2022年度　長野県

数学

KmKm

問1

(1) 与式 $= 5 - 2$
$= 3$

(2) 与式 $= -2x + 3$

(3) $84n$ の値が、ある自然数の2乗となるので
$84n$ を素因数分解したときに、
$$84n = (\qquad)^2$$
となれば良い
84を素因数分解すると、
$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$
よって、
$$84 \times n = 2^2 \times 3 \times 7 \times 3 \times 7$$
$$= 2^2 \times 3^2 \times 7^2$$
$$= (2 \times 3 \times 7)^2$$
よって、$n = 21$

(4) $x^2 = 4x$ を式変形すると、
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$\therefore\ x = 0,\ 4$ ⇒ 答えはウ

(5) a人が500円ずつ出したので、総額は
500a 円

b円の花束を買おうとしたところ、200円足りなかったので
$500a = b - 200$ ⇒ 答えは エ

(6) 中央値：データを小さい順に並べたときの真ん中の値。

〔資料〕

5, 8, 10, 10, 12, 15, 15, 15, 19, 20, 20, 23, 25, 27, 30, 35

中央値

よって、中央値は
$$\frac{15+19}{2} = \frac{34}{2} = 17 \text{ 分}$$

(7)
Aの起こる確率 + Aの起こらない確率 = 1
なので、
$$\text{Aの起こらない確率} = 1 - \frac{3}{8}$$
$$= \frac{5}{8}$$

(8)

$\underbrace{4}_{2^2} < \underbrace{6}_{\sqrt{6}^2} < \underbrace{9}_{3^2}$ より $2 < \sqrt{6} < 3$

したがって、

$\sqrt{6} = \underbrace{2}_{整数}.\underbrace{\cdots\cdots}_{小数}$

★ $\sqrt{6} \fallingdotseq 2.4494897\cdots$

この小数部分は、

$\sqrt{6} - 2$

$= 0.24494897\cdots$

よって、$\sqrt{6}$ の小数部分 a は、

$a = \sqrt{6} - 2$

と表すことができる。

求める値は、

$a(a+2) = (\underbrace{\sqrt{6}-2}_{a})(\underbrace{\sqrt{6}-2}_{a}\underbrace{+2}_{+2})$

$= (\sqrt{6}-2) \times \sqrt{6}$

$= 6 - 2\sqrt{6}$

(9) y は x に反比例するので、$y = \dfrac{a}{x}$ とおく。

注 y の単位は「秒」

図1より $x = 500$ のとき $y = \underbrace{180}_{3分=180秒}$ なので、

$$180 = \frac{a}{500} \Rightarrow a = 90000$$

よって，反比例の式は．

$$y = \frac{90\,000}{x}$$

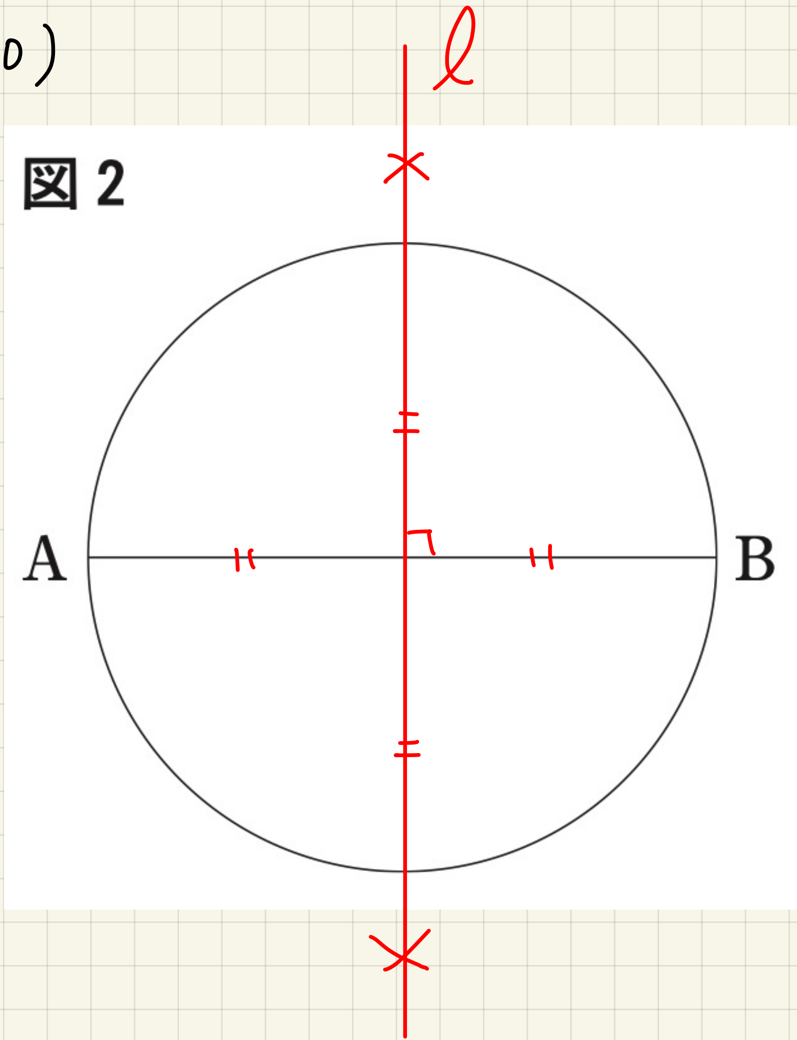
600Wのときの最適な加熱時間は

$$y = \frac{90\,000}{600} = 150\text{秒}$$

図1は○分☆秒表記なので，

150秒 = 2分30秒

(10)



合同な4つの図形に分ける

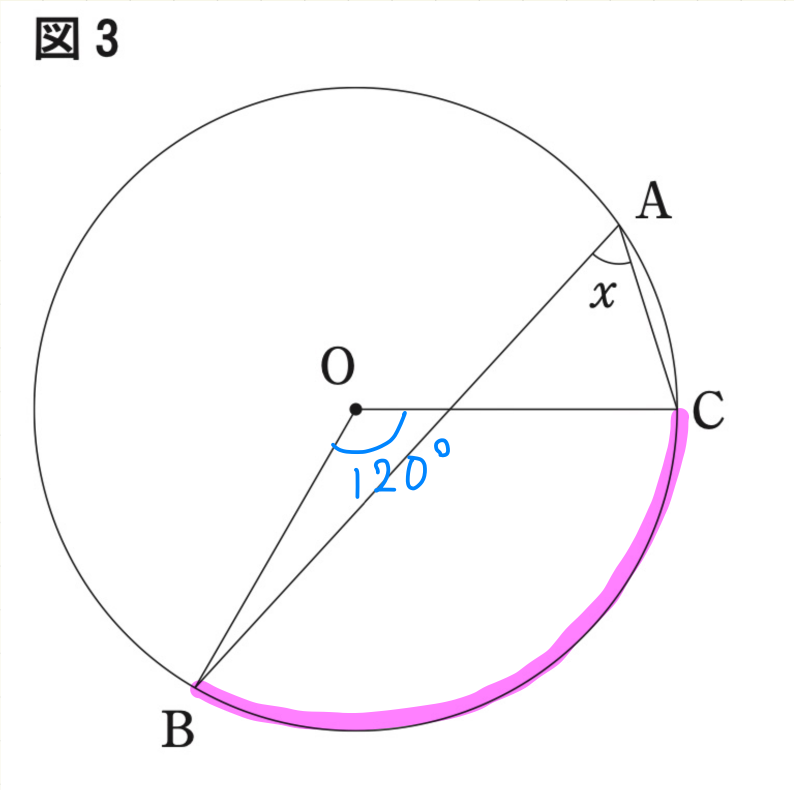
⇒円を4等分する

⇓

線分ABの垂直二等分線

(11)

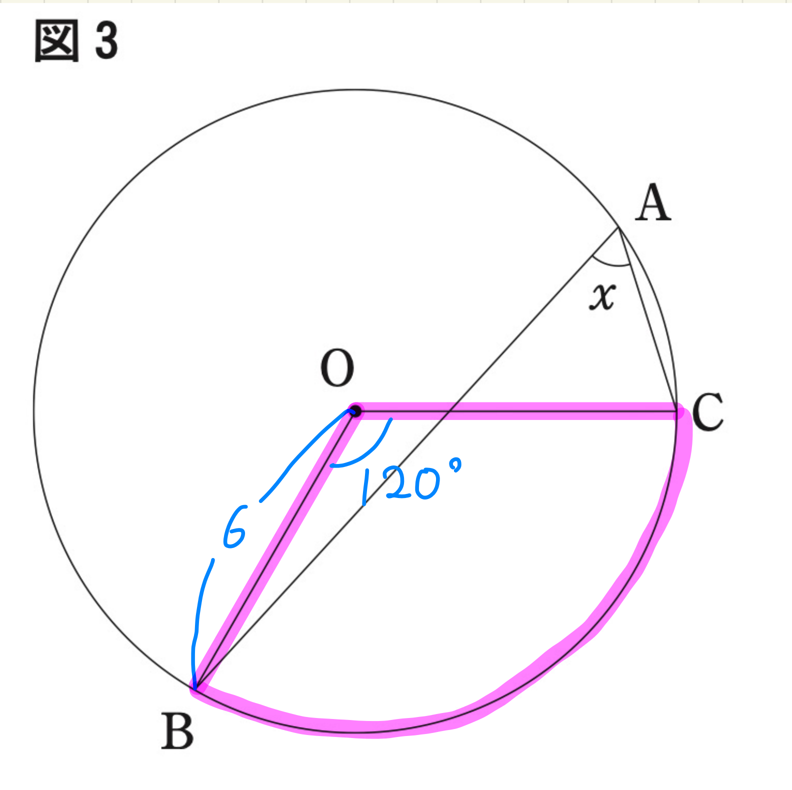
①



$\angle x$ は $\overset{\frown}{BC}$ の円周角で，中心角($\angle BOC$)が $120°$ なので．

$$\angle x = \frac{1}{2}\angle BOC$$
$$= \frac{1}{2} \times 120°$$
$$= 60°$$

②



おうぎ形の面積

$= 半径 \times 半径 \times \pi \times \dfrac{中心角}{360°}$

より

$$6 \times 6 \times \pi \times \frac{120}{360}$$
$$= 6 \times 6 \times \pi \times \frac{1}{3}$$
$$= 12\pi \ cm^2$$

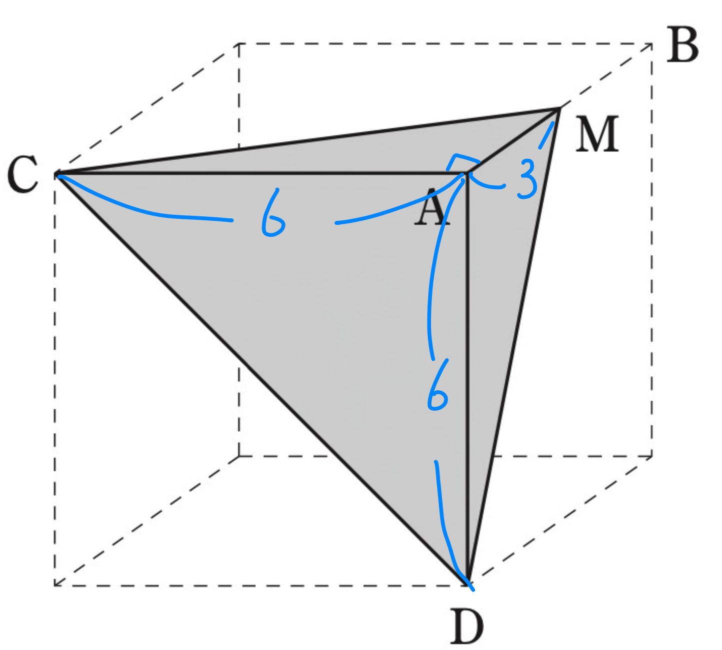
問2

(1)

① ねじれの位置：平行ではなく、交わらない直線。
よって、ねじれの位置にある辺は、辺CM

②

図1



$\angle CAM = 90^\circ$ なので、
三角錐の体積は、

$\underbrace{\triangle ACD}_{\text{底面積}} \times \underbrace{AM}_{\text{高さ}} \times \frac{1}{3}$

点MはABの中点なので、
$AM = 3$

よって、求める体積は

$$\underbrace{6 \times 6 \times \frac{1}{2}}_{\triangle ACD} \times \underbrace{3}_{AM} \times \frac{1}{3} = 18\ cm^3$$

(2)

① コイの総数を x 匹とする。
手順1より、印のついたコイの割合は

$\frac{50}{x}$ … x匹中50匹に印あり

手順2より，印のついたコイの割合は

$\dfrac{9}{30}$ …30匹中9匹に印あり

魚の総数を推定すると，これらの割合は変わらないので，

$$\frac{50}{x} = \frac{9}{30} \left(= \frac{3}{10} \right)$$

両辺に x をかけて

$$50 = \frac{3}{10}x$$

$\frac{3}{10}x = 50$

$$x = 50 \times \frac{10}{3}$$

$$= \frac{500}{3}$$

$$= 166.66\cdots$$

1の位を四捨五入

$$\fallingdotseq 170\text{匹}$$

② 標本調査：母集団から標本を抽出して調査し，統計的に全数を推定する.

全数調査：母集団を全て調査対象とする

ア：国内の有権者全員に調査をするわけではないので標本調査

イ：国内に住んでいる全ての人，世帯を対象としているので全数調査

ウ：学校内の全ての生徒に行うので，全数調査

エ：テレビを見ている人全員に調査をするわけではないので，標本調査

よって，答えは，ア，エ

(3)

① 2019年度における資源ごみの排出量

$$\underbrace{\frac{25}{100}}_{\text{2019年度の資源ごみの割合(25\%)}} \times \underbrace{y}_{\text{2019年度のごみの排出量}}$$

② 資料より資源ごみの排出量は、

2019年度は、2014年度と比べて25%増えた。

$$\frac{25}{100}y = \frac{16}{100}x \times \frac{125}{100}$$

よって、答えは、

$$\frac{16}{100}x \times \frac{125}{100}$$

問題文から
約分しなくても良い

③ 可燃ごみの排出量を求めたい。

方針

②より4種類のごみの排出量の合計を求める

⇒ 資料の割合から可燃ごみの排出量を求める。

(解答)

②の連立方程式を解く。

$$\begin{cases} x - y = 200 & \text{—— ①} \\ \dfrac{16}{100}x \times \dfrac{125}{100} = \dfrac{25}{100}y & \text{—— ②} \end{cases}$$

②の式を整理すると、

$16x \times 125 = 2500y$ … 両辺 ×10000

$16x = 20y$ … 両辺 ÷125

$4x = 5y$ …両辺÷4

よって、

$$\begin{cases} x - y = 200 & \text{—①} \\ 4x = 5y & \text{—③} \end{cases}$$

①×4より

$$4x - 4y = 800$$

③を代入して

$$\underset{4x}{5y} - 4y = 800$$

$$y = 800$$

①に代入して

$$x - 800 = 200$$

$$x = 1000$$

よって、

2014年度の4種類のごみの排出量：1000g

2019年度の4種類のごみの排出量：800g

資料の割合から

2014年度の可燃ごみの排出量は、66%なので、

$$1000 \times \frac{66}{100} = 660g$$

2019年度の可燃ごみの排出量は、70%なので、

$$800 \times \frac{70}{100} = 560g$$

したがって，2019年度は，2014年度と比べて
減った　イ

問3　エ

(1) 荷物の大きさが 65 cm なので，表より
70 cm 以下の料金となる。
よって料金は 1000円

また，100 cm 以下は 1300円で，140 cm 以下は
1800円なので，1500円以内で送ることが
できる荷物の大きさは 100 cm 以下

よって，答えは イ

(2) 荷物の大きさが決まると，料金は
ただ1つに決まる。
よって，料金は荷物の大きさの関数である。

例
荷物の大きさが 120 cm のとき，料金は
140 cm 以下が適用され 1800円

また，荷物の大きさが 90 cm のとき，料金は
100 cm 以下が適用され 1300円

以上のように，荷物の大きさが決まると，料金は
ただ1つに決まる。

(3)

A社の料金は、140cm以下が適用されるので、
1800円

B社は80cmまでは900円で、80cmを超えると
10cmごとに200円加算される。

$\Rightarrow \underbrace{900\text{円}}_{\sim 80\text{cm}} + \underbrace{200\text{円}}_{80\sim 90\text{cm}} + \underbrace{200\text{円}}_{90\sim 100\text{cm}} + \underbrace{200}_{100\sim 110\text{cm}} + \underbrace{200}_{110\sim 120\text{cm}}$

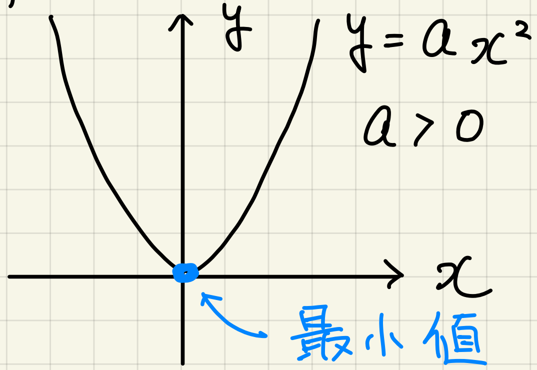
$= 1700$円

よって、B社の方が100円安い

II.

(1)

ア：

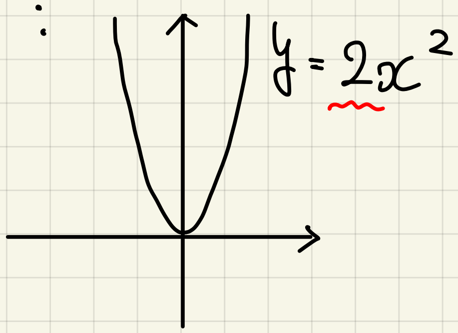


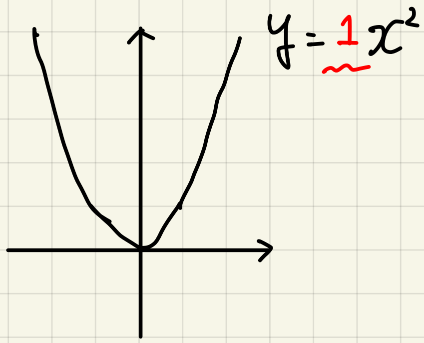
$a>0$ のとき、$y=ax^2$ のグラフは、下に凸となる。

したがって、x の値が 0 のとき y の値も 0 となり最小となる。

正しい

イ：





$y=x^2$ と $y=2x^2$ のグラフを比べると、$y=x^2$ の方がグラフの開き方は大きい。

誤り

ウ：1次関数では、変化の割合は、傾き(=比例定数)と等しいが、2次関数は、比例定数と異なる。

参考　$y=ax^2$ で x が p から q まで変化するとき、変化の割合は、$a(p+q)$ で、p, q の値により変化する。⇒一定でない

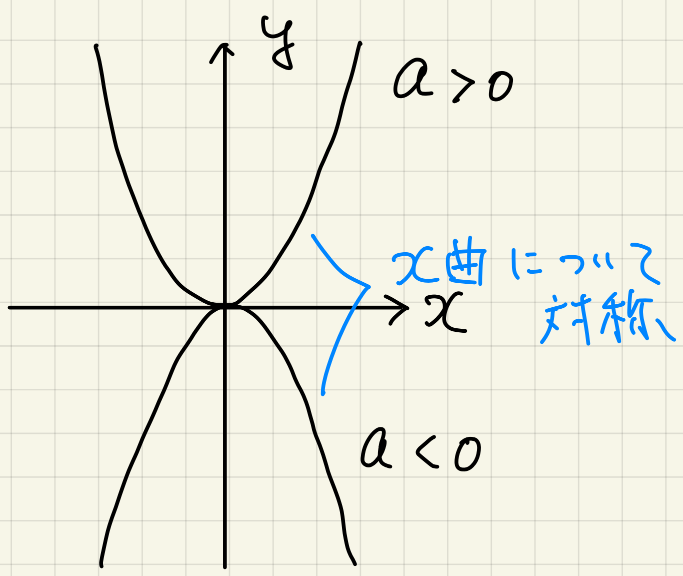
よって、正しい

エ：$y=ax^2$ のグラフは放物線といわれる曲線。

なお、双曲線は、反比例 $y=\frac{a}{x}$ のグラフである。

よって誤り

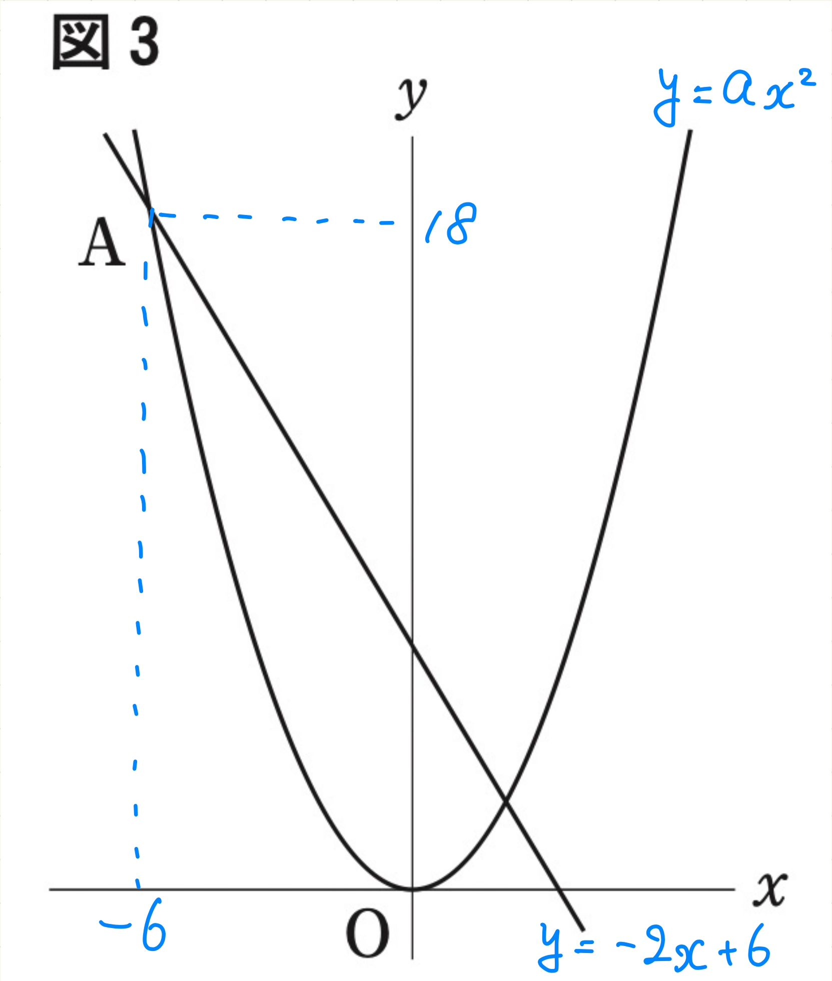
オ



正しい

よって、答えは、ア、ウ、オ

(2)



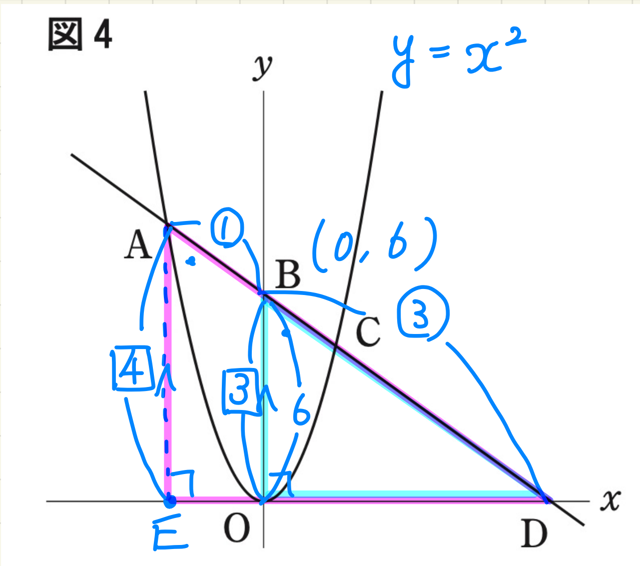
点Aは $y=-2x+6$ のグラフ上にあるので、
$x=-6$ を代入して、

$$y=-2\times(-6)+6$$
$$=12+6$$
$$=18$$

また、点Aは $y=ax^2$ のグラフ上にあるので、
$x=-6,\ y=18$ を代入して、

$$18=a\times(-6)^2$$
$$36a=18$$
$$a=\frac{1}{2}$$

(3)
①



図のように点Eをとる。
△AEDと△BODにおいて、
AE // BOより同位角が等しいので、
$\angle AED=\angle AOD=90^\circ$ —①

$\angle EAD = \angle OBD$ — ②

①,② より2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle AED \sim \triangle BOD$

対応する辺の比は等しいので、

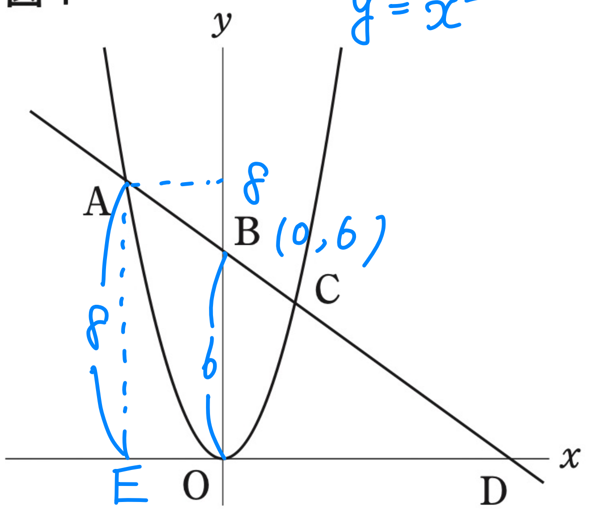
$$\underbrace{AD}_{AB+BD=④} : \underbrace{BD}_{③} = AE : BO = 4 : 3$$

点Bの座標は $(0, 6)$ なので、$BO = 6$ よって、

$$AE : \underbrace{BO}_{6} = 4 : 3$$

$$3AE = 24 \Rightarrow AE = 8$$

図4



よって点Aのy座標は8.

点Aは $y = x^2$ のグラフ上にあるので、

$$8 = x^2 \quad x = \pm\sqrt{8}$$

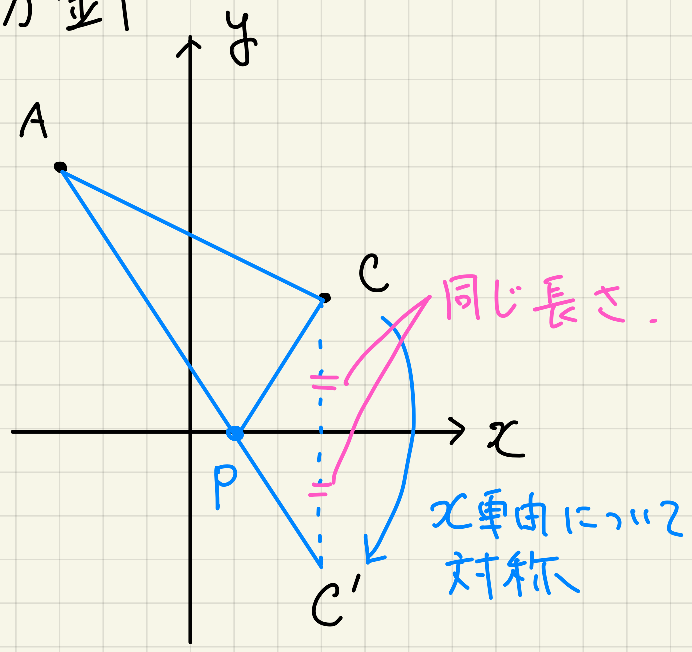
$$\therefore x = \pm 2\sqrt{2}$$

点Aのx座標は負なので、$x = -2\sqrt{2}$.

よって、求める座標は $(-2\sqrt{2}, 8)$

② 難問

方針



x軸上に点Pをとり

△APCの周の長さが最短

⇓

点A, 点Cは固定なので、

ACの長さは不変。

したがって、AP+PCが最短

となれば良い

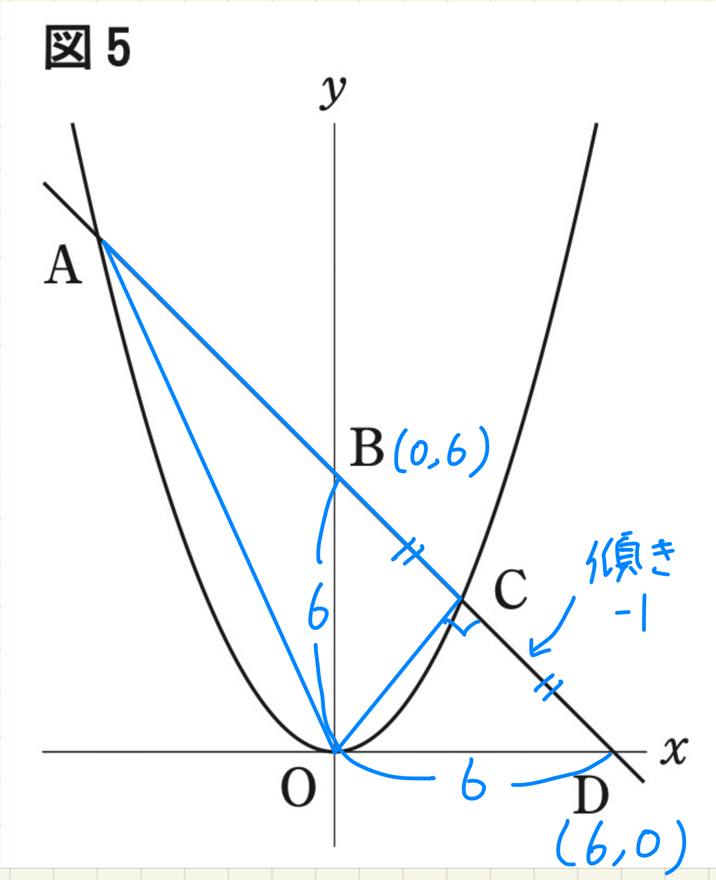
⇓

点Cについて、x軸と対称

な点をC′とすると、A, P, C′

が一直線上にあるとき、

$\text{AP}+\underbrace{\text{PC}'}_{=\text{PC}}$ は最短



直線ADの傾きが −1

なので、OB = OD = 6

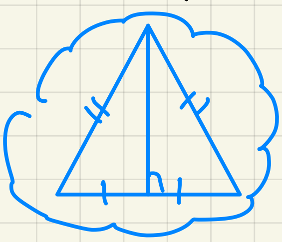
よって、点Dの座標は (6, 0)

△OBDは二等辺三角形で、

OC⊥BDなので、

BC = CD

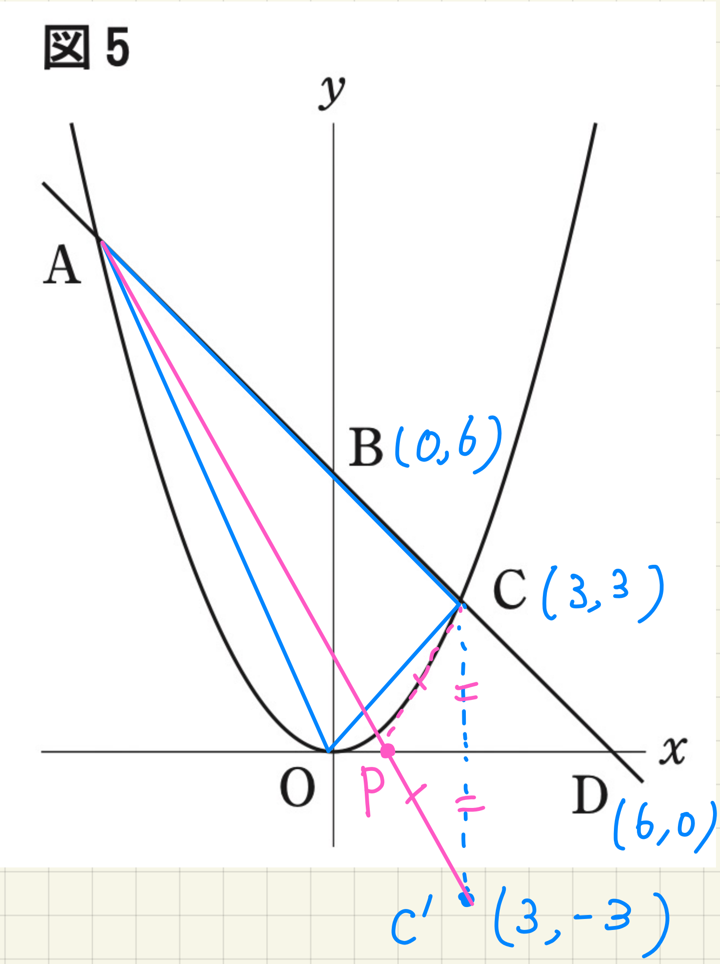
よって、点CはBDの中点、



よって，点Cの座標は

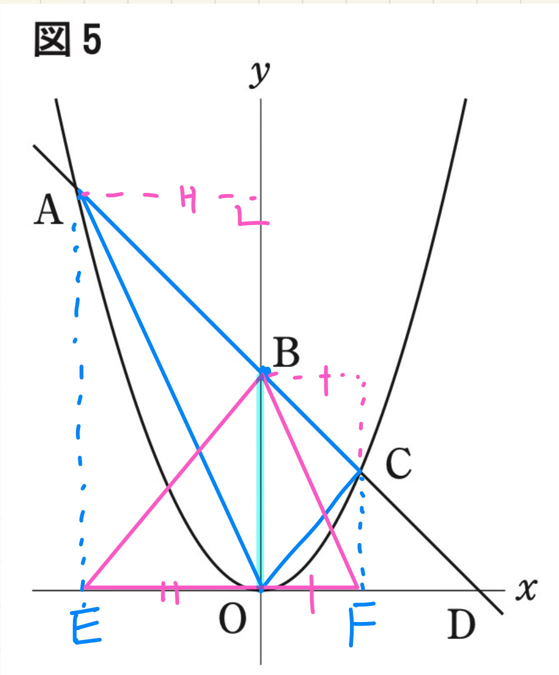
x : $\dfrac{0+6}{2} = 3$　　$\dfrac{\text{点Bの}x\text{座標} + \text{点Dの}x\text{座標}}{2}$

y : $\dfrac{6+0}{2} = 3$　　$\dfrac{\text{点Bの}y\text{座標} + \text{点Dの}y\text{座標}}{2}$



AP+PCが最短
⇒AP+PC'が最短
となれば良い。
C'はCについてx軸について対称なので，
C'(3, -3).

よって点Aの座標が求まれば点Pの座標が分かる.
⇓
点Aの座標を求める.



図のように点E, Fをとる。
△OABと△OEBにおいて，
BOを底辺とすると高さが等しいので，△OAB = △OEB.

また，△OBCと△OBFにおいて，
BOを底辺とすると，高さが等しいので △OBC = △OBF

よって

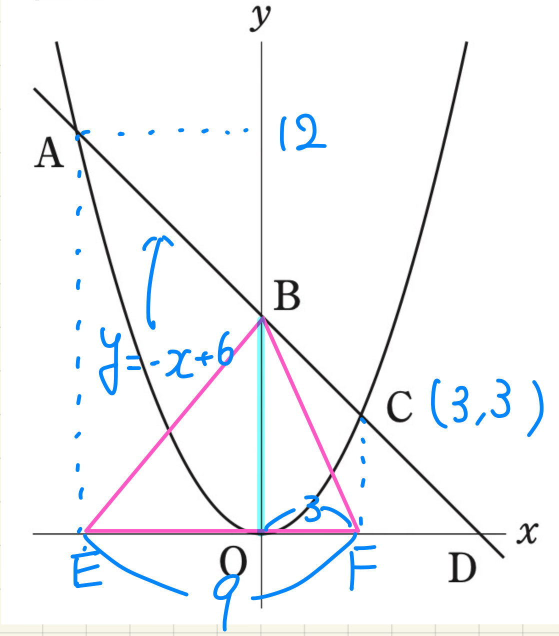
$$\underbrace{\triangle AOC}_{\triangle} = \triangle OAB + \triangle OBC$$
$$= \triangle OED + \triangle OBF$$
$$= \underbrace{\triangle BEF}_{\triangle}$$

△AOCの面積は27で，BO=6より

$$EF \times \underbrace{BO}_{6} \times \frac{1}{2} = 27$$

$$EF = 27 \times 2 \div 6$$
$$= 9.$$

図 5



よって，左の図より

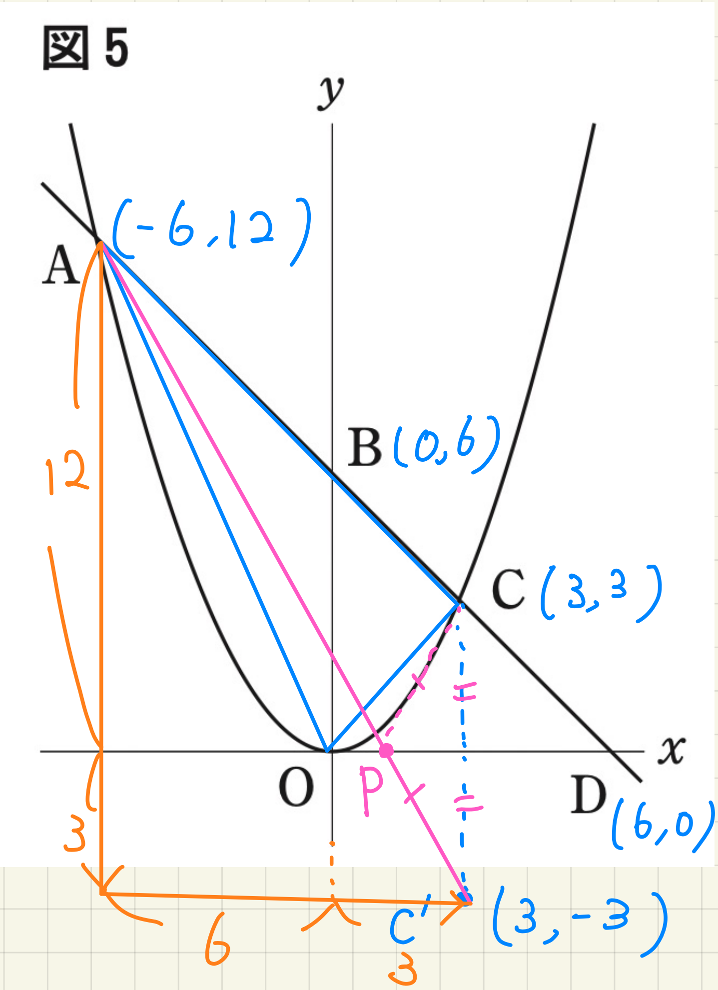
$$EO = 9 - 3 = 6$$

⇒ 点Aのx座標は -6.

点Aは $y = -x+6$ のグラフ上にあるので

$$y = -(-6) + 6$$
$$= 12$$

よって，点Aの座標は $(-6, 12)$



直線AC′の式を $y=ax+b$ とおくと、
$A(-6,12)$, $C'(3,-3)$ を通るので、変化の割合は、

$$\frac{yの増加量}{xの増加量}=\frac{-15}{9}=-\frac{5}{3}$$

よって $a=-\frac{5}{3}$

傾き＝変化の割合

よって、直線AC′の式は、$y=-\frac{5}{3}x+b$ で、これが、$C'(3,-3)$ を通るので、

$$-3=-\frac{5}{3}\times 3+b$$

$b=-3+5$

$$b=2$$

よって、AC′の式は、$y=-\frac{5}{3}x+2$。点Pは、この直線上にあり、かつ、x 軸上 $(y=0)$ にあるので、

$$0=-\frac{5}{3}x+2$$

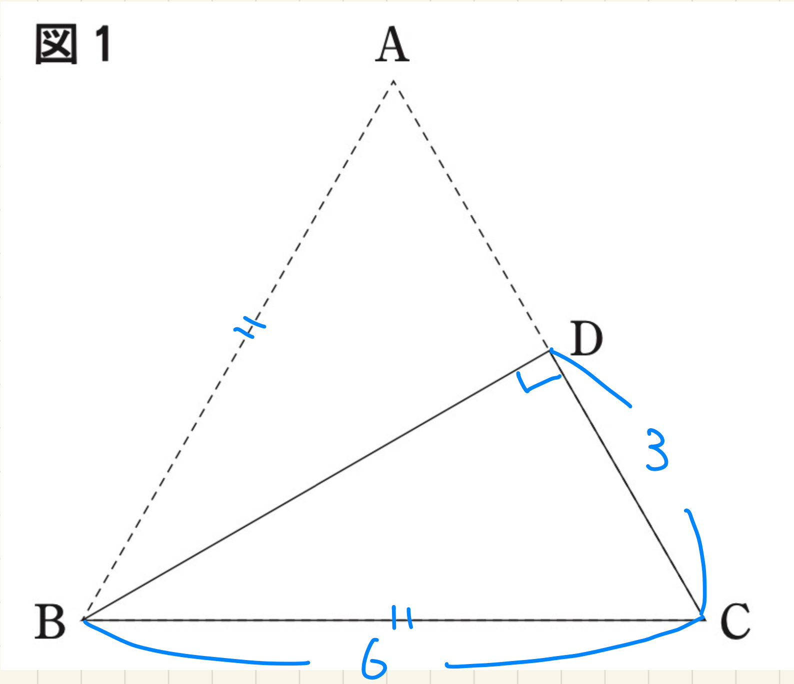
$$\frac{5}{3}x=2$$

$$x=2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$$

問4

I

(1)



△ABCは正三角形で、頂点Aが頂点Cに重なるように折ったので、

$\angle BDC = 90°$

$AD = DC = 3cm$

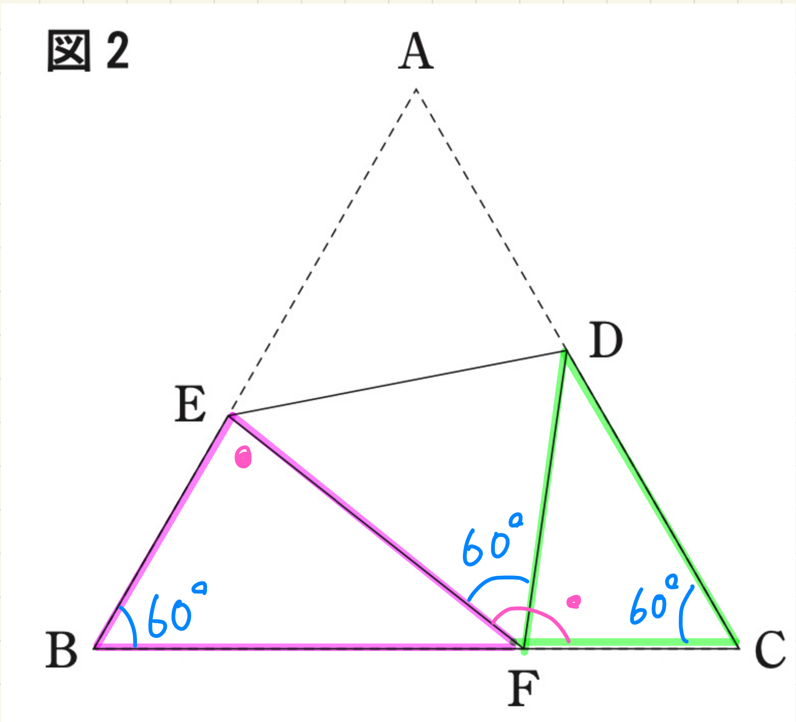
△BDCで三平方の定理より

$BD = \sqrt{6^2 - 3^2}$

$\sqrt{36-9} = \sqrt{27}$

$= 3\sqrt{3}$ cm

(2)



△EBFと△FCDについて、

△ABCは正三角形で、正三角形の1つの内角は、60°だから

$\angle EBF = \angle FCD = 60°$ ——①

正三角形の頂点Aが辺BC上にくるように折り曲げたので、

$\angle EFD = 60^\circ$ —— ②

三角形の1つの外角は そのとなりにない2つの内外の和に等しいので,

$$\angle FEB + \underbrace{\angle EBF}_{60^\circ} = \angle EFC$$

$$= \underbrace{\angle EFD}_{60^\circ} + \angle DFC \quad \text{—— ③}$$

①,②,③より

$\angle FEB + 60^\circ = 60^\circ + \angle DFC$

よって

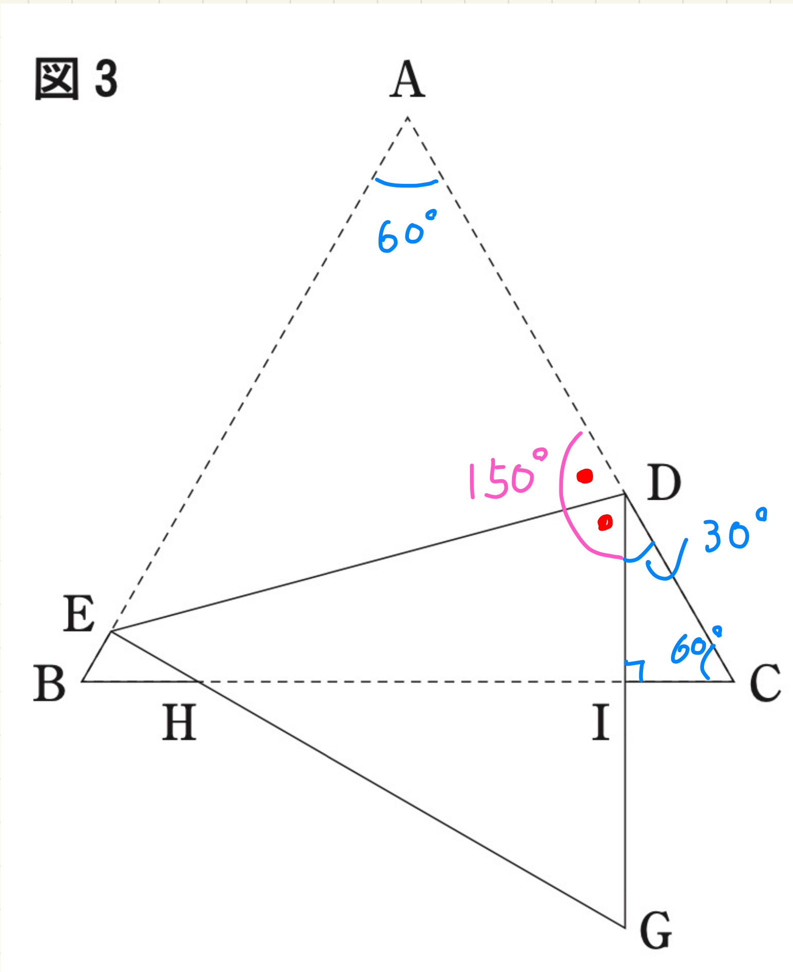
$\angle FEB = \angle DFC$ —— ④

①,④から,2組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle EBF \backsim \triangle FCD$ (証明終わり)

(3)

①



EDは折り目の線分なので,

$\angle ADE = \angle GDE$

また,$\angle ACB = 60^\circ$,

$\angle DIC = 90^\circ$ より

$\angle CDI$

$= 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)$

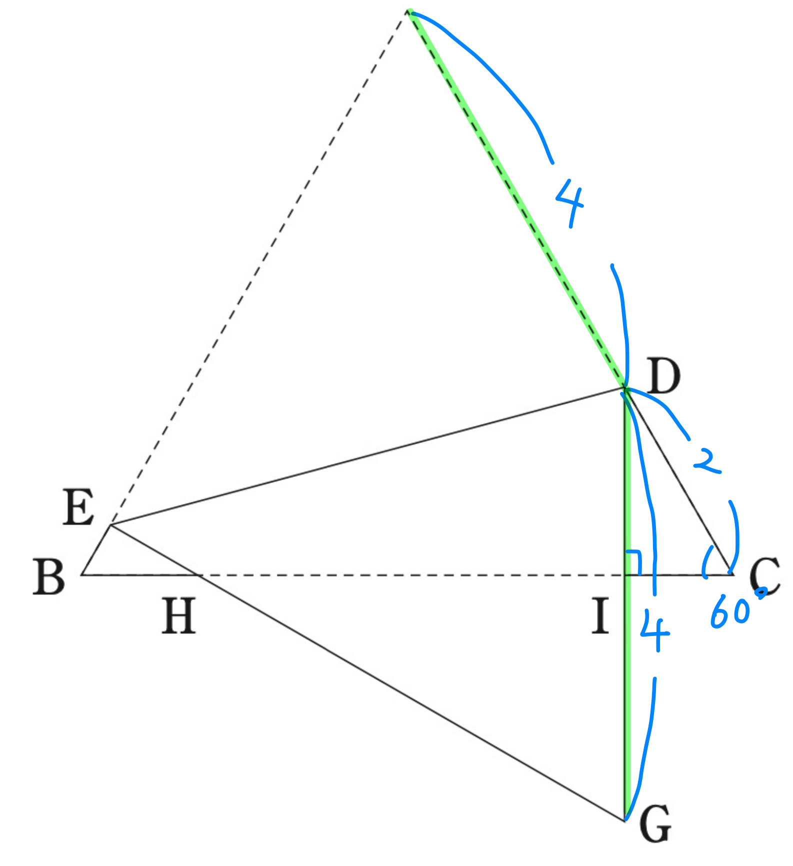
$= 30^\circ$

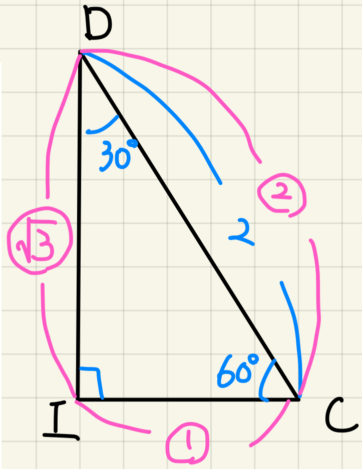
直線は180°なので、

$$\angle EDG = (180^\circ - 30^\circ) \div 2$$
$$= 75^\circ$$

②

図 3





△DICは30°-60°-90°の直角三角形なので

$IC = 1$ cm,

$DI = \sqrt{3}$ cm

また折り返しから

$AD = GD = 4$ cm

よって

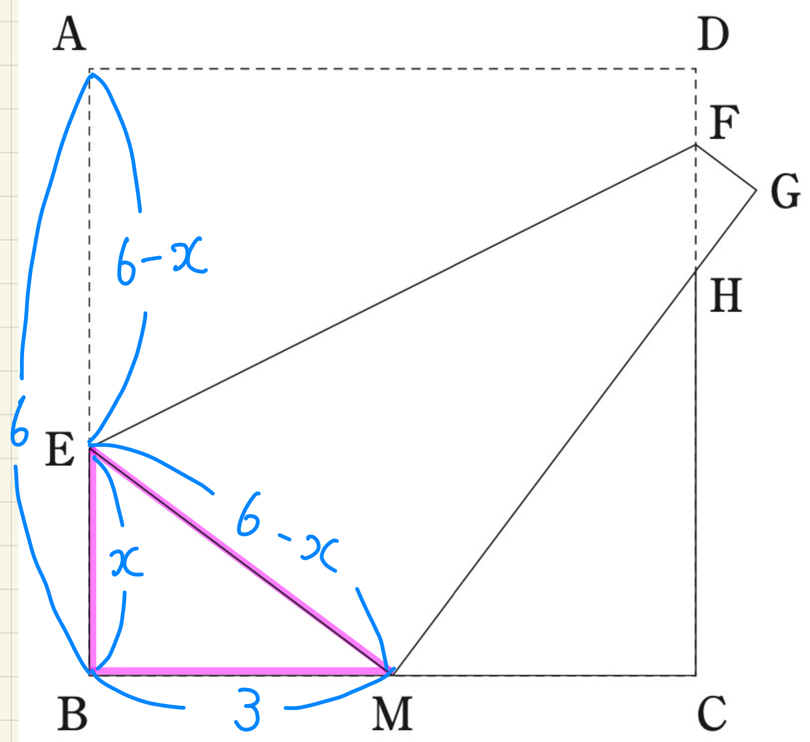
$$GI = GD - DI$$
$$= 4 - \sqrt{3} \text{ cm}$$

Ⅱ

(1)

①

図 4



BEの長さを x cm とする。

$$AE = AB - BE$$
$$= 6 - x$$

また、折り返しから

$$AE = EM = 6 - x.$$

点Mは BCの中点なので、$BM = 3$.

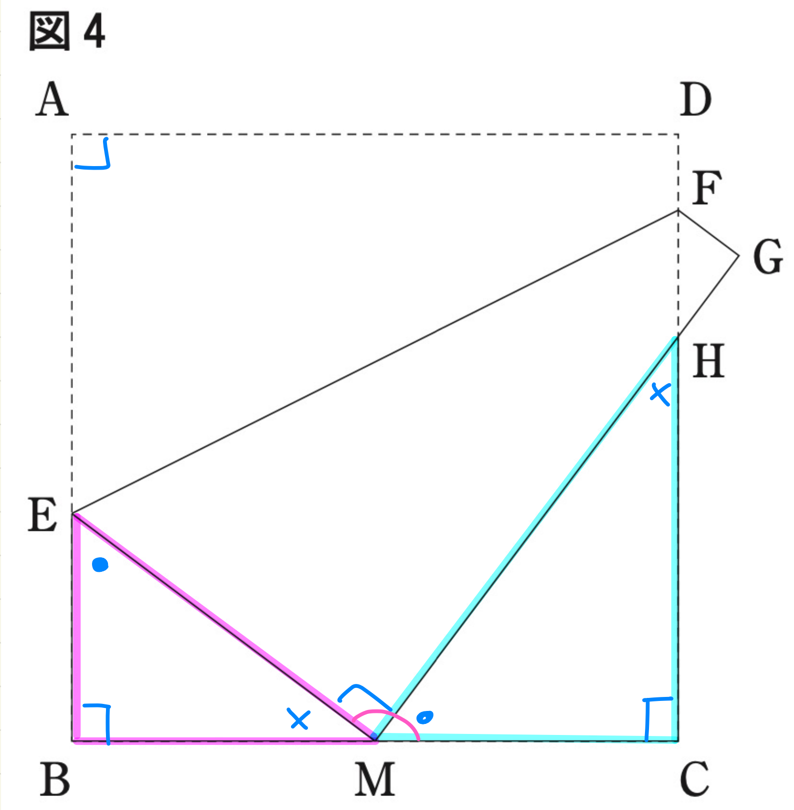
よって△EBMで三平方の定理より

$$(6-x)^2 = x^2 + 3^2$$

式を整理して、

$$x^2 - 12x + 36 = x^2 + 9$$
$$-12x = -27$$
$$x = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

②



$\triangle EBM$ と $\triangle MCH$ において、□ABCD は正方形なので、

$\angle EBM = \angle MCH = 90^\circ$ —①

また、折り返しから

$\angle EAD = \angle EMG = 90^\circ$ —②

三角形の1つの外角はそのとなりにない2つの内外の和に等しいので、

$$\angle BEM + \underbrace{\angle EBM}_{90^\circ} = \angle EMC$$

$$= \underbrace{\angle EMH}_{90^\circ} + \angle HMC \quad \text{—③}$$

①、②、③より

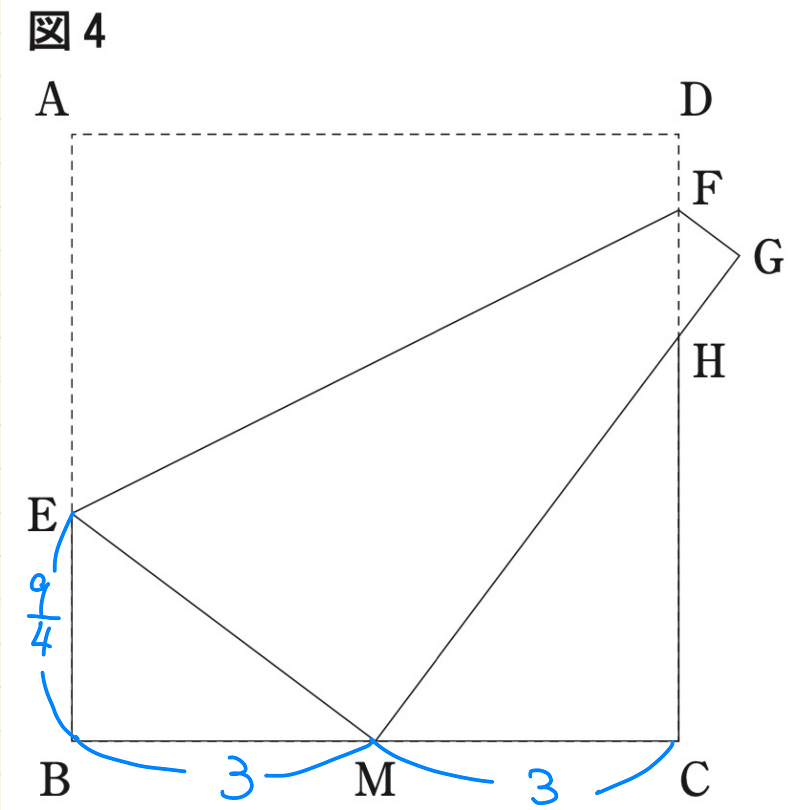
$\angle BEM + 90^\circ = 90^\circ + \angle HMC$

よって

$\angle BEM = \angle HMC$ —④

①、④から、2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle EBM \backsim \triangle MCH$



対応する辺の比は
等しいので，

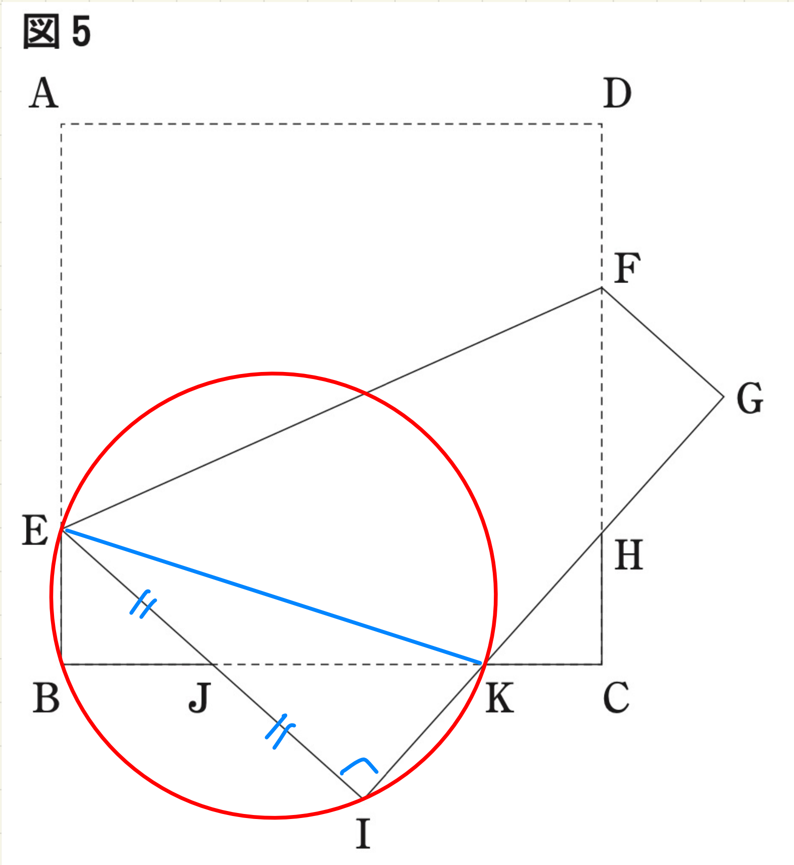
$$\underbrace{EB}_{\frac{9}{4}} : \underbrace{MC}_{3} = \underbrace{BM}_{3} : CH$$

よって，

$$\frac{9}{4}CH = 9$$

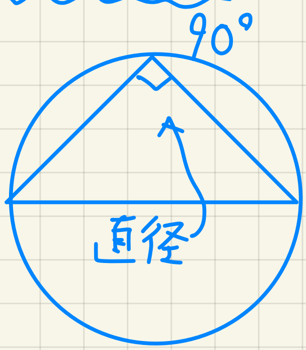
$$CH = 4\ \text{cm}$$

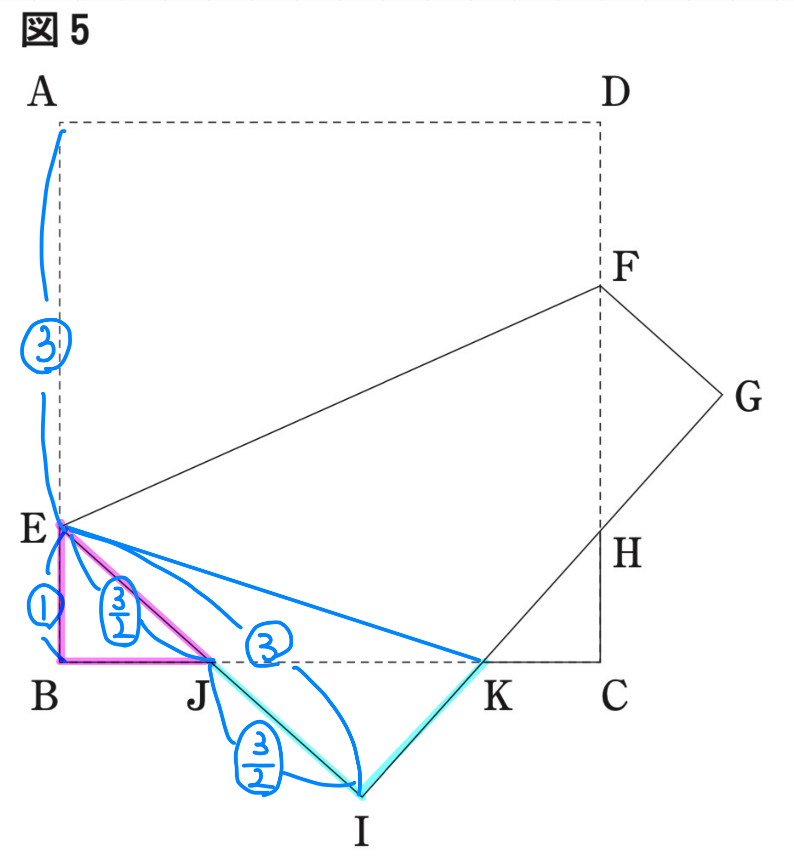
(2)



折り返しから
$\angle EAD = \angle EIK = 90^\circ$
4点 E，B，I，K は同じ円周上にあるので，
左の図のような円となる。

直径に対する円周角
より，求める円の直径は
EK の長さとなる。





△EBJと△KIJ
において,
$\angle EBJ = \angle KIJ = 90^\circ$ ―①
対頂角は等しいので,
$\angle BJE = \angle IJK$ ―②
①,②より2組の角がそれぞれ等しいので,
△EBJ ∽ △KIJ

$EB = \frac{1}{4}AB$ から, EB = ① とすると, ○は比を表す.

AE = ③

折り返しから, AE = EI なので,
EI = ③
EJ = JI なので,
EJ = JI = $\frac{3}{2}$

△EBJで三平方の定理より
$BJ = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2}$ $\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$
$= \frac{\sqrt{5}}{2}$

相似な図形の対応する辺の比は等しいので,
$\underbrace{EB}_{1} : KI = \underbrace{BJ}_{\frac{\sqrt{5}}{2}} : \underbrace{IJ}_{\frac{3}{2}}$

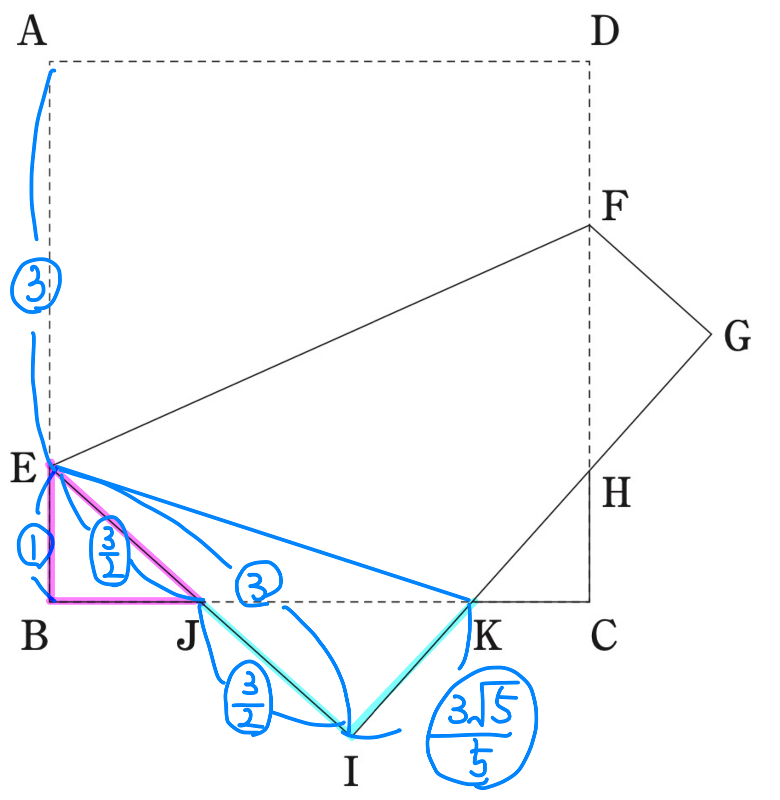
よって、

$$\frac{\sqrt{5}}{2}KI = \frac{3}{2}$$

$$KI = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$KI = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

図 5



$AB = 6\,cm$ なので、

$$EB = \frac{1}{4}AB$$
$$= \frac{1}{4} \times 6$$
$$= \frac{3}{2}\ cm$$

よって、

$$\underbrace{EB}_{\frac{3}{2}cm} : KI = 1 : \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

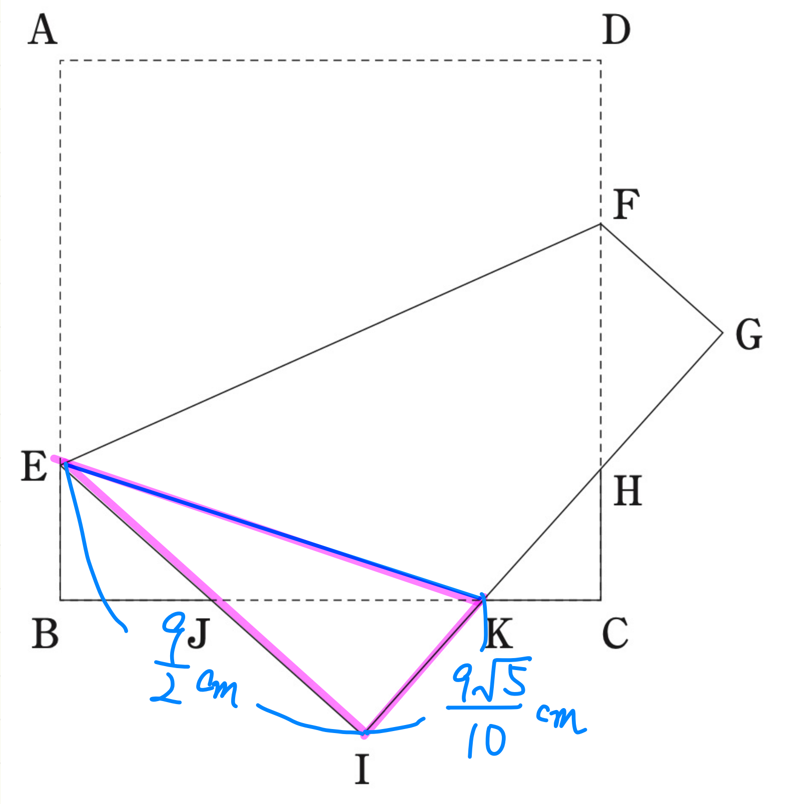
$$KI = \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{5}}{5}$$
$$= \frac{9\sqrt{5}}{10}\ cm$$

同様に、

$$\underbrace{EB}_{\frac{3}{2}cm} : EI = 1 : 3$$

$$EI = 3 \times \frac{3}{2}$$
$$= \frac{9}{2}\ cm$$

図 5



△EIKで三平方の定理より

$$EK = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{5}}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{405}{100} + \frac{81}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{405}{100} + \frac{2025}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{2430}{100}}$$

$$= \frac{9\sqrt{30}}{10} \text{ cm}$$