2022年度　静岡県

数学

Kmkm

1.

(1)

ア　与式 $= 6-24$

$= -18$

イ　与式 $= 2a+9b$

ウ　与式 $= \dfrac{8x+2y}{10} - \dfrac{5x-5y}{10}$

$= \dfrac{8x+2y-5x+5y}{10}$

$= \dfrac{3x+7y}{10}$

$= \sqrt{7}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7} = 7\sqrt{3}$

エ　与式 $= \sqrt{7}(9-\sqrt{3}\times\sqrt{7}) - 3\sqrt{3}$

$= 9\sqrt{7} - 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$= 9\sqrt{7} - 10\sqrt{3}$

(2) $(a-5)(a-6) - a(a+3)$

$= a^2 - 11x + 30 - a^2 - 3a$

$= -14a + 30$

$a = \dfrac{2}{7}$ より

$-14a + 30 = -14 \times \dfrac{2}{7} + 30 = -4 + 30 = 26$

(3) 式を整理すると

$$x^2-4x+4=16$$
$$x^2-4x-12=0$$
$$(x+2)(x-6)=0$$
$$\therefore\ x=-2,\ 6$$

(別解)

$(x-2)^2=16$ で $X=x-2$ とおくと.

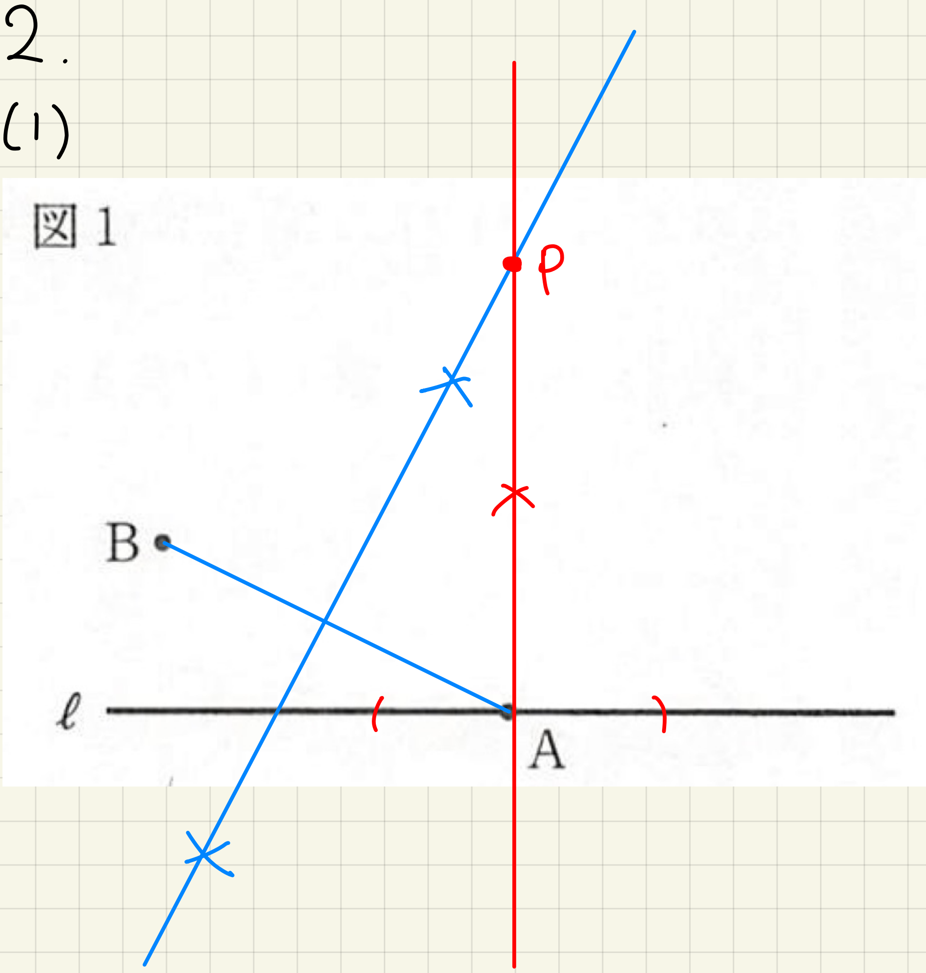
$$X^2=16 \Rightarrow X=\pm 4$$

よって

$$x-2=\pm 4$$
$$x=2+4,\ 2-4$$
$$=6,\ -2$$

2.

(1)



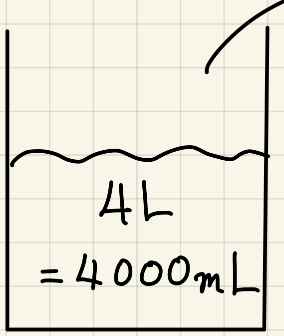
2点A, Bから等しい距離にある
⇒線分ABの垂直二等分線.

点Aを通る垂線

⇓

交点が点P

(2)

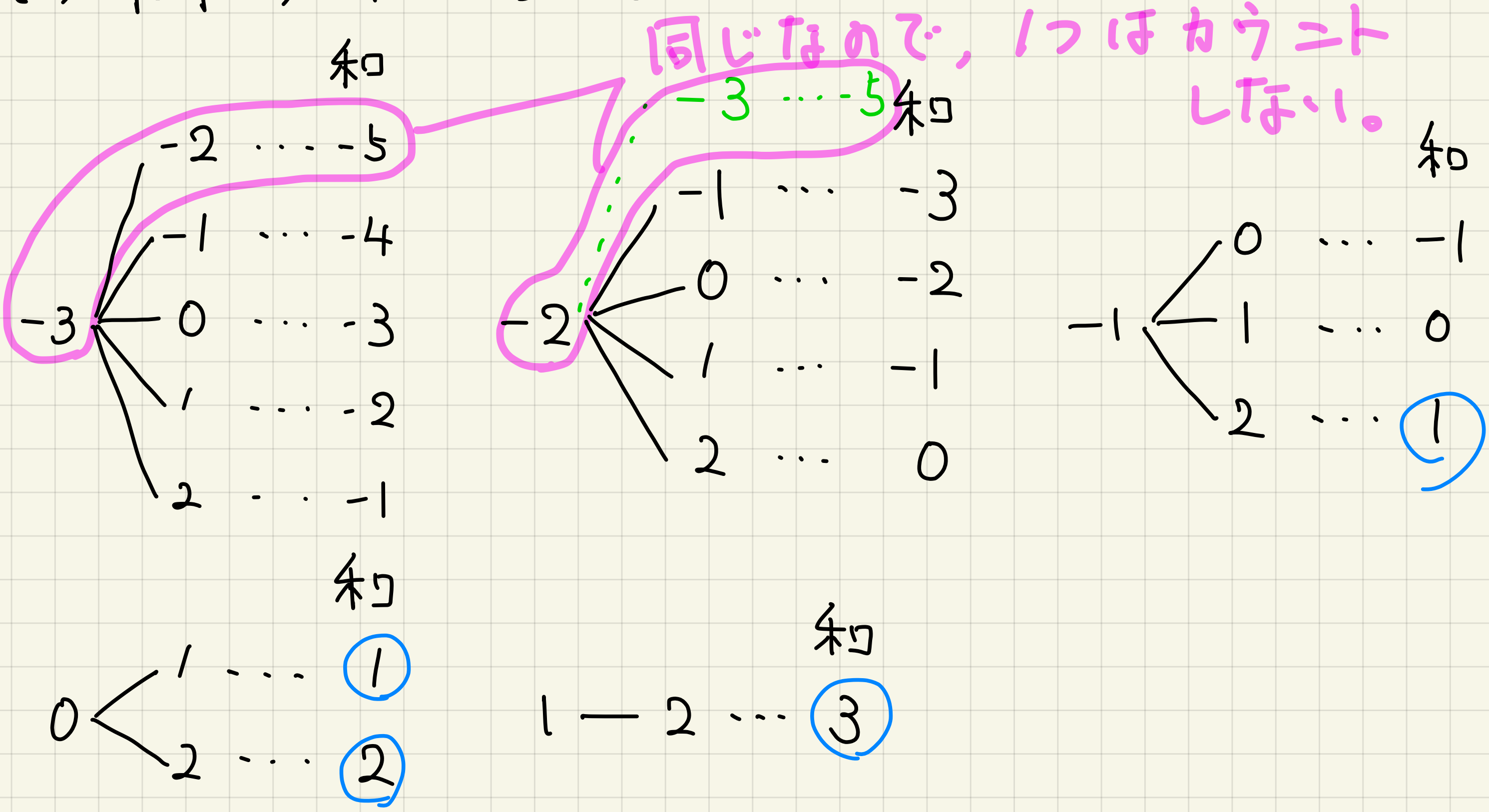


1時間あたり y mL
水が減る。
⇒ x 時間で $x \times y$ mL 水が減る。

4 L = 4000 mL なので、

$$4000 = xy \Rightarrow y = \frac{4000}{x}$$

(3) 樹形図で考えると、



全部で15通り。2つの玉の数の和が正となるのは4通り。よって求める確率は

$$\frac{4}{15}$$

※ 0は正の数に含まない!

3.

(1) 範囲：最大値－最小値

富士山が見えた日数の最大値は12日

富士山が見えた日数の最小値は1日

※ 0日＝富士山が見えなかった

⇒富士山が見えた日数ではない

よって、

範囲＝12－1＝11日

(2)

表1から、2010年から2019年までの富士山が見えた日数の中央値は、5番目と6番目の平均値なので、

$$\frac{4+6}{2}=5日$$

※データを小さい順に並べると、

1, 3, 4, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 12

中央値 $=\frac{4+6}{2}=5$日

2011年から2020年までの中央値は、6.5日になったので、6日と7日の平均値となる。

$\frac{6+7}{2}=6.5$日

※ データを小さい順に並べると，

1, 3, 4, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 12

ここに中央値がきてほしい
(6.5日なので)

⇓

1, 3, 4, 4, 4 のうちどれか
1つが消えて，7以上の数を1つ
追加すれば，中央値が6.5日と
なる.

⇓

7以上の数.

*　*　*　*, 6, 7, 7, 7, *, 12

5つの数のうち
1つ消えた

中央値.

また，2011年から，2020年までの10年間の平均値は，2010年から2019年までの10年間の平均値よりも0.3日増えたので，総日数は．

$$0.3 \times 10 = 3\text{日}$$

増えたことになる。

1, 3, 4, 4, 4 から1つ消え，総日数を+3日にするためには，1, 3, 4, 4, 4 から4が1つ消え，7, 7, 7, *, 12 の * が7であれば良い．

+3日

したがって、

　2010年に見えた日数　：4日

　2020年に見えた日数　：7日

参考

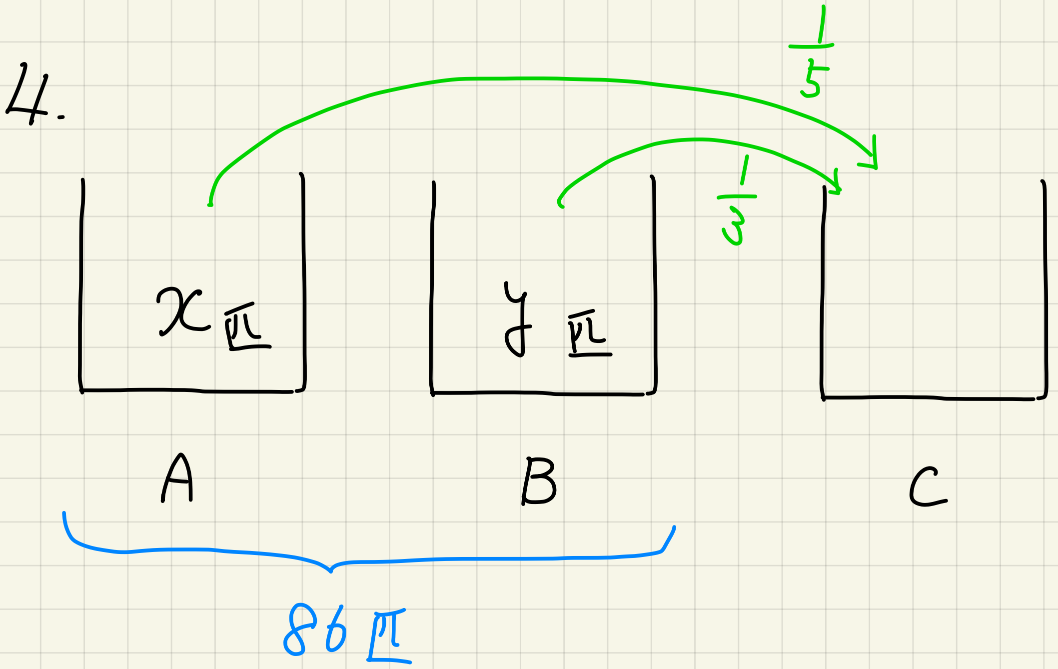
1, 3, 4, 4, 4 から 3 が1つ消えたとすると、

+3日

7, 7, 7, ＊, 12 の ＊ は 6日 となる

＊ は7日以上なので、不適となる。

4.



水槽Aのメダカの数を x 匹

水槽Bのメダカの数を y 匹

とする。

合わせて86匹いるので

$$x + y = 86 \quad —— ①$$

水槽Cには、水槽Aのメダカの$\frac{1}{5}$、水槽Bのメダカの$\frac{1}{3}$を移したので、水槽Cのメダカの数は、

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}y$$

水槽Aには、残り$\frac{4}{5}x$匹残っているので、

$$\underbrace{\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}y}_{\text{水槽C}}=\underbrace{\frac{4}{5}x-4}_{\text{水槽Aより4匹少ない}} \quad \text{—— ②}$$

②式を整理して、

$$-\frac{3}{5}x+\frac{1}{3}y=-4$$

両辺 ×(−15)

$$9x-5y=60 \quad \text{—— ③}$$

よって、方程式は、

$$\begin{cases} x+y=86 & \text{—— ①} \\ 9x-5y=60 & \text{—— ③} \end{cases}$$

①×5 + ③ より

$$\begin{array}{rrcr} & 5x+5y & = & 430 \\ +) & 9x-5y & = & 60 \\ \hline & 14x & = & 490 \end{array}$$

$$x=35$$

$x=35$ を①に代入して.

$$35+y=86$$
$$y=86-35$$
$$=51$$

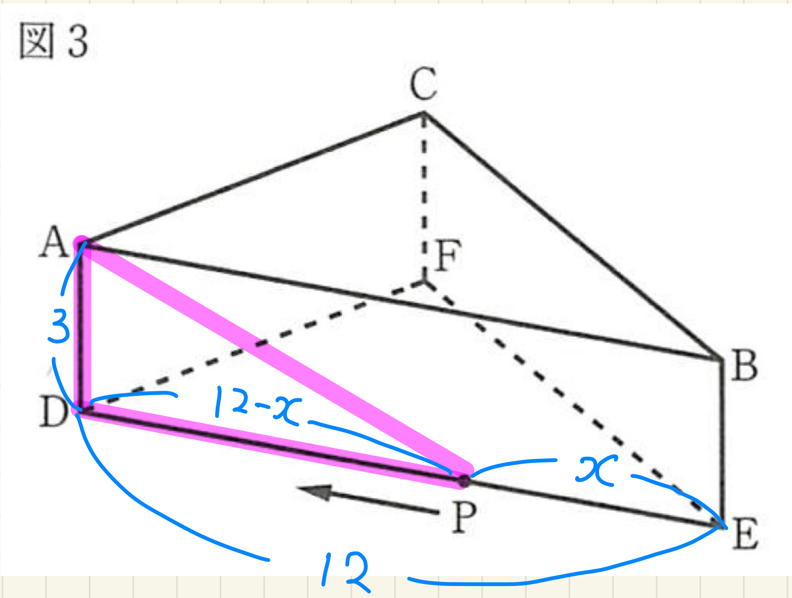
よって, 水槽Cに移したメダカの数は.

$$\underbrace{35\times\frac{1}{5}}_{\text{水槽Aから移した数}}+\underbrace{51\times\frac{1}{3}}_{\text{水槽Bから移した数}}=7+17$$
$$=24\text{ 匹}$$

5.

(1)

図3



点Pは毎秒1cmの速さで動くので, x秒後には$x$cm動く。

したがって,
$PE=x$,
$DP=12-x$

よって△ADPの面積は
$$(12-x)\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{3(12-x)}{2}$$

これが $6\,cm^2$ となれば良いので.

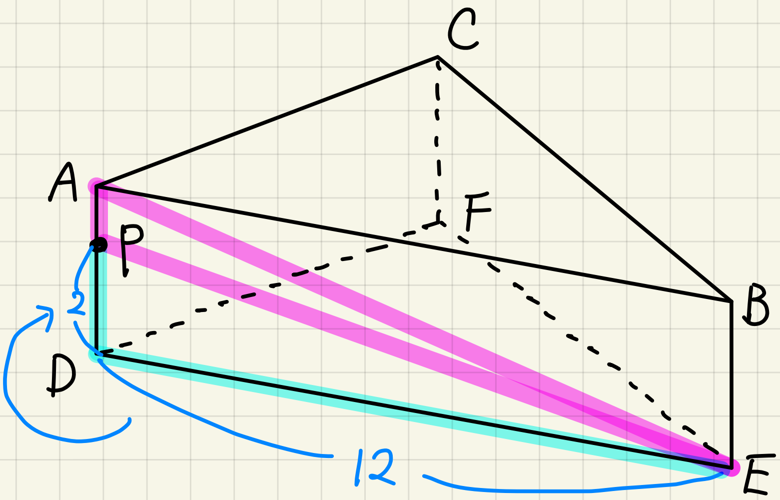
$$\frac{3(12-x)}{2} = 6$$

両辺 $\times \frac{2}{3}$

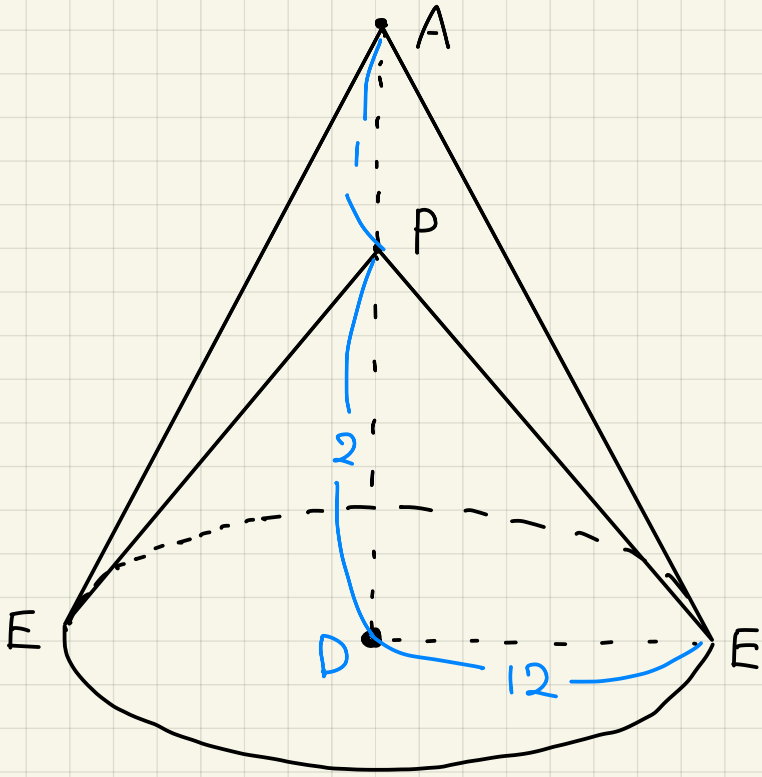
$$12 - x = 4$$

$$x = 8$$

(2)



点Pが点Eを出発して, 14秒後のとき, 点Pは辺AD上にいる. (左図)



辺APを軸として1回転させたときの立体は, 左図のようになり, 求める体積は.

頂点Aの円錐－頂点Pの円錐

となる.

頂点Aの円錐の体積

$$12 \times 12 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3} = 144\pi \quad cm^3$$

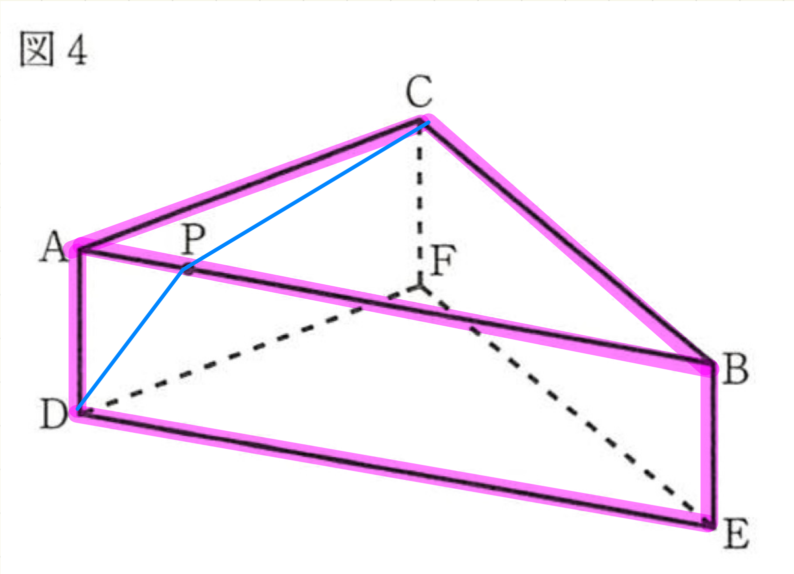
頂点Pの円錐の体積

$$12 \times 12 \times \pi \times 2 \times \frac{1}{3} = 96\pi \quad cm^3.$$

よって、求める体積は、

$$144\pi - 96\pi = 48\pi \quad cm^3$$

(3) 難問



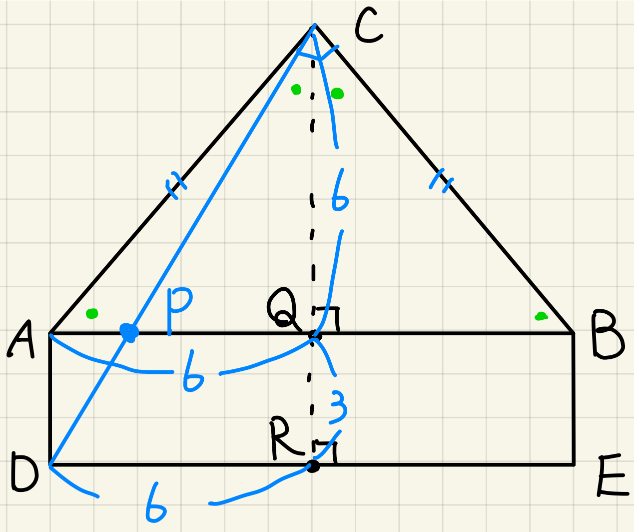
方針

条件(CP+PDが最小)から、点Pの位置を求める。

↓

PFの長さを求める

まず、点Pの位置を求める。



CP, PDを含む面の展開図を考えると、

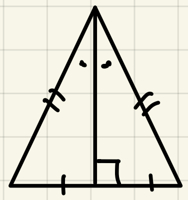
CP+PD

が最小となるのは、線分CD上に点Pがあるときである。

ABの中点をQ，DEの中点をRとする。

△ABCは $AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$ なので，

$\angle ACQ=45^\circ$。$\angle AQC=90^\circ$ より，



$$\angle CAQ=180^\circ-(90^\circ+45^\circ)$$
$$=45^\circ$$

よって，△AQCは直角二等辺三角形なので，

$CQ=AQ=6$ cm.

△CPQと△ADRにおいて，

□ADEBは長方形なので，$AB /\!/ DE$ より，

同位角が等しいので，

$\angle CPQ=\angle CDR$ ―― ①

$\angle CQP=\angle CRD=90^\circ$ ―― ②

①，②より2組の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle CPQ \sim \triangle ADR$

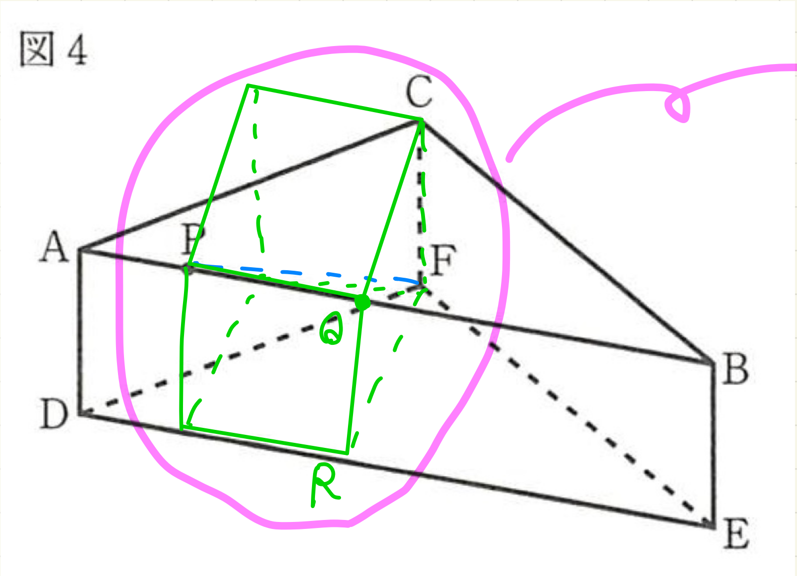
対応する辺の比は等しいので，

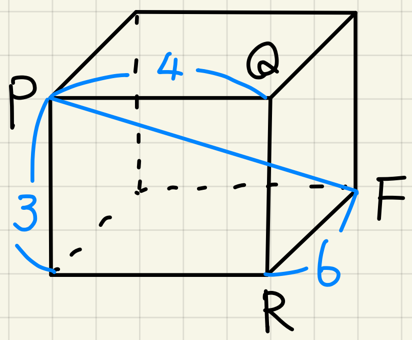
$$PQ:\underbrace{DR}_{6}=\underbrace{CQ}_{6}:\underbrace{AR}_{9}$$

よって，

$$9PQ=36$$

$$PQ=\frac{36}{9}=4$$



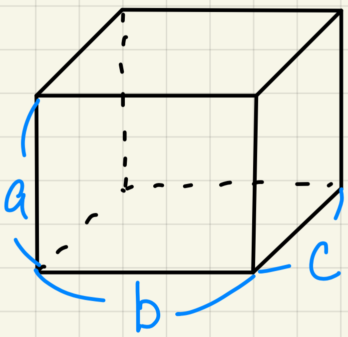


PFを含む直方体を考えると，直方体の対角線の長さは，三平方の定理の応用により

$$PF=\sqrt{3^2+4^2+6^2}$$

$$=\sqrt{61}\ \text{cm}$$

参考

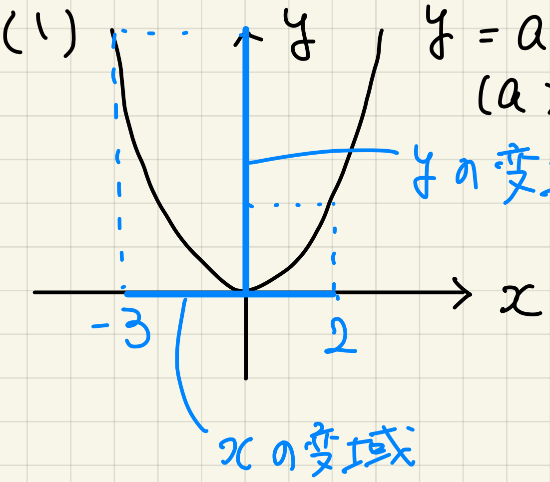


左図の直方体の対角線の長さは，

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

6.

(1)



$y = ax^2$
$(a > 0)$

左のグラフより

$x = -3$ のとき

$$y = a \times (-3)^2$$
$$= 9a$$

よって，yの変域は

$$0 \leqq y \leqq 9a$$

(2) 2つの直線が平行 ⇒ 傾きが等しい

求める直線の式を

$$y = -3x + b$$

とおくと，点 C (−2, −3) を通るので，

$$-3 = -3 \times (-2) + b$$
$$b = -3 - 6$$
$$= -9$$

よって，$y = -3x - 9$

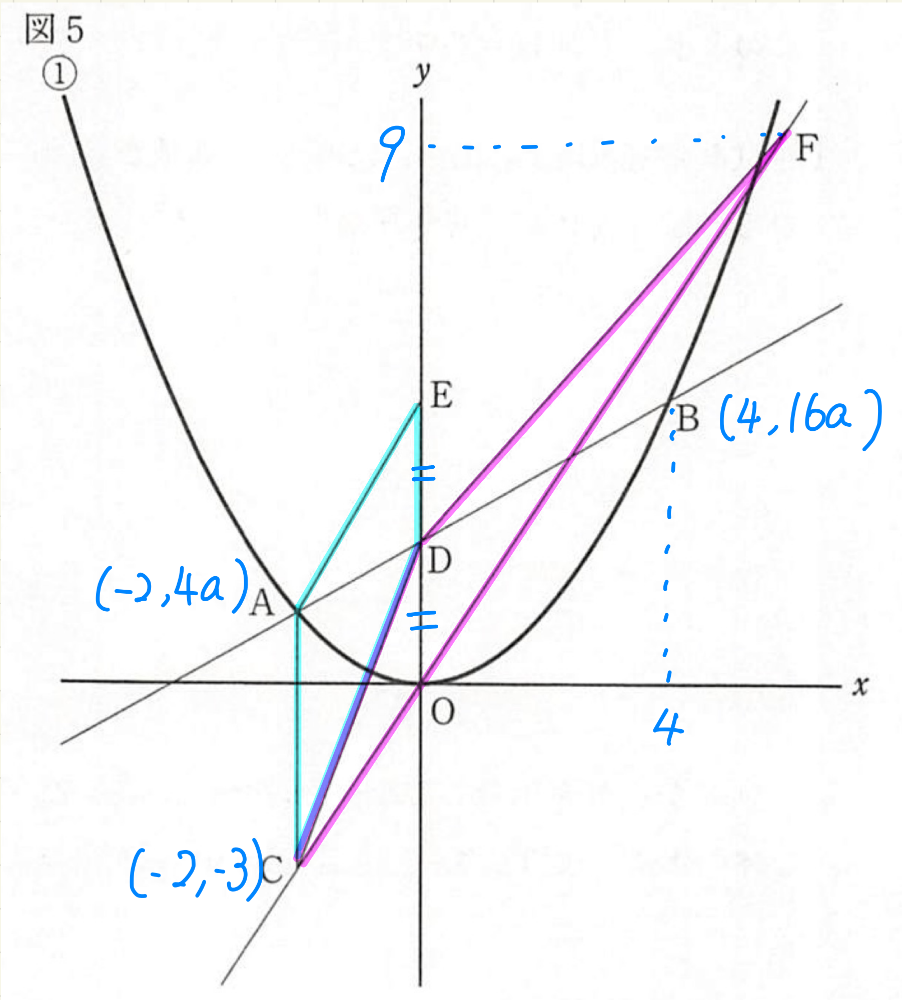
参考

$y = a_1 x + b_1$, $y = a_2 x + b_2$ があるとき

平行 ⇒ $a_1 = a_2$

垂直 ⇒ $a_1 \times a_2 = -1$

(3)



方針

□ACDEの面積をaを用いて表す。

△DCFの面積をaを用いて表す

△DCF = 2 × □ACDE

よりaの値を求める

(解答)

まず□ACDEの面積を、aを用いて表す。

点Aは $y = ax^2$ のグラフ上にあり、$x = -2$ なので、

$y = a \times (-2)^2 = 4a$ ⇒ $A(-2, 4a)$

点Bは $y = ax^2$ のグラフ上にあり、$x = 4$ なので、

$y = a \times 4^2 = 16a$ ⇒ $B(4, 16a)$

直線ABの式を $y = sx + t$ とおく。点A, 点Bを通るので、

$4a = -2s + t$ …① $y = sx + t$ に $(-2, 4a)$ を代入

$-)\ 16a = 4s + t$ …② $y = sx + t$ に $(4, 16a)$ を代入

$-12a = -6s$

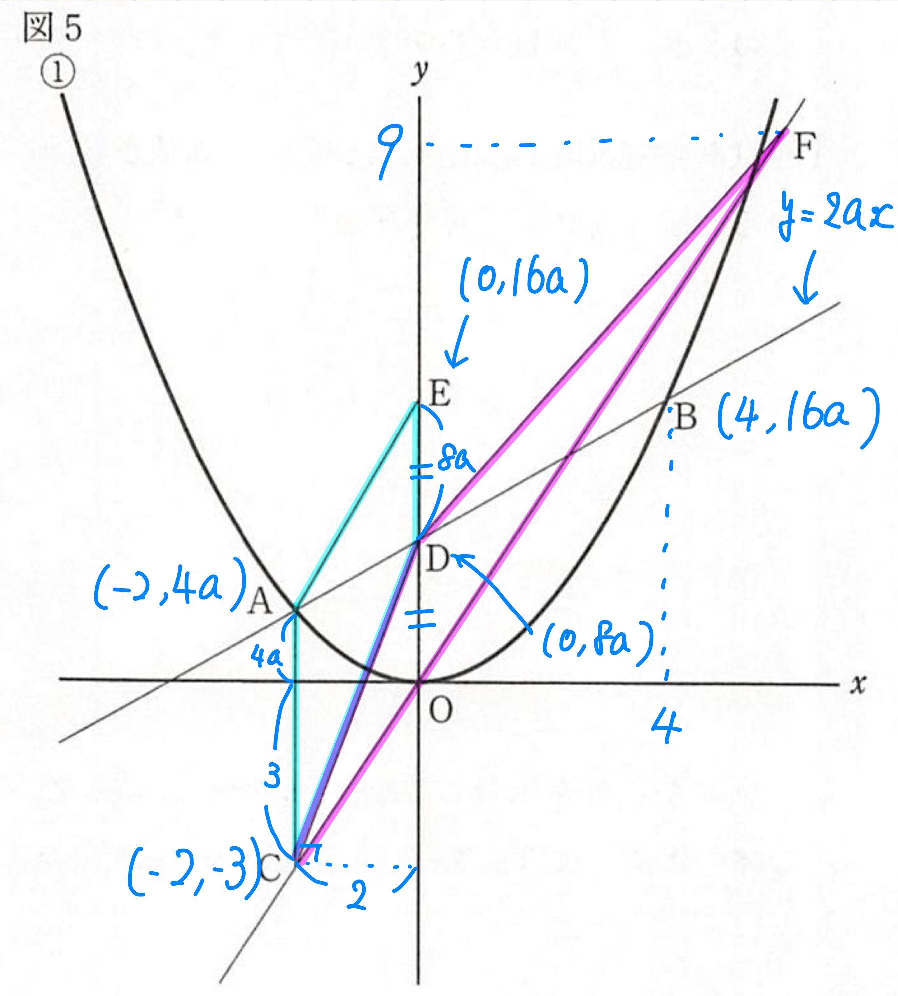
$s = 2a$

$s = 2a$ を ① に代入して

$$4a = -2 \times 2a + t$$

$$t = 4a + 4a = 8a$$

よって, 直線ABを通る式は. $y = 2ax + 8a$.



よって, 点Dは. $y = 2ax + 8a$ の切片なので,

$D(0,\ 8a)$

また, $OD = DE$ より

$EO = 16a$.

よって,

$E(0,\ 16a)$

□ACDE を △ACD と △ADE に分ける。

$$\triangle ACD = (4a+3) \times 2 \times \frac{1}{2} = 4a+3$$

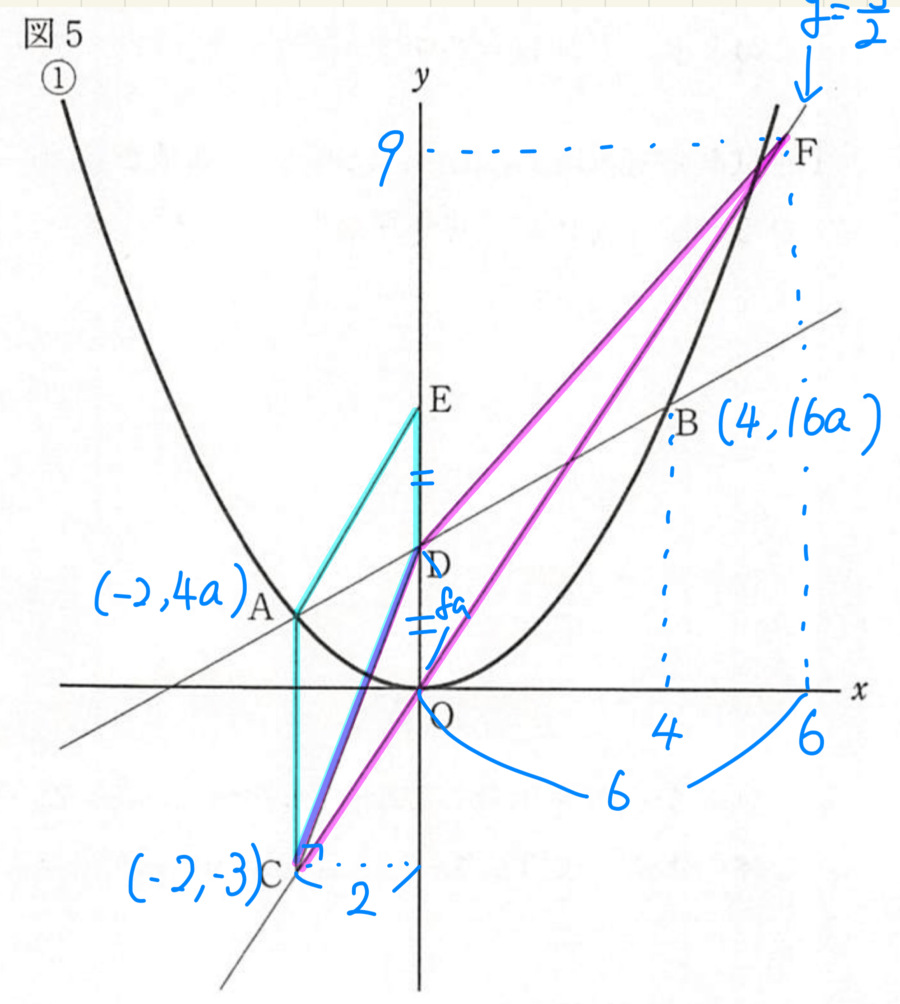
$$\triangle ADE = 8a \times 2 \times \frac{1}{2} = 8a$$

よって

$$□ACDE = 4a + 3 + 8a$$

$$= 12a + 3$$

次に△DCFの面積をaを用いて表す.



$y=\frac{3}{2}x$

直線CFの式を

$y=ux$ とおくと,

原点を通るので.

切片は0

C(-2, -3)を通るので.

$$-3=-2u$$

$$\therefore u=\frac{3}{2}$$

よって,直線CFの式は

$$y=\frac{3}{2}x$$

点Fのy座標が9なので.

$$9=\frac{3}{2}x \Rightarrow x=6$$

△DCFを△DCOと△DOFに分けると.

$$\triangle DCF = 8a \times 2 \times \frac{1}{2} = 8a$$

$$\triangle DOF = 8a \times 6 \times \frac{1}{2} = 24a$$

よって,

$$\triangle DCF = 8a + 24a$$

$$= 32a$$

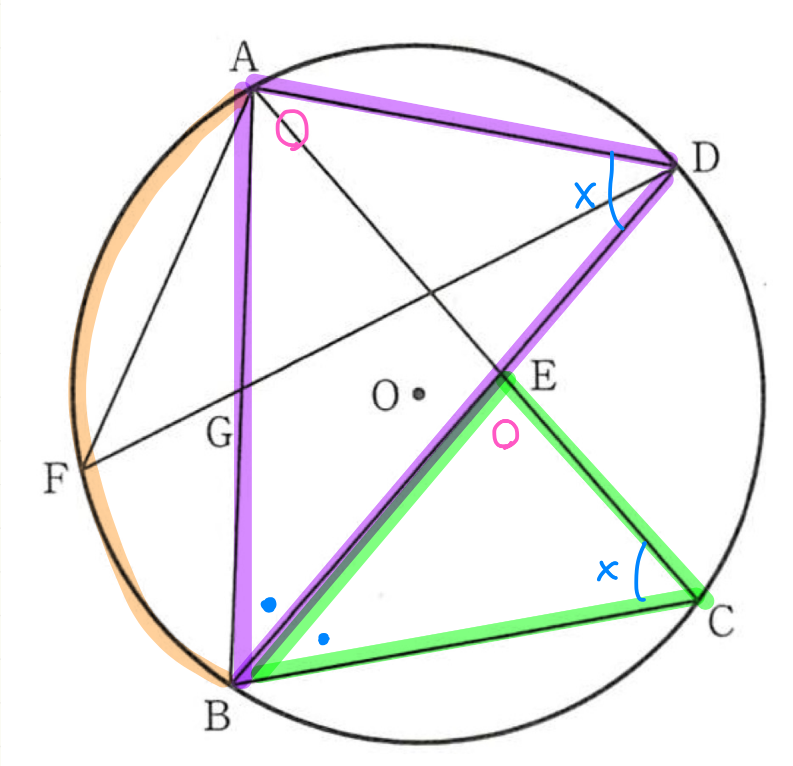
したがって

$$\underbrace{\triangle DCF}_{32a} = 2 \times \underbrace{\square ACDE}_{(12a+3)}$$

$$32a = 24a + 6$$
$$8a = 6$$
$$a = \frac{3}{4}$$

7.

(1) 図6



$\triangle ECB$ と $\triangle ADB$

において

仮定より

$\angle EBC = \angle ABD$ —①

また，$\overset{\frown}{AB}$ に対する

円周角は等しいので，

$\angle ECB = \angle ADB$ —②

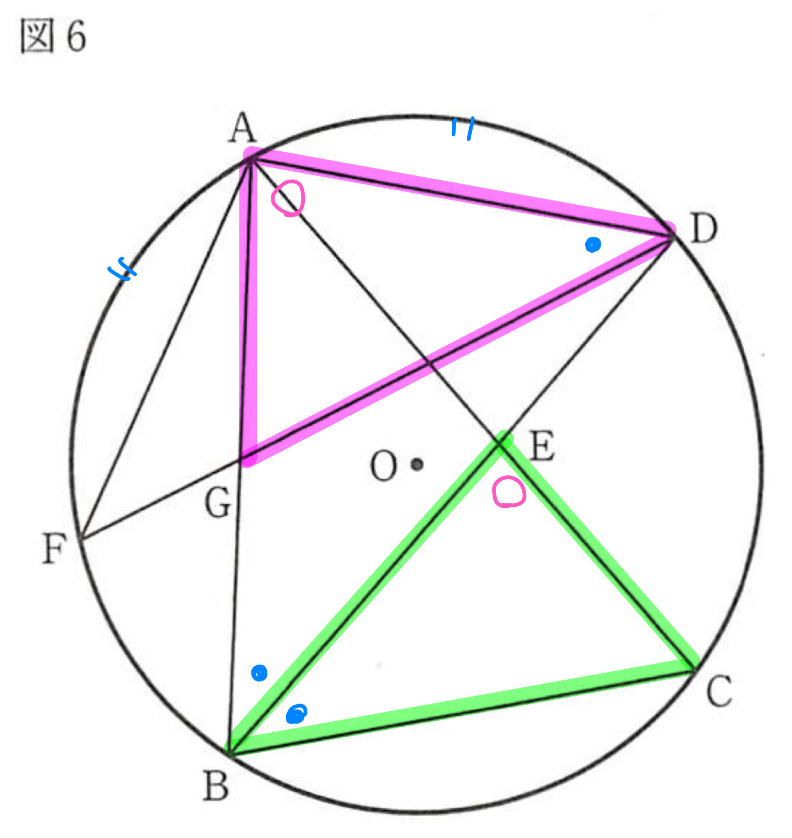
①，②より2組の角が

それぞれ等しいので，

$\triangle ECB \backsim \triangle ADB$

対応する角は等しいので，

$\angle CEB = \angle DAB$ —— ③

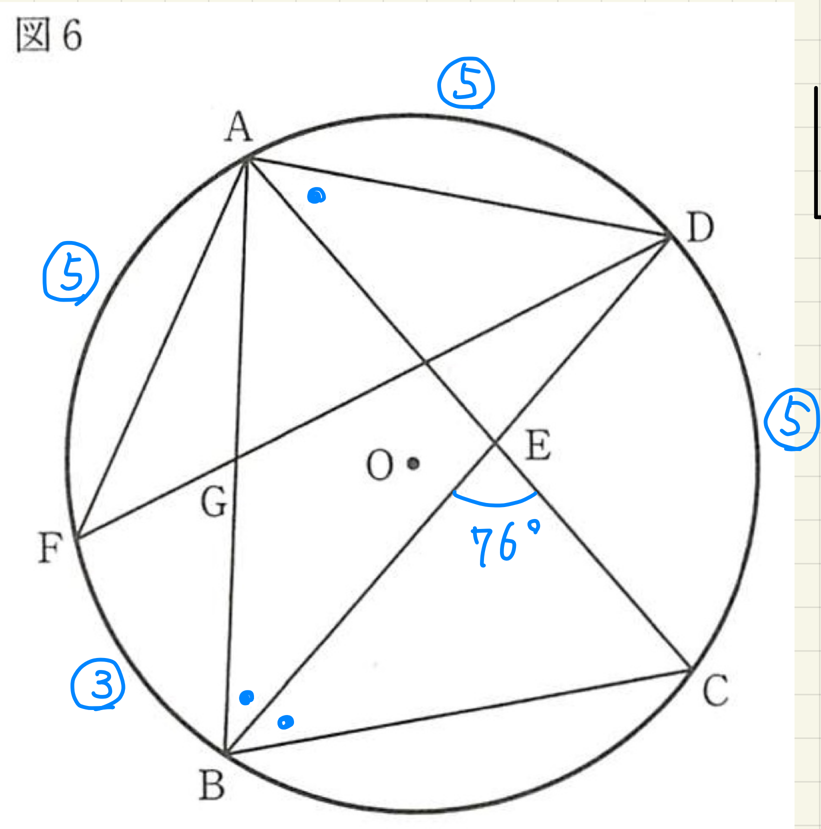


△AGDと△ECBにおいて、

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AF}$ なので、
円周角は等しいから
$\angle ABD = \angle GDA$ —④
①、④より
$\angle EBC = \angle GDA$ —⑤

③、⑤より2組の角がそれぞれ等しいので、△AGD ∽ △ECB
(証明終わり)

(2)

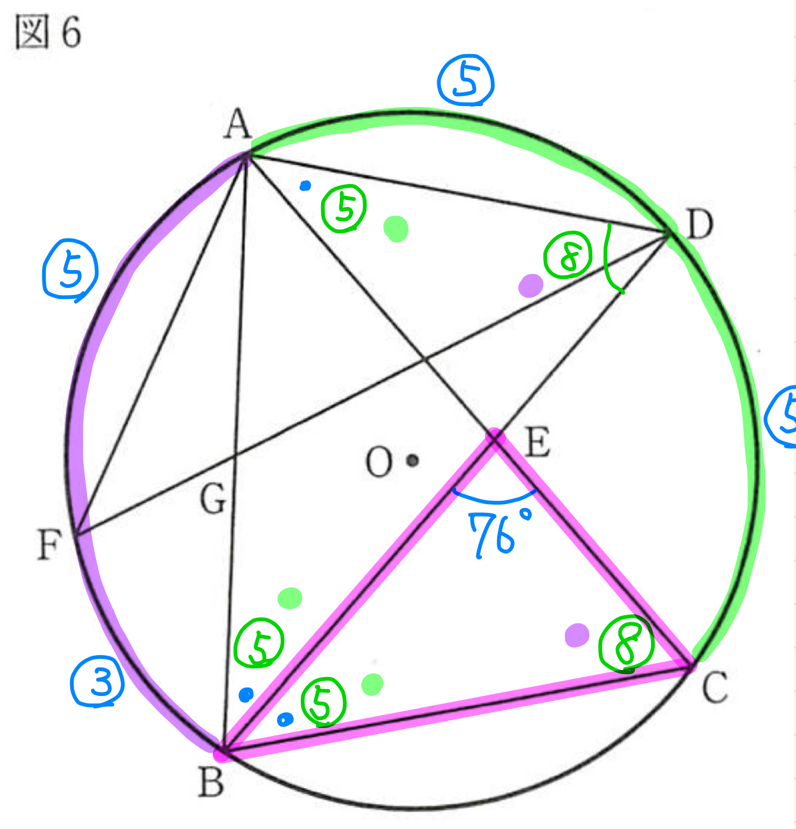


ポイント

弧の比 = 円周角の比

$\overset{\frown}{AF}$ = ⑤、$\overset{\frown}{FB}$ = ③
とおく(○は比を表す)
$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AF}$ より、$\overset{\frown}{AD}$ = ⑤

$\angle ABD = \angle DBC$ より
円周角が等しいので、
$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$
よって、$\overset{\frown}{DC}$ = ⑤



弧の比と円周角の比は等しいので，

$\angle ABD = \angle DBC = ⑤$

$\angle ACB = \angle ADB = ⑧$

$\triangle EBC$ の内角において，

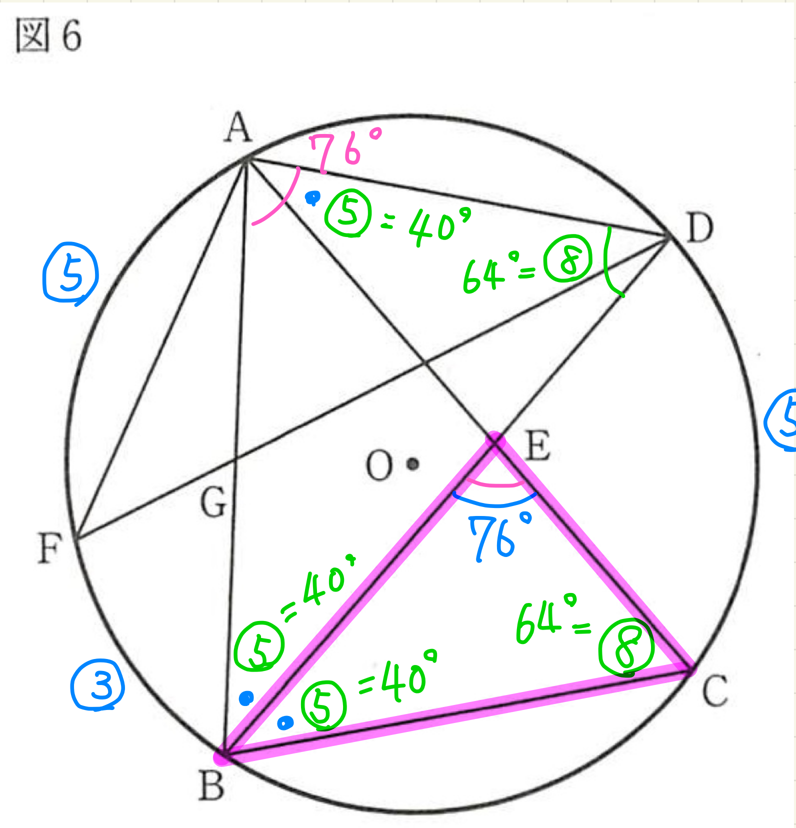
$\angle EBC + \angle ECB$

$= 180° - 76° = 104°$

$\angle EBC : \angle ECB = 5 : 8$ より

$\angle EBC = 104° \times \frac{5}{13} = 40° \Rightarrow ⑤ = 40°$

$\angle ECB = 104° \times \frac{8}{13} = 64° \Rightarrow ⑧ = 64°$



(1) より

$\angle CEB = \angle DAB$

であり，$\angle CEB = 76°$ なので，

$\angle DAB = 76°$

したがって，

$\angle BAC = 76° - 40°$

$= 36°$