# 2022年度 北海道
数学

KmKm

$\boxed{1}$

問1

(1) 与式 $= \underline{-32}$

(2) 与式 $= 25 - 3$

$= \underline{22}$

(3) 与式 $= 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$= \underline{6\sqrt{5}}$

問2

$a^2 + 2ab = 7^2 + 2 \times 7 \times (-3)$

$= 49 - 42$

$= \underline{7}$

問3

点Aはx軸上にあるので、点Aのy座標は0。

$y = -2x + 8$ に $y = 0$ を代入すると.

$0 = -2x + 8$

$2x = 8$

$x = 4$.

よって. 点Aの座標は. $\underline{(4, 0)}$

## 問4

$3x-2y=-x+4y=5$ より

$$\begin{cases} 3x-2y=5 & \text{—— ①} \\ -x+4y=5 & \text{—— ②} \end{cases}$$

①×2+② より

$$\begin{array}{rrcl} & 6x-4y & = & 10 \\ +) & -x+4y & = & 5 \\ \hline & 5x & = & 15 \\ & x & = & 3 \end{array}$$

②に $x=3$ を代入して

$$-3+4y=5$$
$$4y=8$$
$$y=2$$

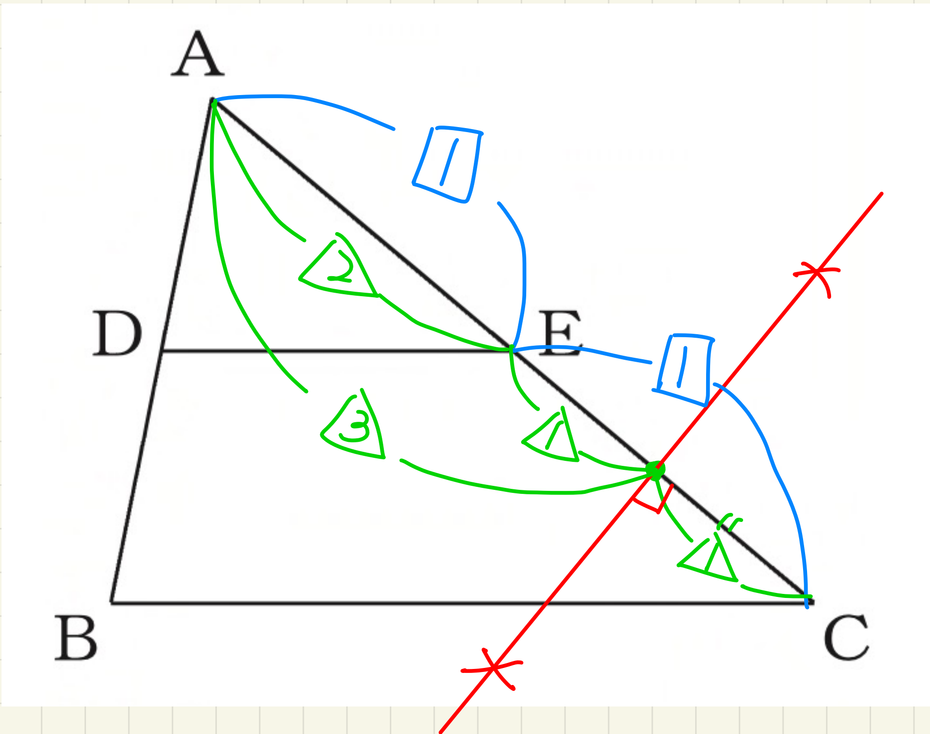
よって $x=3,\ y=2$

## 問5

飛行機の機内に持ち込める荷物の重さが $x$ kg で、それが 10kg 以下 なので

$$x \leqq 10$$

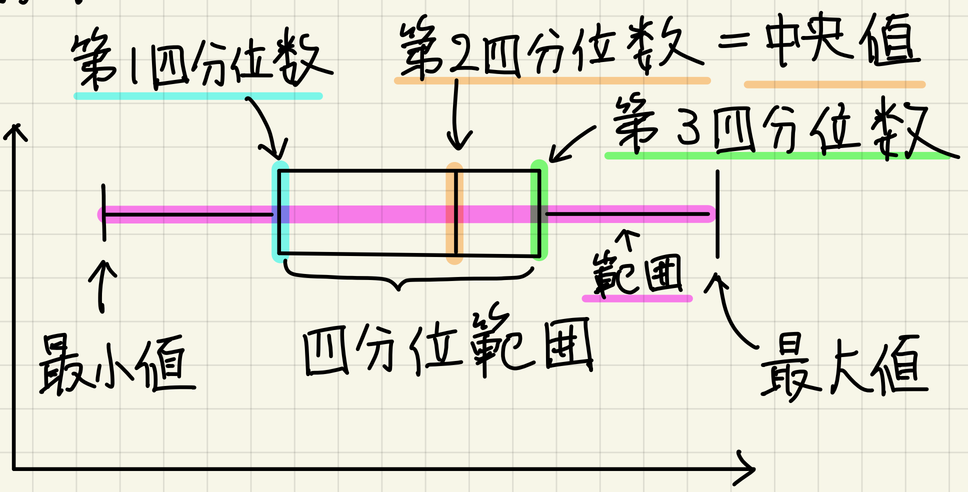
## 問6



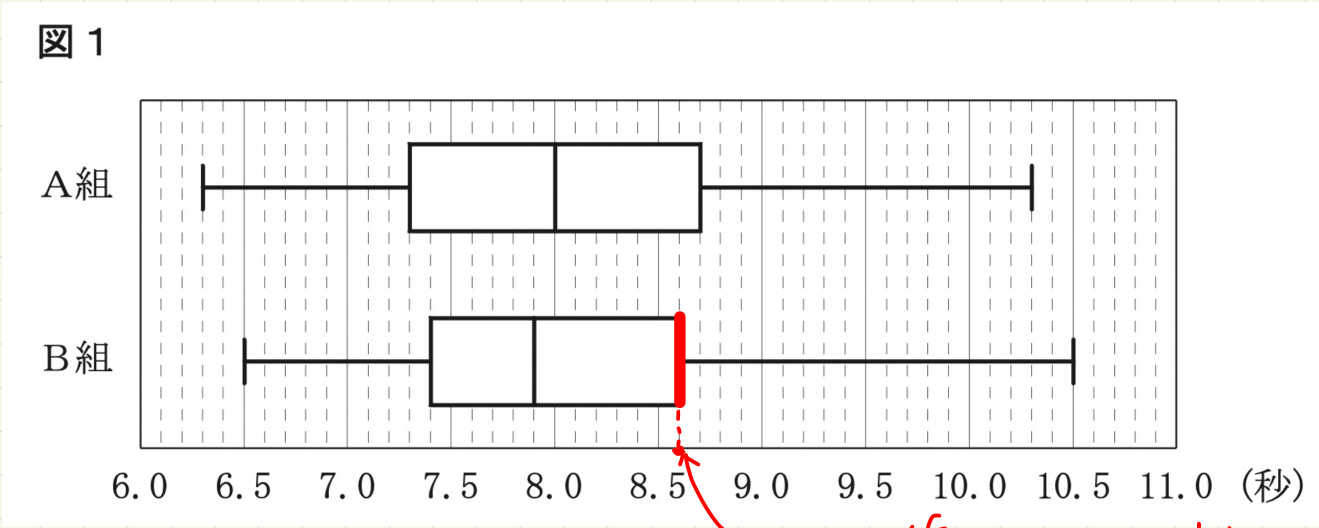

ECの垂直二等分線を作図すれば良い。

# 2

## 問1




(1)




B組の第3四分位数
＝8.6秒

(2)

(3) A組の範囲＝10.3－6.3＝4.0(秒)

B組の範囲＝10.5－6.5＝4.0(秒)

⇒ A組とB組の範囲は同じ

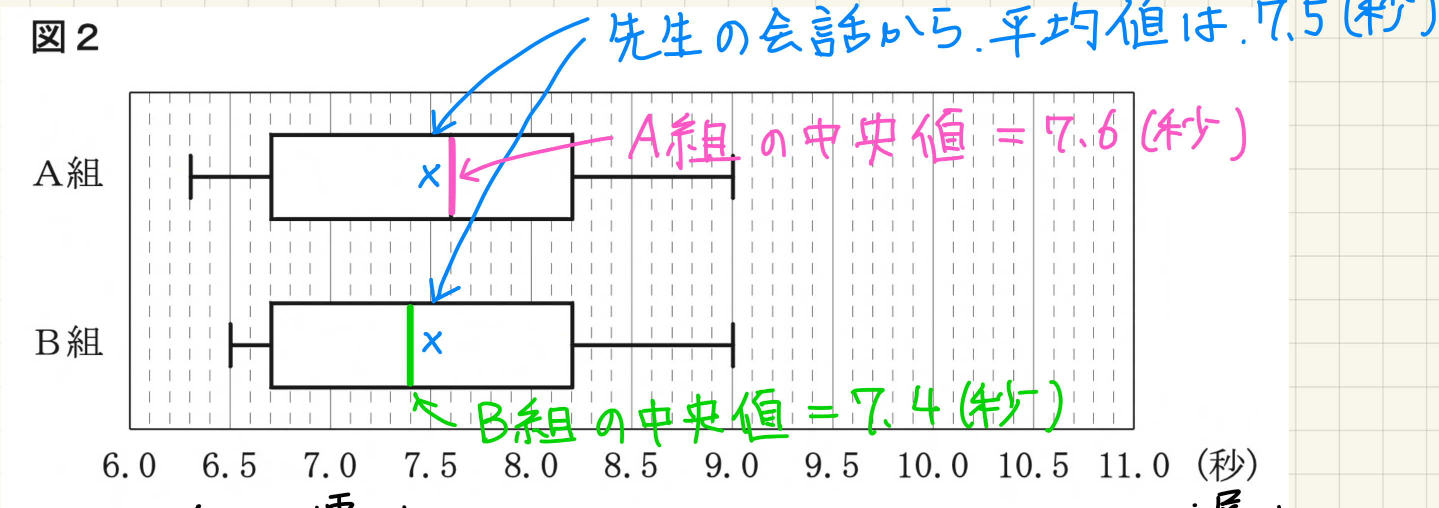
(イ) A組の四分位範囲 = 8.7 − 7.3 = 1.4 (秒)
B組の四分位範囲 = 8.6 − 7.4 = 1.2 (秒)
A組の方が B組より大きい

(ウ) 平均値は × 印などで書かれるが、図1には
記載がない。

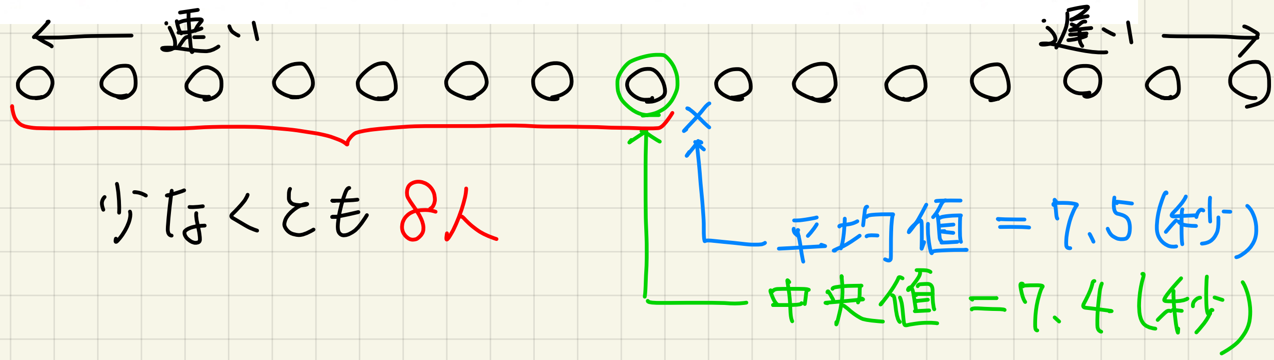
(エ) A組の最大値 = 10.3 (秒)
B組の最大値 = 10.5 (秒)
⇒ 最大値は B組の方が大きい

問2

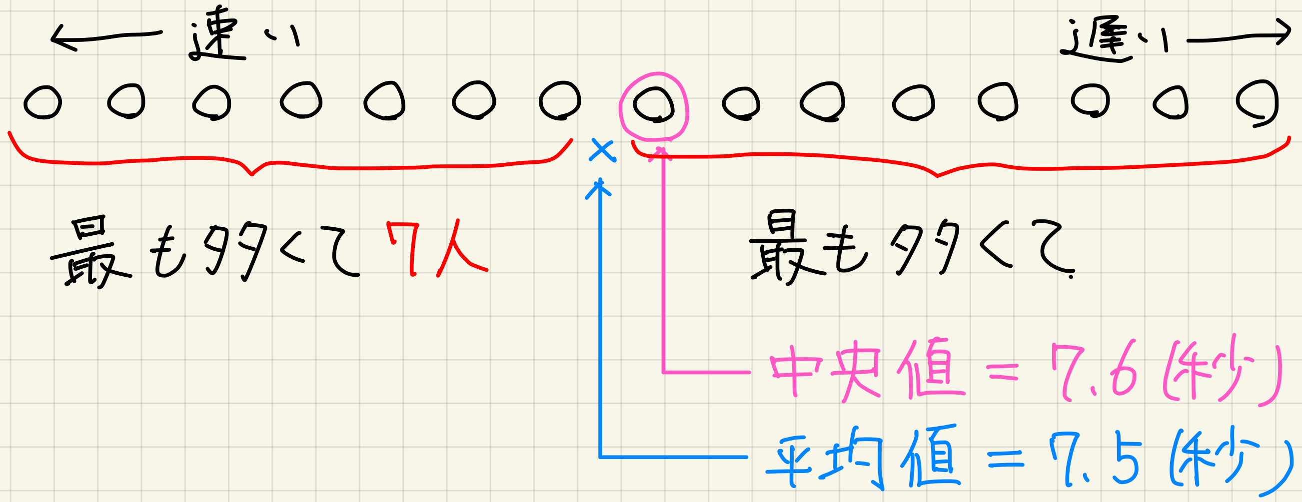
図2




(ア)



(イ)

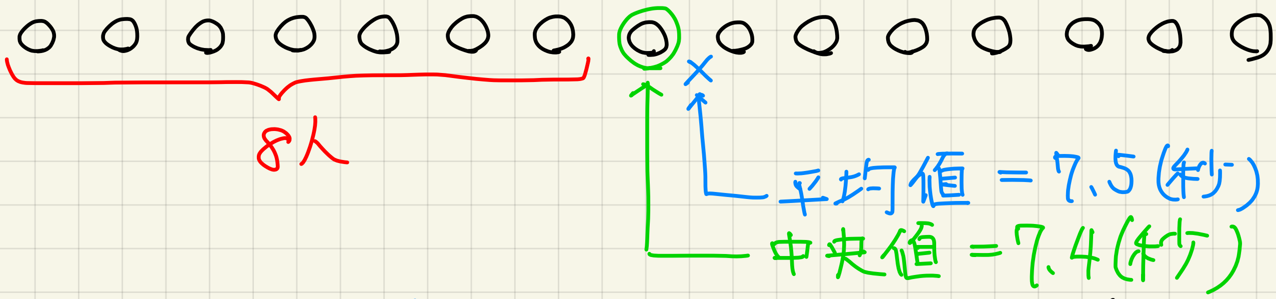



(ウ) B組は平均値より速い人が少なくとも8人。
A組は平均値より速い人が最も多くて7人。
したがって7.5(秒)より速い人はB組の方が多い。

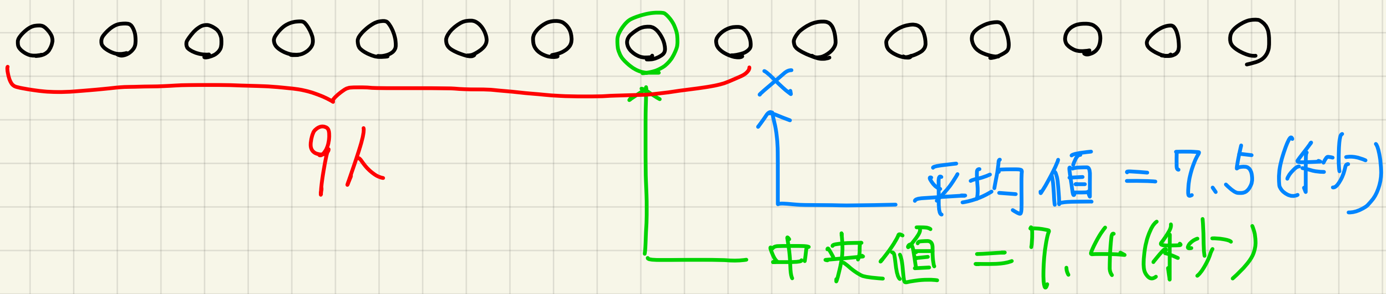
(参考)

(ア)「少なくとも」とは？

上の例では、平均値(x)を次のように考えた。




しかし、平均値(x)が次のようにも考えられる。




○の具体的な値は分からないため、平均値の位置も様々考えられる。しかし8人より少なくなることはない。そのため「少なくとも」とある。

$\boxed{3}$

## 問1

点Aが $y=ax^2$（$a$は正の定数）上にあるので，

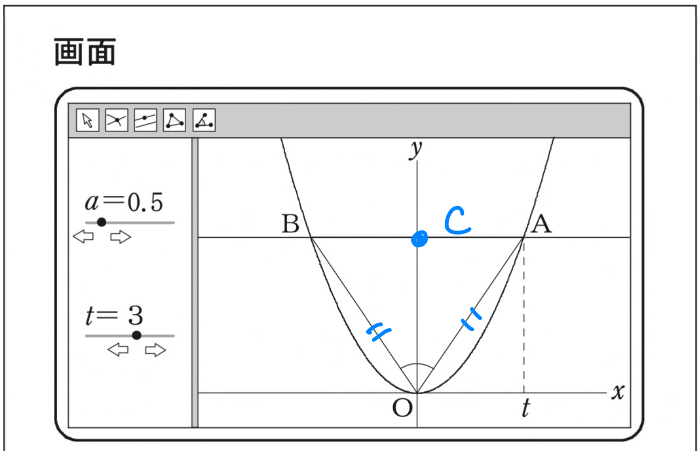
$x=2$，$y=12$ を代入すると，

$$12=2^2\cdot a$$

$$12=4a \qquad \therefore\ a=3$$

## 問2

**方針**



$a$ と $t$ の値をいろいろな値に変化させて，∠AOBの大きさを調べる。

問題文から，

$\angle AOB=90^\circ$

対称性から

$OA=OB$

∴ $\triangle OAB$は直角二等辺三角形

また，$\angle AOB=90^\circ$のとき，$\angle COA=45^\circ$，

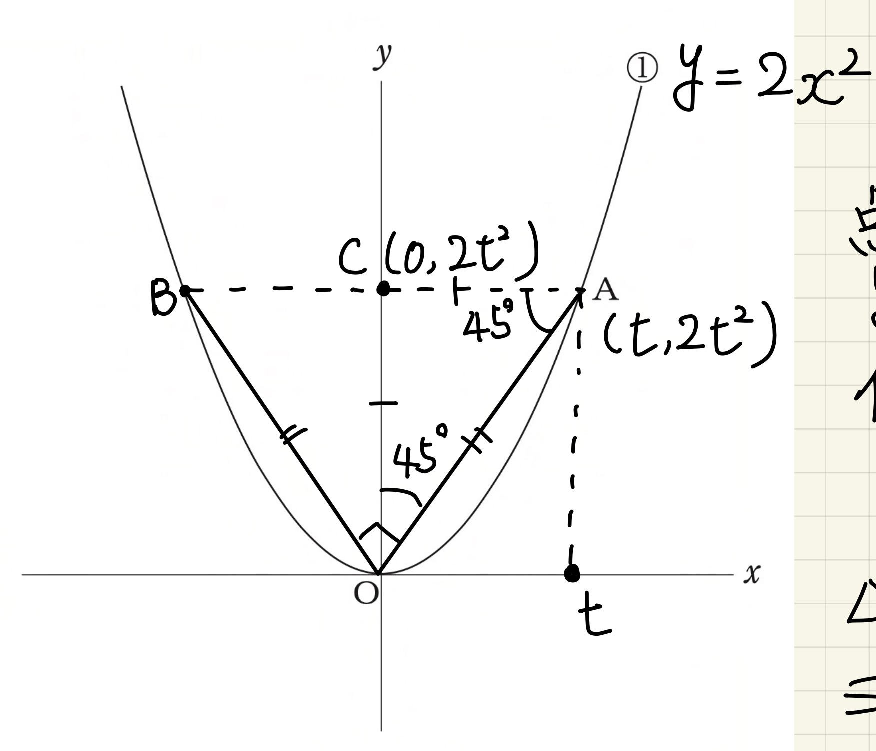
対称性から，$\angle ACO=90^\circ$

よって $\angle OAC=180^\circ-(90^\circ+45^\circ)=45^\circ$

$\angle COA=\angle OAC$ で，$\angle AOB=90^\circ$なので，

$\triangle OAC$も直角二等辺三角形

(1) $a=2$ のときを考える。




点Aの座標は
$y=2x^2$ に $x=t$ を
代入して
$(t, 2t^2)$.

$\triangle OAC$ は直角二等辺三角形なので.

$CA = CO$ —— ①

ここで, $CA = t$, $CO = 2t^2$ で, ①より

$t = 2t^2$ —— ②

$t>0$ より ② の両辺を $t$ で割ると.

$1 = 2t$ $\quad \therefore t = \frac{1}{2}$ Xの答え.

ここで, 表を埋めると,

| $a$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $t$ | 1 | $\frac{1}{2}$ |

$a=1$ のとき $t=1$ $\Rightarrow at=1$

$a=2$ のとき $t=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow at=1$

したがって, $a$ と $t$ の積は常に一定であり.

Yの答え

一定な値は 1 である。

Zの答え.

(2) $\triangle OAB$は、$OA=OB$の直角二等辺三角形である。

また、線分ABとy軸の交点をCとすると、

点Cは問題文に与えられていないため、点Cの説明を記載する。

$\triangle OAC$は、$CA=CO$の直角二等辺三角形となる。ここで、点A $(t, at^2)$で

$$CA=t, \quad CO=at^2$$

より

$$t=at^2$$

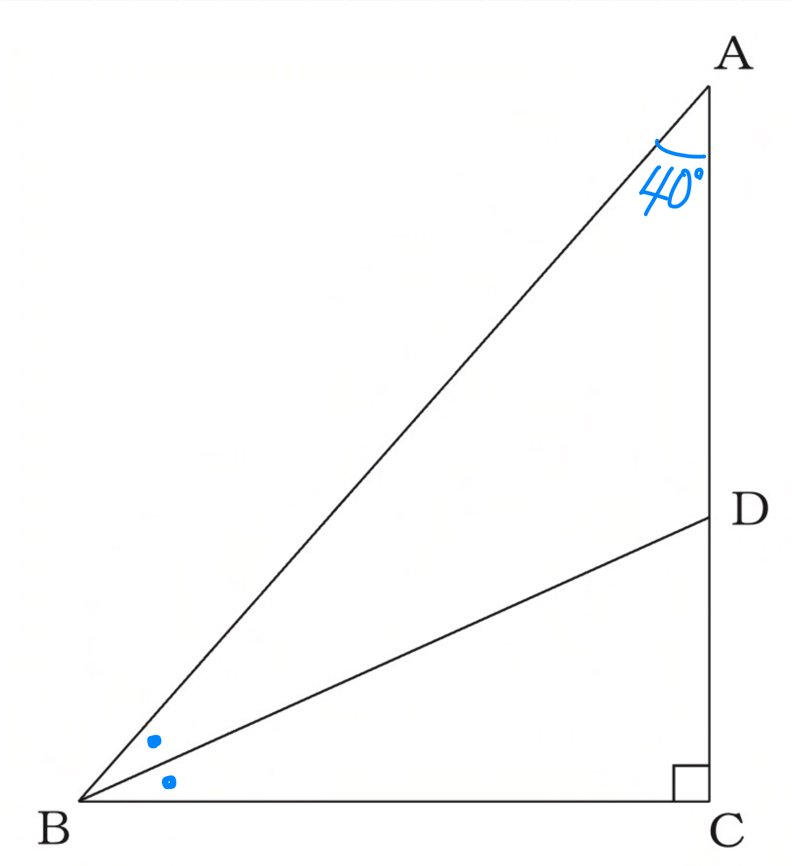
$t>0$より両辺をtで割ると

$$1=at$$ ⇒ $a \times t = 1$の意味

よって$at=1$と表せるので、aとtの積は常に一定であり、一定な値は1である。

$\boxed{4}$

問1




$\angle BAC = 40°$ より

$\angle CBA$

$= 180° - (90° + 40°)$

$= 50°$

よって、

$\angle DBA = \dfrac{50°}{2} = 25°$

$\therefore \angle ADB$

$= 180° - (40° + 25°)$

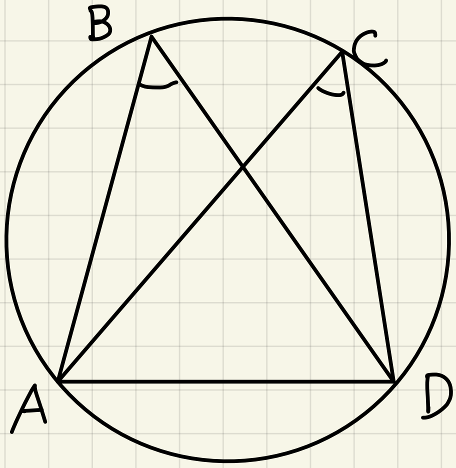
$= 115°$

問2

方針

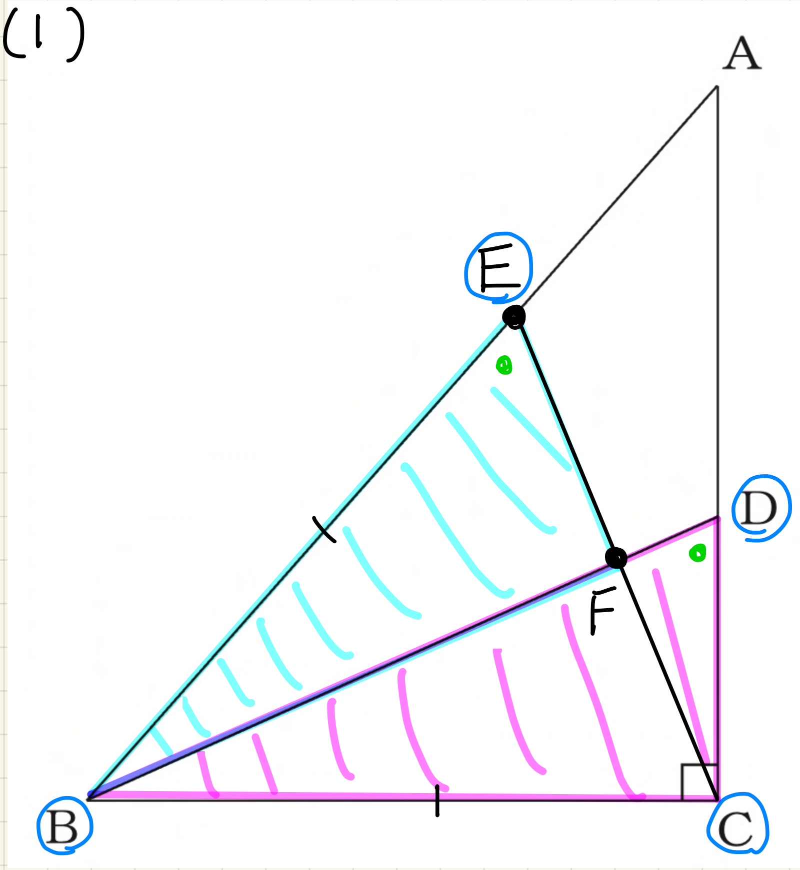
4つの点が1つの円周上にある

⇒ 円周角の定理の逆




$\angle BAD = \angle ACD$ ならば、4つの点 A, B, C, D は1つの円周上にある

(1)




○が1つの円周上にあることを証明したい。

2点、D, E が直線BCについて同じ側にあるので、

$\angle BEC = \angle BDC$ (ア)

であれば良い。

∠BECを含む三角形と、∠BDCを含む三角形が相似であることを示せれば、相似な三角形の対応する角は等しいので、∠BEC = ∠BDCを示すことができる

よって、△BFE と △BCD が相似であることを示したい。

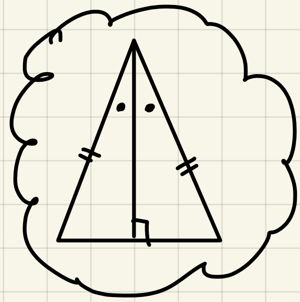
(イ) (ウ)

(2) △BFEと△BCDにおいて、

仮定より

$\angle EBF = \angle DBC$ ——①

(∠ABCの二等分線のため)



また、△BCEは、BC = BEの二等辺三角形であり、線分BFは、頂角の二等分線なので、

$\angle BFE = 90°$ ——②

②と仮定より、

$\angle BFE = \angle BCD = 90^\circ$ ―― ③

①, ③より、対応する2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle BFE \backsim \triangle BCD$

よって対応する角は、それぞれ等しいので、

$\angle BEF = \angle BDC$

したがって、D, Eが直線BCについて同じ側にあり、$\angle BEC = \angle BDC$ となるので、4点、B, C, D, E は、1つの円周上にある（証明終わり）.

# 5

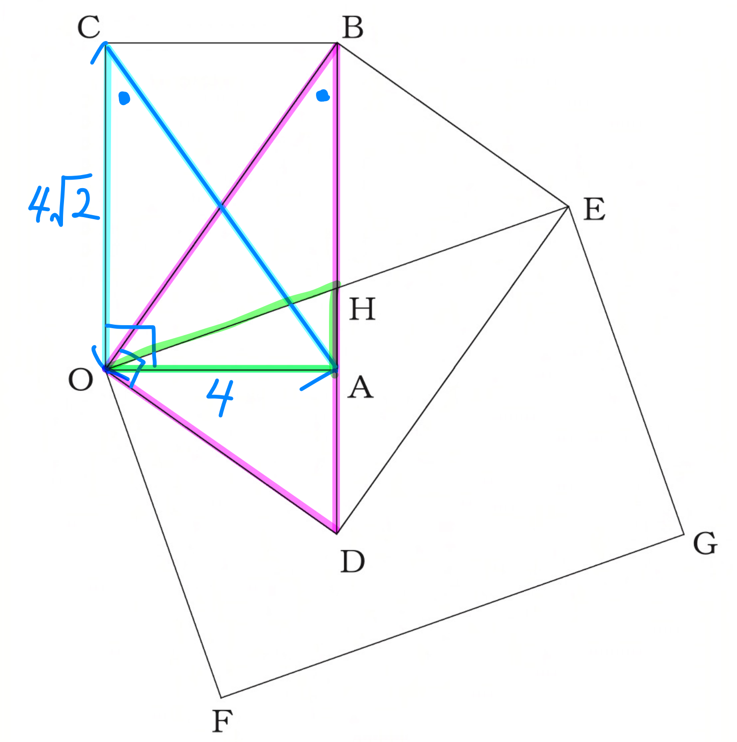
## 問1

(1) $OA = 4$ cm, $OC = 4\sqrt{2}$ cm で, 三平方の定理より

$$AC = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{16 + 32}$$
$$= \sqrt{48}$$
$$= 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

(2)

図2




$\triangle OBD$ と $\triangle OCA$ で,

$\angle BOD = \angle COA = 90^\circ$ —①

$\angle OBD = \angle OCA$ —②

①, ②より 2組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle OBD \backsim \triangle OCA$

$\therefore OD : OB = OA : OC$ —③

$OB = AC$ で, (1) より $AC = 4\sqrt{3}$ なので,

$OB = 4\sqrt{3}$

③より

$$OD : \underbrace{4\sqrt{3}}_{OB} = \underbrace{4}_{OA} : \underbrace{4\sqrt{2}}_{OC}$$

$a : b = c : d$
$\Rightarrow ad = bc$

$$4\sqrt{2} \times OD = 16\sqrt{3}$$

$$\therefore\ OD = \frac{16\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{16\sqrt{6}}{8}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

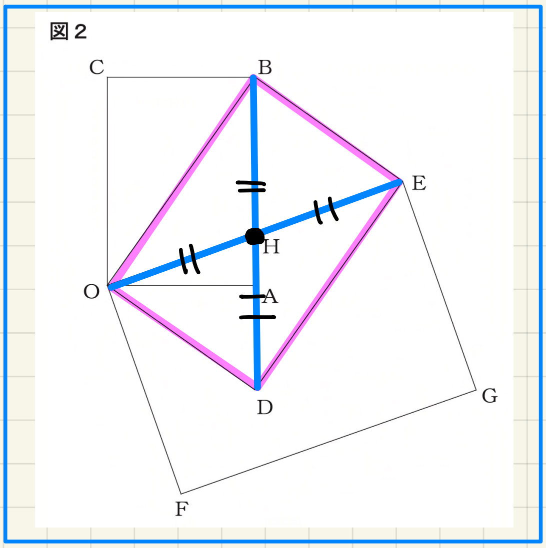
また、△OBDは直角三角形なので、三平方の定理より、

$$BD = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2}$$

$$= \sqrt{48 + 24}$$

$$= \sqrt{72}$$

$$= 6\sqrt{2}.$$




ここで、長方形ODEBの対角線OE, BDは、それぞれの中点で交わるので、

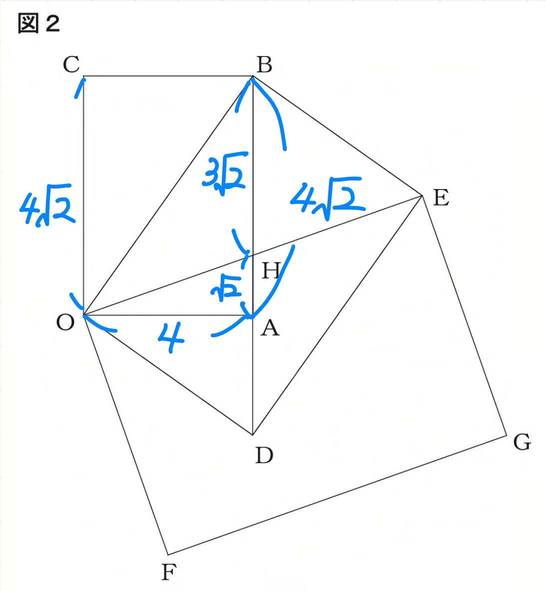
$$BH = \frac{1}{2}BD$$

$$= 3\sqrt{2}$$

また，$AH = AB - BH = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

よって，$\triangle OAH$ の面積は，

$$\triangle OAH = \frac{1}{2} \times OA \times AH$$
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$$




問2

$\boxed{\text{方針}}$

(1) $\sqrt{102n}$ が $a\sqrt{b}$ の形

⇒ $102n$ が整数の2乗を因数にもつ

(2) $a\sqrt{b}$ の形で表せない場合の数を考える。

(1) 102を素因数分解すると，

$$102 = 2 \times 3 \times 17$$

$\sqrt{102n}$ が $a\sqrt{b}$ の形で表すことができるのは，$102n$ が整数の2乗を因数に含むときである。

↳ $a \times a \times b \times c$ のように，2乗の因数（今回であれば $a^2$）が，1つ以上あれば良い。

$n$は、2つのサイコロを投げたときの，出た目の和なので、$2 \leqq n \leqq 12$。
17は根号の中に必ず残るので、2または3の素因数を持つ数が$n$となる。
よって
$n = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12$

参考

$n = 2$のとき、
$\sqrt{102n} = \sqrt{2 \times 3 \times 17 \times 2} = 2\sqrt{51}$

$n = 3$のとき
$\sqrt{102n} = \sqrt{2 \times 3 \times 17 \times 3} = 3\sqrt{34}$

$n = 4\ (= 2 \times 2)$のとき
$\sqrt{102n} = \sqrt{2 \times 3 \times 17 \times 4} = 2\sqrt{102}$
$4 \to 2 \times 2$

$n = 6\ (= 2 \times 3)$のとき、
$\sqrt{102n} = \sqrt{2 \times 3 \times 17 \times 6} = 6\sqrt{17}$
$6 \to 2 \times 3$

(2) $\sqrt{102n}$ が $a\sqrt{b}$ の形で表せない場合を考える。

$a\sqrt{b}$ の形で表せない $n$ は、(1) と逆なので、

$n = 1, 5, 7, 11$

・$n=1$ のとき、目の出方は 0 通り

($n$ は2つのサイコロの出た目の和なので)

・$n=5$ のとき、$(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)$ の 4 通り

・$n=7$ のとき、$(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)$ の 6 通り

・$n=11$ のとき、$(5,6), (6,5)$ の 2 通り

よって、$a\sqrt{b}$ の形で表せない $n$ の出方は、

$0+4+6+2=12$ 通り

サイコロの目の出方は、全部で $6\times6=36$ 通りなので、$a\sqrt{b}$ の形で表せる $n$ の出方は、

$36-12=24$ 通り

よって求める確率は、

$$\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$