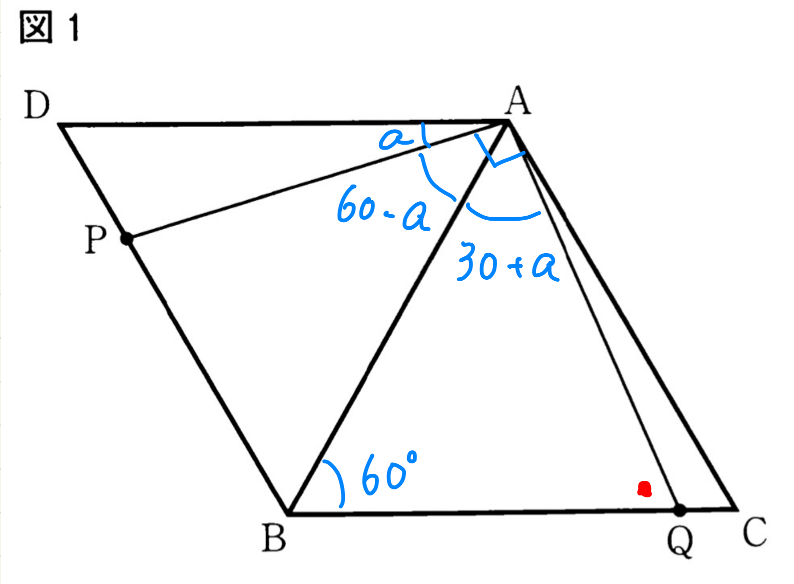
両辺に2をかけて整理

$$t^2+2t-48=0$$
$$(t-6)(t+8)=0$$
$$t=6,\ -8 \quad \cdots \text{点Pの}x\text{座標}$$

問題文より点Pの$x$座標は0より大きく8より小さいので，求める$x$座標は6

4

問1




△ABDは正三角形なので,

$\angle DAB = 60°$

よって

$\angle PAB = 60° - a$

また,△ABCは正三角形なので

$\angle ABC = 60°$

$\angle PAQ = 90°$, $\angle PAB = 60° - a$ より

$\angle BAQ = 90° - (60° - a)$

$= 30° + a$

△ABQで,三角形の内角の和は180°なので,

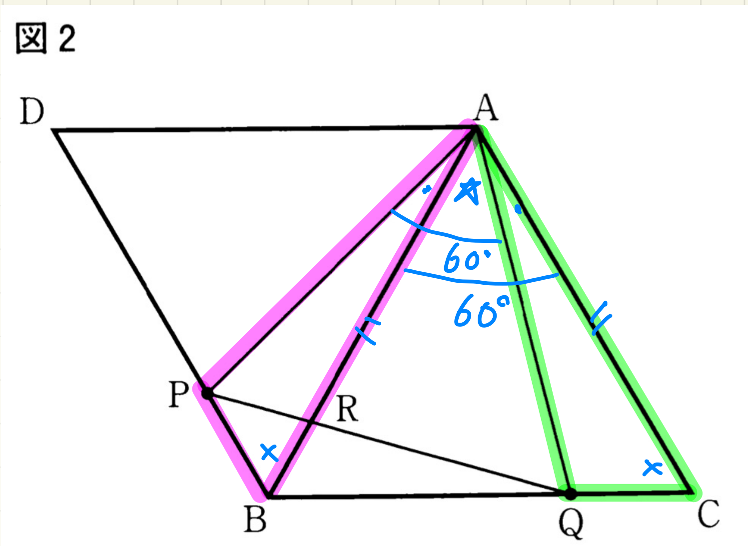
$\angle AQB = 180° - (30° + a + 60°)$

$= 180° - 30° - a - 60°$

$= 90° - a$ (イ)

問2

①



△ABPと△ACQにおいて,
仮定から△ABCと△ABDはともに正三角形なので,

$AB = AC$ — ①

$\angle ABP = \angle ACQ = 60°$ — ②

仮定から$\angle PAQ = 60°$なので,

$\angle BAP = \angle PAQ - \angle BAQ$

$= 60° - \angle BAQ$ — ③

△ABCは正三角形なので, $\angle BAC = 60°$。よって.

$\angle CAQ = \angle BAC - \angle BAQ$

$= 60° - \angle BAQ$ — ④

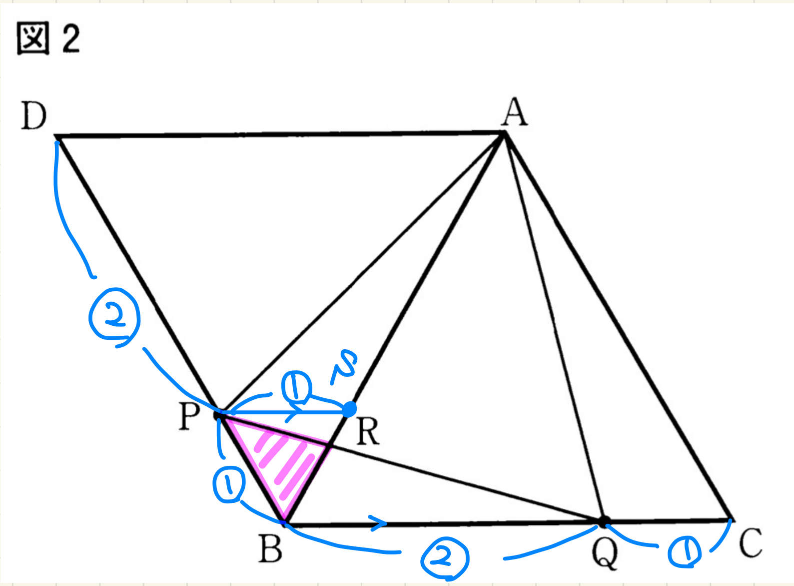
③, ④より

$\angle BAP = \angle CAQ$ — ⑤

①, ②, ⑤より 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△ABP ≡ △ACQ （証明終わり）

② 難問




①より対応する辺の長さは等しいので,

$BP = CQ$

また, △ABD, △ABCは合同な正三角形なので,

$BD = BC$

よって, $PD = QB$

DP : PB = 2 : 1 より

BQ : QC = 2 : 1

$\underbrace{BQ}_{=PD} : \underbrace{QC}_{=BP}$

点Pを通り，BCに平行な線を引き，ABとの交点をSとする。

∠PBR = 60°，　∠BRP = 60°

△ABDが正三角形より。

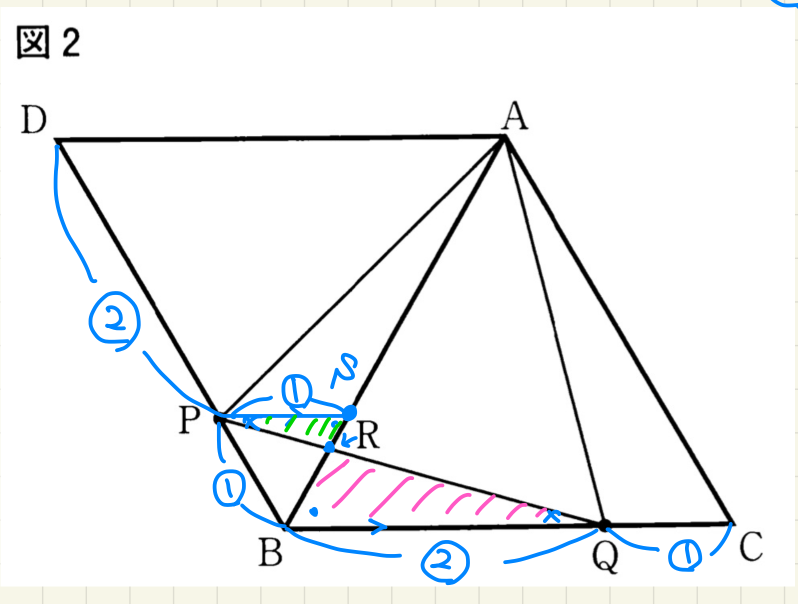
PS // BCで，錯角が等しいので，∠BRP = ∠RBC

△ABCが正三角形なので60°

よって，△BSPは正三角形である。

PB = PS より，PS = ①

比




△BQRと△SPRにおいて，

PS // BCで錯角が等しいので，

∠RBQ = ∠RSP ― ①

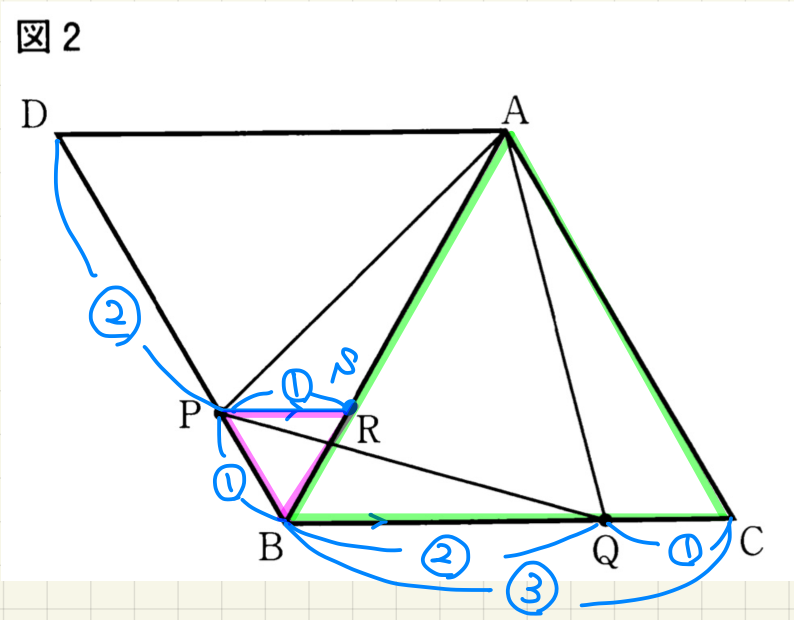
∠RQB = ∠RPS ― ②

①，②より，2組の角がそれぞれ等しいので，

△BQR ∽ △SPR，相似比は BQ : PR = 2 : 1，

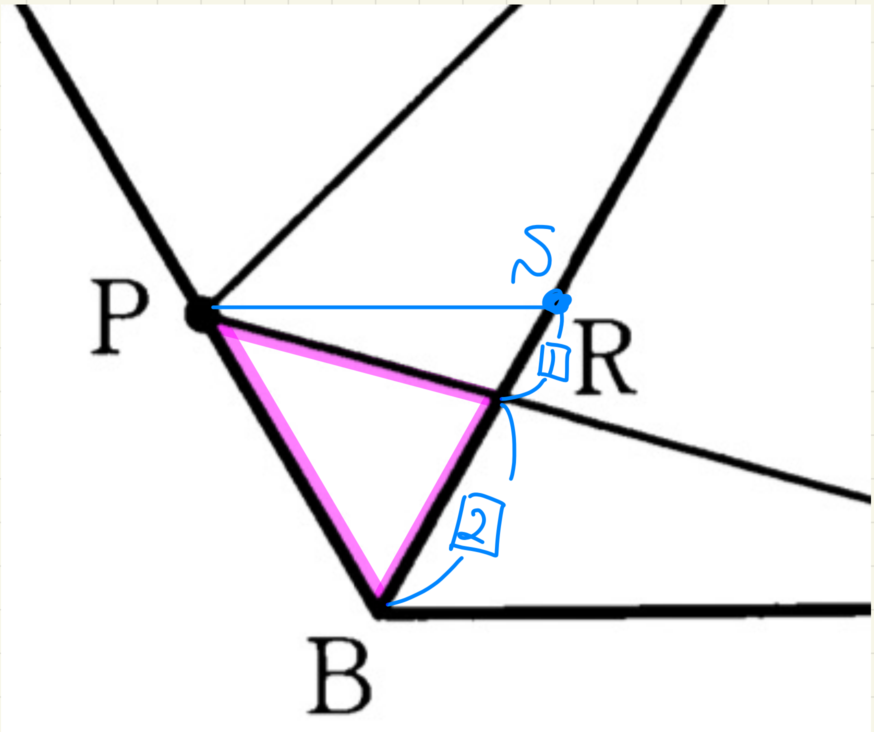
対応する辺の比は等しいので，

BR : SR = 2 : 1




△ABCと△BSPは
ともに正三角形なので、
△ABC ∽ △BSP
相似比は、
BC : SP = 3 : 1
よって面積比は、相似比の2乗なので、

$$\triangle ABC : \triangle BSP = 3^2 : 1^2$$
$$= 9 : 1 \quad \text{―― ③}$$




△BRSの辺BSを
2:1に分けた点が
Rなので、

$$\triangle BRP = \triangle BSP \times \frac{2}{3} \quad \text{―― ④}$$

③、④より

$$\triangle ABC : \triangle BSP : \triangle BRP = 9 : 1 : \frac{2}{3}$$

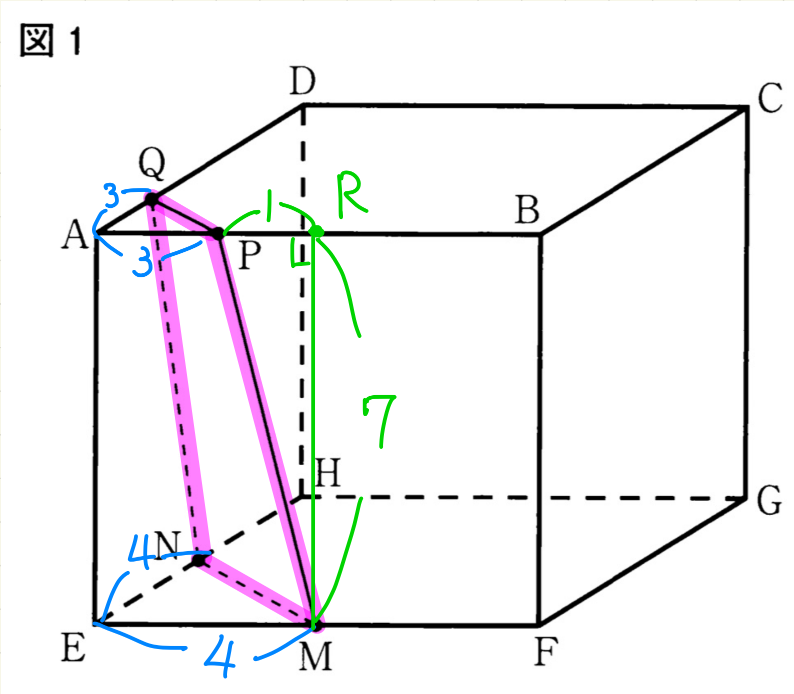
よって、

$$\triangle ABC : \triangle BRP = 9 : \frac{2}{3} = 27 : 2$$

$$27\triangle BRP = 2\triangle ABC \Rightarrow \triangle BRP = \frac{2}{27}\triangle ABC$$

5

問1




点Pと点Qは、同時に点Aを出発し、3秒後なので、

$AP = AQ = 3$

また、ABの中点をRとすると、$AR = 4$ より

$PR = AR - AP$
$= 4 - 3 = 1$

点Pと点Qは同じ速さで動くので、$\underbrace{PM = QN}_{\text{対称性より}}$

△APQで三平方の定理より

$PQ = \sqrt{3^2 + 3^2}$ 　$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
$= 3\sqrt{2}$

△EMNで三平方の定理より

$MN = \sqrt{4^2 + 4^2}$ 　$\sqrt{16+16} = \sqrt{32}$
$= 4\sqrt{2}$

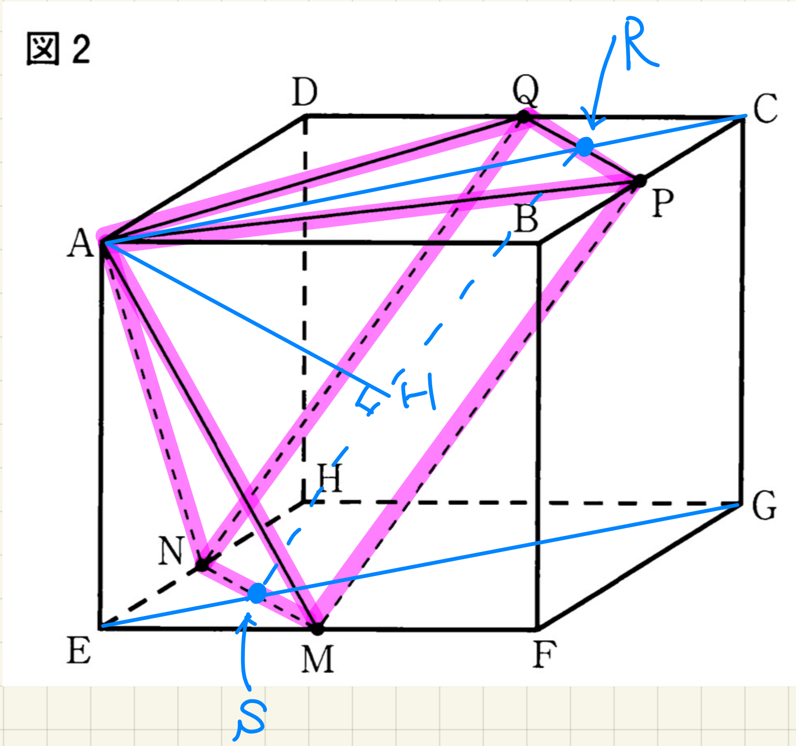
△PMRで三平方の定理より

$PM = \sqrt{7^2 + 1^2}$ 　$\sqrt{49+1} = \sqrt{50}$
$= 5\sqrt{2}$

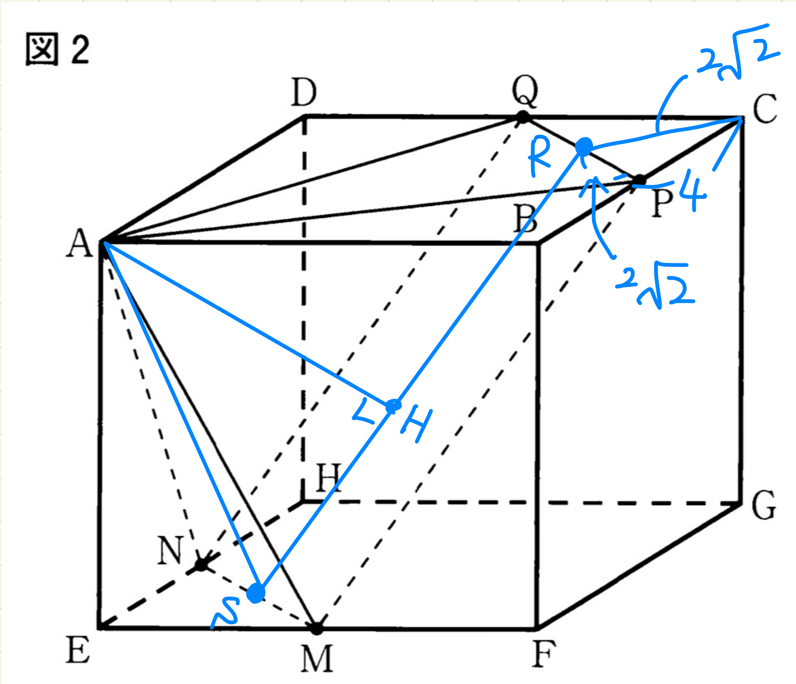
よって、□MPQNの周の長さは、

$\underbrace{PQ}_{3\sqrt{2}} + \underbrace{MN}_{4\sqrt{2}} + \underbrace{PM}_{5\sqrt{2}} + \underbrace{QN}_{5\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$ cm

問2 難問

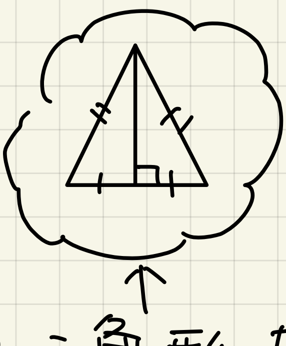



対称性から、
立体A－MPQNは、
平面AEGCで二等分
される。
PQの中点をR
MNの中点をS
点AからRSに垂らした
垂線をHとする。




P、Qは、点Aを出発して
12秒後なので、
A・B・P＝12 cm
よって、
CP＝4 cm.
△CPQで三平方の定理
より
$$PQ=\sqrt{4^2+4^2}$$
$$=4\sqrt{2}$$

RはPQの中点なので、
$$PR=PQ\div 2$$
$$=4\sqrt{2}\div 2$$
$$=2\sqrt{2}\ \text{cm}$$



△CPQは、CP＝CQの二等辺三角形なので、
$$\angle CRP=90°$$

よって、$\triangle CPR$で三平方の定理より

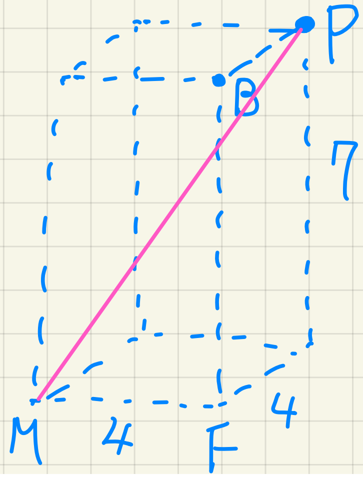
$$CR = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{16 - 8}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

$\triangle ABC$で三平方の定理より

$$AC = \sqrt{8^2 + 8^2}$$
$$= 8\sqrt{2}$$

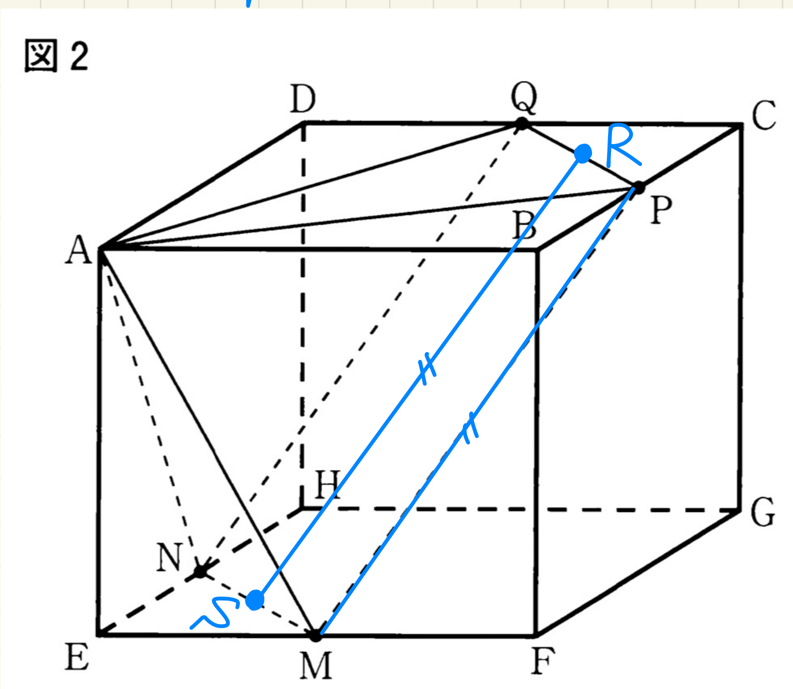
よって、

$$AR = AC - CR$$
$$= 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$
$$= 6\sqrt{2}$$




ここで、左の図から

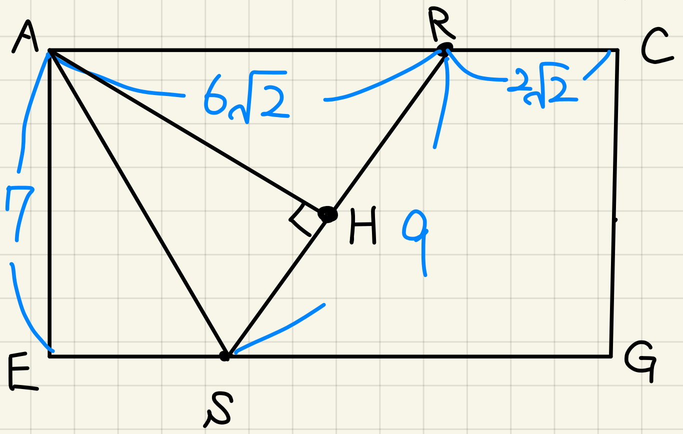
$$PM = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{16 + 16 + 49}$$
$$= \sqrt{81} = 9\,\text{cm}$$




$PM = RS$なので

$$RS = 9\ \text{cm}$$

□AEGCの断面を書くと、下の通り。




△ASRの面積は、

$$AR \times AE \times \frac{1}{2}$$

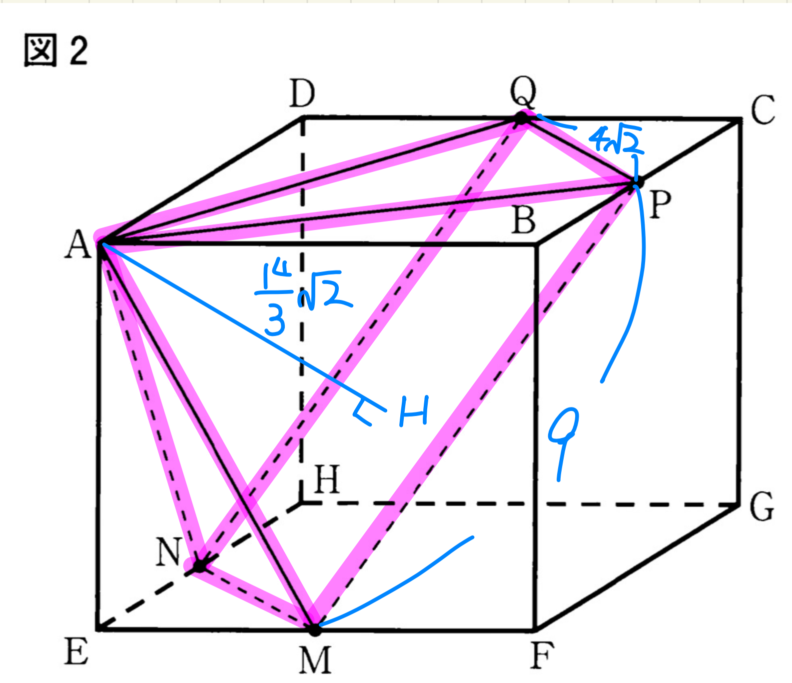
$$= 6\sqrt{2} \times 7 \times \frac{1}{2} = 21\sqrt{2}.$$

RSを底辺としてみると、△ASRの面積は、

$$9 \times AH \times \frac{1}{2} = 21\sqrt{2}$$

$AH = 21\sqrt{2} \times 2 \div 9$

$$\therefore AH = \frac{14}{3}\sqrt{2}\ \text{cm}$$




よって体積は、

$$9 \times 4\sqrt{2} \times \frac{14}{3}\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= 4\sqrt{2} \times 14\sqrt{2}$$

$$= 56 \times 2 = 112\ \text{cm}^3$$