2022年度　大阪府

数学　　　C問題

Kmkm

1.

(1) 与式 $= \dfrac{9a-3b}{12} - \dfrac{2a-4b}{12}$

$= \dfrac{7a+b}{12}$

(2) $\begin{cases} x-16y+10 = -8y \\ 5x-14 = -8y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-8y = -10 & —— ① \\ 5x+8y = 14 & —— ② \end{cases}$

①+② より

$6x = 4 \quad \therefore x = \dfrac{2}{3}$

$x = \dfrac{2}{3}$ を ① に代入して

$-8y = -10 - \dfrac{2}{3}$

$= -\dfrac{32}{3}$

$\therefore y = \dfrac{4}{3}$

(3) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$x = \sqrt{15} + \sqrt{5}$, $y = \sqrt{15} - \sqrt{5}$ を代入して.

$(\sqrt{15} + \sqrt{5} + \sqrt{15} - \sqrt{5})(\sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{15} + \sqrt{5})$

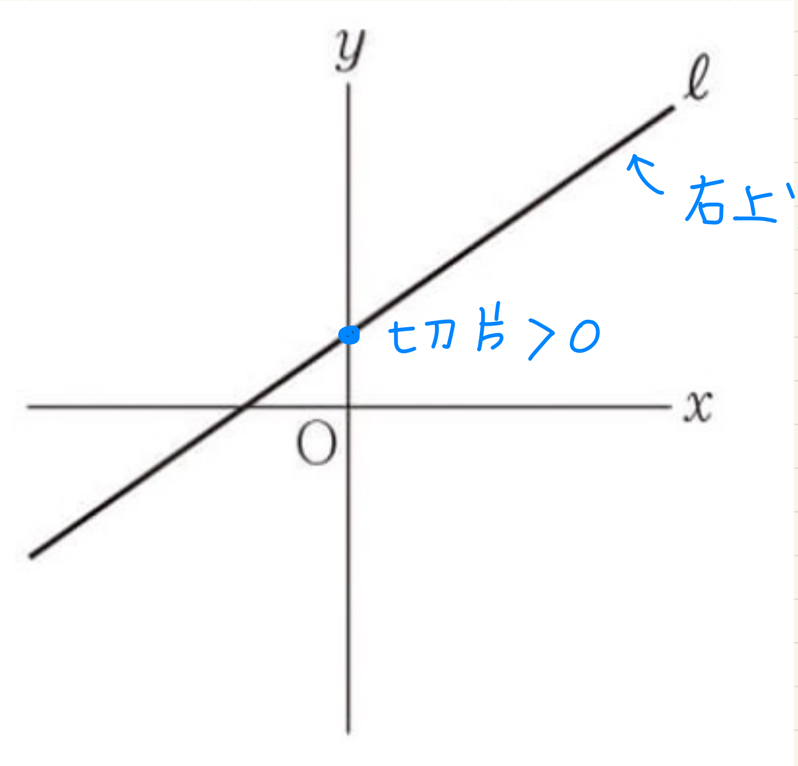
$= 2\sqrt{15} \times 2\sqrt{5}$

$2\sqrt{15} \times 2\sqrt{5} = 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$

$= 20\sqrt{3}$

$= 20\sqrt{3}$

(4) $ax+by=1 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$



切片>0より

$\frac{1}{b}>0$

よって b は正の数

グラフは右上りで,

傾きは $-\frac{a}{b}$, $b>0$

より a は負の数

よって, ウ

(5) 箱Aの3枚から2枚選ぶ方法は 3通り

箱Bの3枚から1枚選ぶ方法は 3通り

よって, カードの取り出し方は全部で

$3\times3=9$通り

bは2番目に小さい数なので,

$b=2, 3, 4, 6$

のいずれかである。

① $b=2$ のとき. Ⓐ

$a=1$ Ⓑ なので, $\frac{ac}{b}=\frac{c}{2}$

c は箱Aから選ぶので, $c=4, 6$ の2通り

② $b=3$ のとき B

a は箱Aの中から選ぶので、$a=2$

$$\therefore \frac{ac}{b}=\frac{2c}{3}$$

c は3の倍数で、かつ、箱Aから選ぶので、

$c=6$ の 1通り

③ $b=4$ のとき A

$$\frac{ac}{b}=\frac{ac}{4}=\frac{ac}{2^2}$$

したがって、ac は素因数2が2つ以上必要であるが、箱Aは2, 6、箱Bは奇数なので、いずれを選んでも、素因数2が2つ以上ない。

したがって不適

④ $b=6$ のとき A

$c=9$ B なので、$\frac{ac}{b}=\frac{9a}{6}=\frac{3}{2}a$

残り1枚は箱Aから選ぶので、$a=2, 4$ の 2通り

よって、$\frac{ac}{b}$ が自然数となる取り出し方は、5通り

求める確率は、$\frac{5}{9}$

(6) 215cm以上220cm未満のサッカー部員の人数をx人とおくと，バレー部員の人数は$(x-3)$人である。
また，この階級の相対度数が等しいので，

$$\frac{x}{32} = \frac{x-3}{20}$$

$$20x = 32(x-3)$$
$$-12x = -96$$
$$x = 8$$

よって，215cm以上220cm未満のサッカー部員は，8人

(7) $m = 10a + b$ とおく $(a:1\sim9,\ b:0\sim9)$
$n = a + b$ より

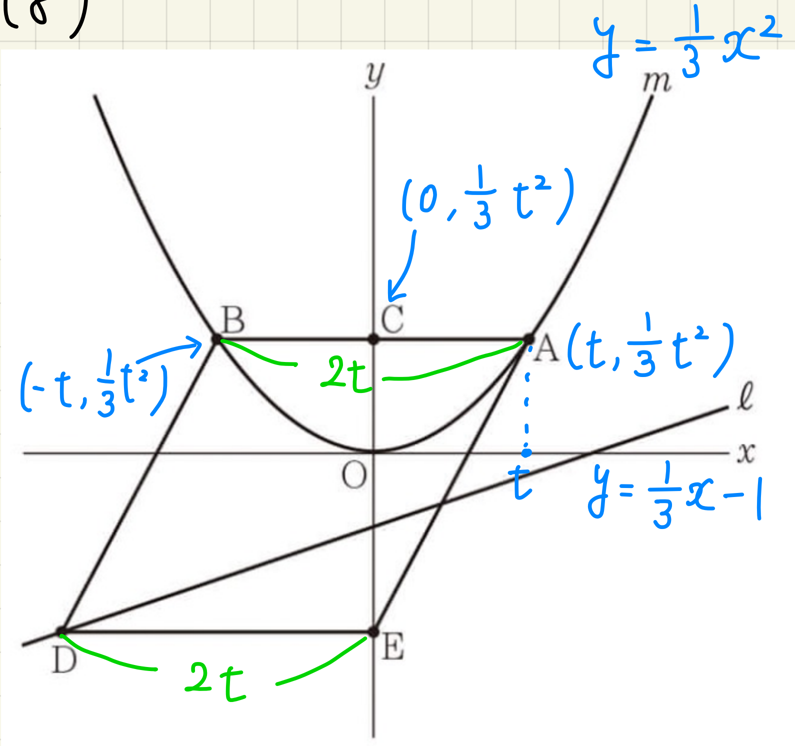
$$\begin{aligned}11n - 2m &= 11(a+b) - 2(10a+b)\\ &= 11a + 11b - 20a - 2b\\ &= -9a + 9b \quad = 9(-a+b)\\ &= 9\boxed{(b-a)} \quad = 9(b-a)\end{aligned}$$

$9 \times \boxed{}$ が50以上60以下となるのは，$\square = 6$
よって，

$$b - a = 6 \Rightarrow b = a + 6$$

aは$1\sim9$，bは$0\sim9$なので，
$a = 1$のとき，$b = 7$ ⇒ $m = 17$
$a = 2$のとき $b = 8$ ⇒ $m = 28$
$a = 3$のとき，$b = 9$ ⇒ $m = 39$

(8)



点Aは $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあるので、

$$A\left(t,\ \frac{1}{3}t^2\right)$$

よって、

$$B\left(-t,\ \frac{1}{3}t^2\right),\ C\left(0,\ \frac{1}{3}t^2\right)$$

したがって、

$$BA = t-(-t) = \underline{2t}\ \text{cm}$$

□ABCDは平行四辺形なので、DE = BA

したがって、Dの x 座標は $-2t$.

点Dは $y=\frac{1}{3}x-1$ のグラフ上にあるので、

$$D\left(-2t,\ -\frac{2}{3}t-1\right),\ E\left(0,\ -\frac{2}{3}t-1\right)$$

したがって、

$$CE = \frac{1}{3}t^2-\left(-\frac{2}{3}t-1\right)$$

$$= \frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}t+1$$

CE = 4 cm なので

$$\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}t+1 = 4$$

$$t^2+2t-9=0$$

$$t = \frac{-2\pm\sqrt{4+36}}{2}$$

$$= -1\pm\sqrt{10}$$

$t>0$ より

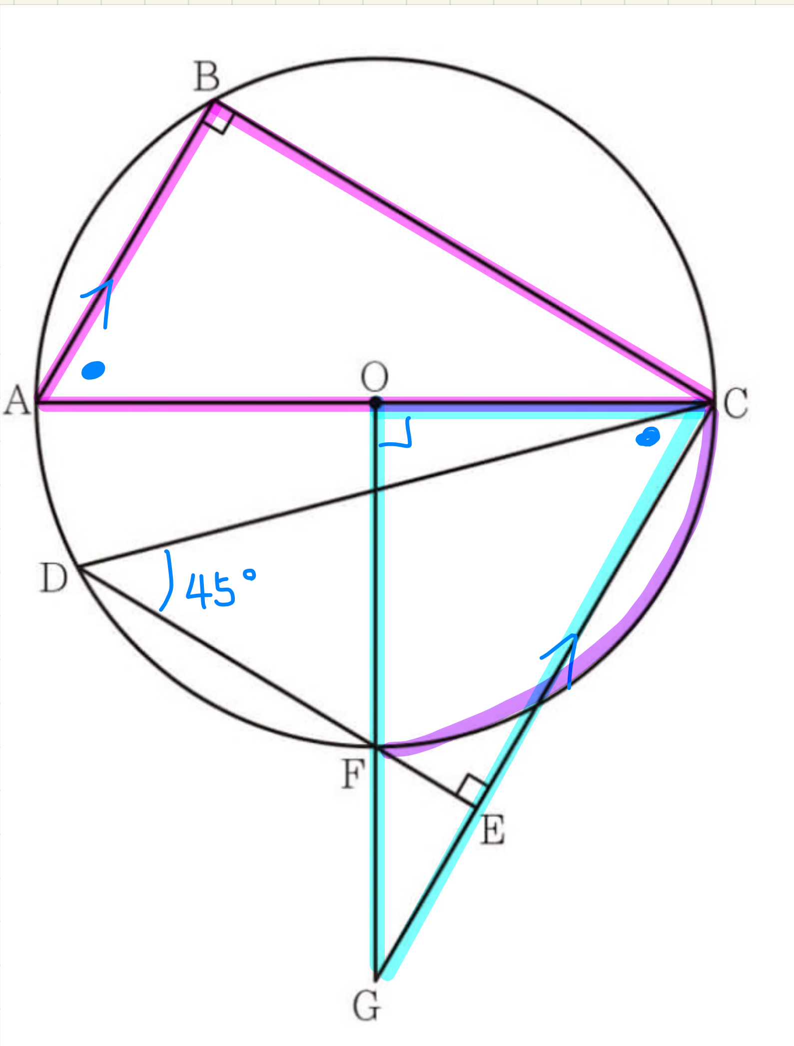
$$\underline{t = -1+\sqrt{10}}$$

2.

(1) 直径が a cm なので、半径は $\frac{a}{2}$ cm。よって、
円 O の面積は

$$\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \pi = \frac{a^2}{4}\pi \ \text{cm}^2$$

(2)



△ABCと△COGにおいて、
EC//ABより錯角が等しいので、
$\angle BAC = \angle OCG$ ―㋐
仮定より
$\angle ABC = 90°$ ―㋑
△DECは $\angle DEC = 90°$ の直角二等辺三角形より
$\angle CDF = 45°$ ―㋒

$\overset{\frown}{FC}$ に対して、$\angle CDF$ は円周角、$\angle COF$ は中心角なので

$$\angle COF = 2\angle CDF$$
$$= 90° \quad ―㋓$$

㋑、㋓より

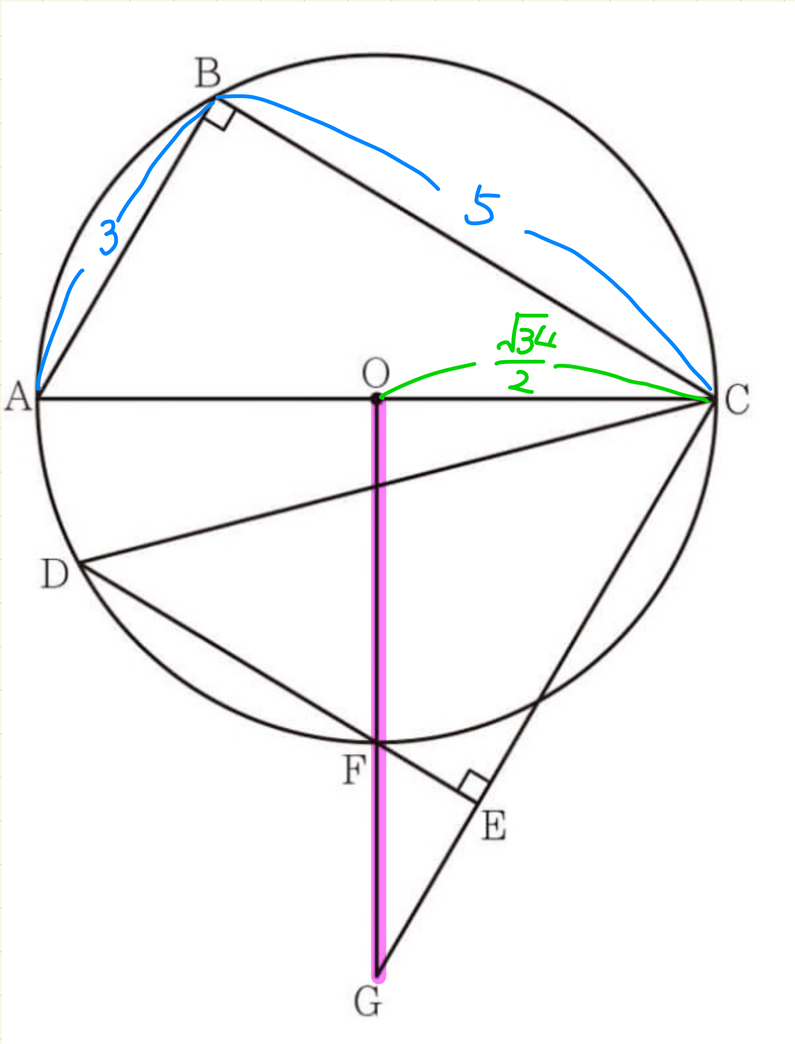
$$\angle ABC = \angle COF = 90° \quad ―㋔$$

㋐,㋓より2組の角がそれぞれ等しいので

△ABC ∽ △COG（証明終わり）

(3)

①



△ABCで三平方の定理より

$AC = \sqrt{3^2 + 5^2}$

$= \sqrt{34}$ cm

よって、

$OC = \frac{\sqrt{34}}{2}$ cm

(2)より △ABC ∽ △COG なので、対応する辺の比は等しいから、

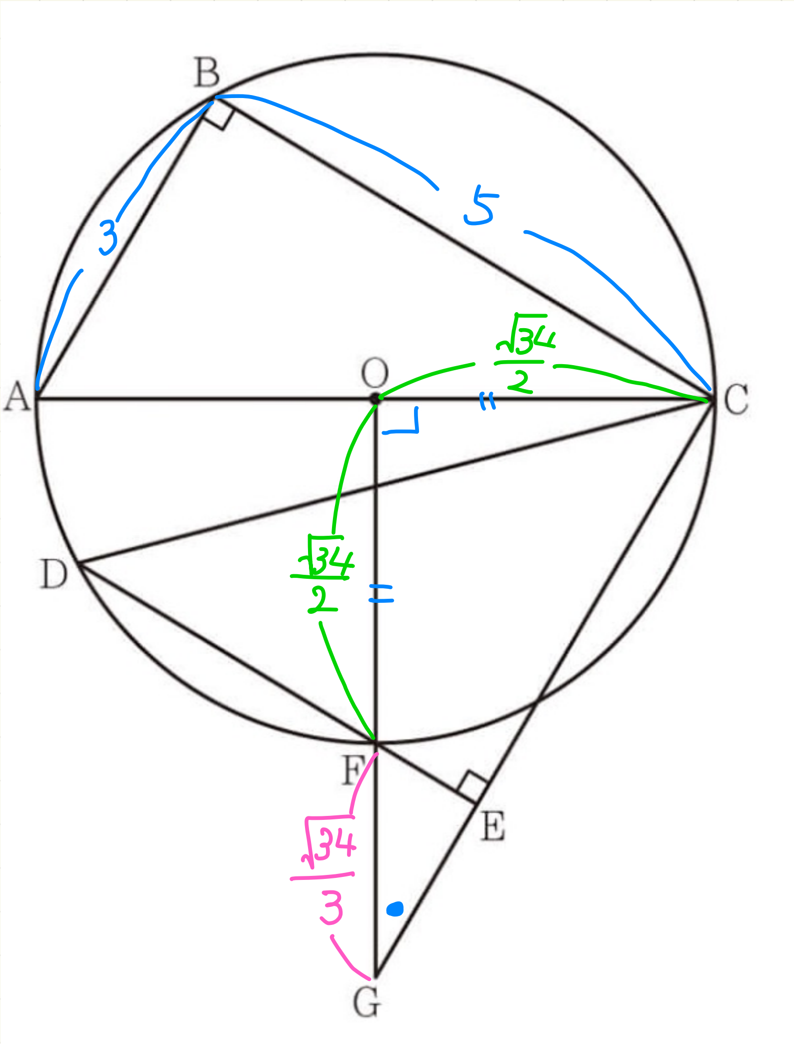
$\underset{5}{BC} : OG = \underset{3}{AB} : \underset{\frac{\sqrt{34}}{2}}{CO}$

よって

$3OG = \frac{5\sqrt{34}}{2}$

$\therefore OG = \frac{5\sqrt{34}}{6}$ cm

②



□OFEC

$= \triangle COG - \triangle FEG$

(3) ①より

$$OG = \frac{5\sqrt{34}}{6}\ \text{cm}$$

なので.

$$\triangle COG = \frac{\sqrt{34}}{2} \times \frac{5\sqrt{34}}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{85}{12}$$

$\triangle COG$ と $\triangle FEG$ は 2組の角がそれぞれ等しいので、$\triangle COG \backsim \triangle FEG$

(2) より $\triangle ABC \backsim \triangle COG$ なので

$\triangle ABC \backsim \triangle FEG$

OF は円 O の半径なので.

$$OF = OC = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

よって、

$$FG = OG - OF$$

$$= \frac{5\sqrt{34}}{6} - \frac{\sqrt{34}}{2} = \frac{\sqrt{34}}{3}\ \text{cm}$$

よって、

$$\underbrace{AB}_{3} : FE = \underbrace{AC}_{\sqrt{34}} : \underbrace{FG}_{\frac{\sqrt{34}}{3}}$$

$$\sqrt{34}\,FE = \sqrt{34} \qquad \therefore\ FE = 1$$

また、

$$\underbrace{AB}_{3} : \underbrace{FE}_{1} = \underbrace{BC}_{5} : EG$$

$$3EG = 5 \qquad \therefore\ EG = \frac{5}{3}$$

よって、△FEGの面積は

$$1 \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\ \text{cm}^2$$

以上より

$$\square OFEC = \triangle COG - \triangle FEG$$

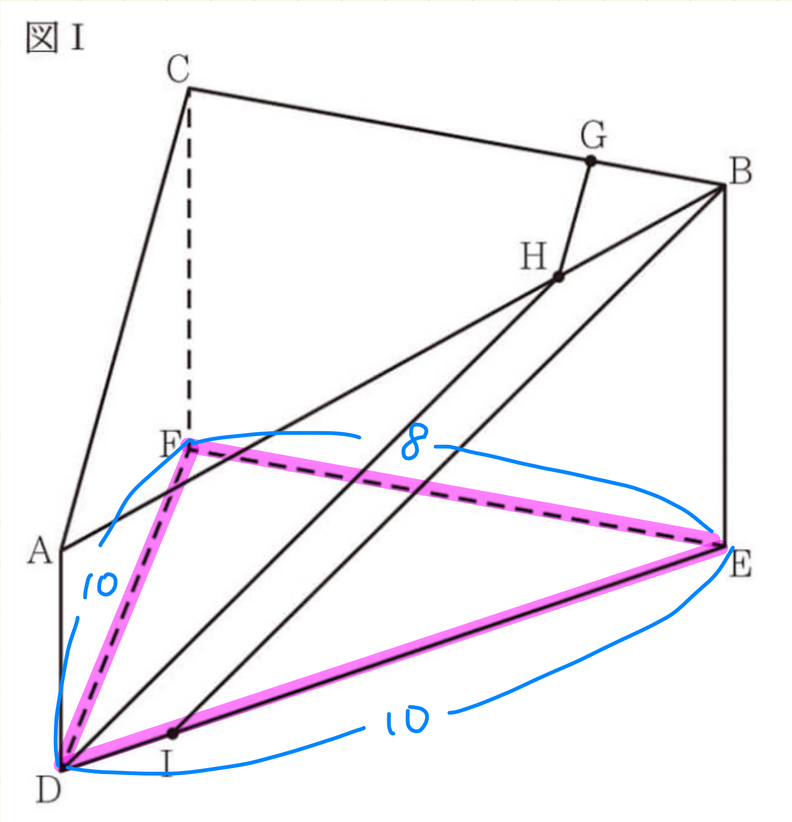
$$= \frac{85}{12} - \frac{5}{6}$$

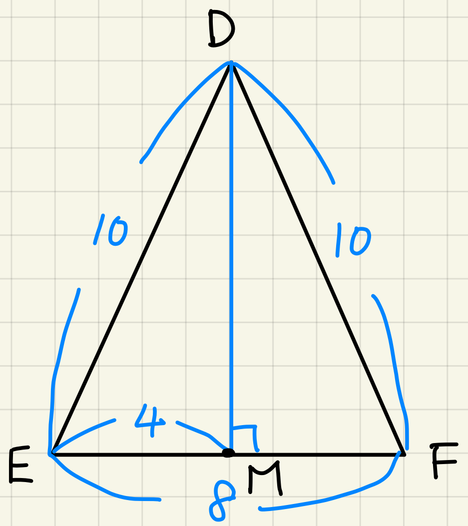
$$= \frac{25}{4}\ \text{cm}^2$$

3.

(1)

①





△AEMで三平方の定理より

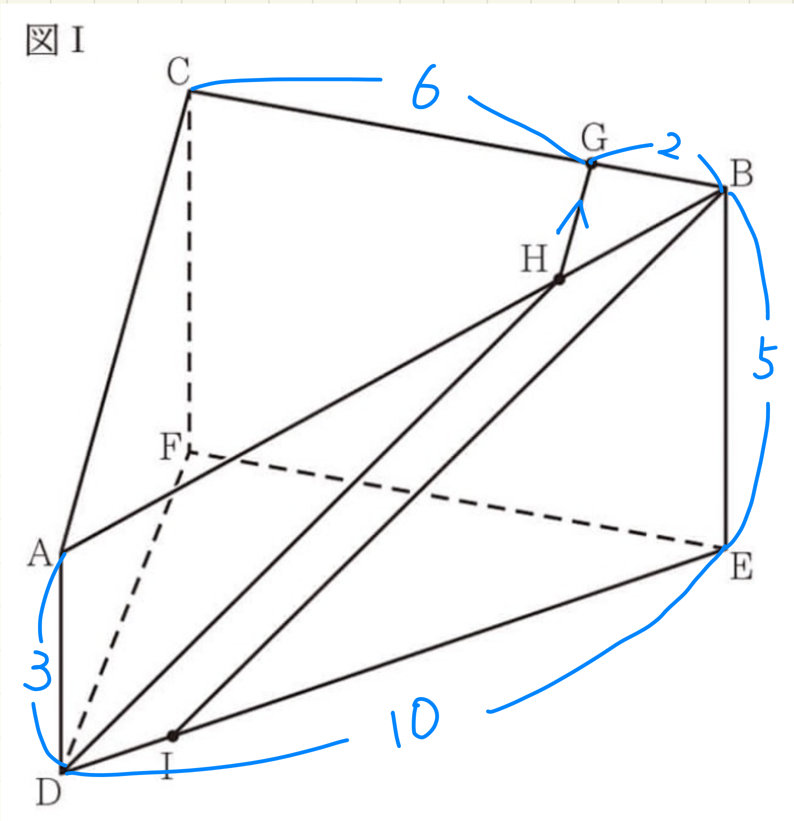
$AM = \sqrt{10^2 - 4^2}$

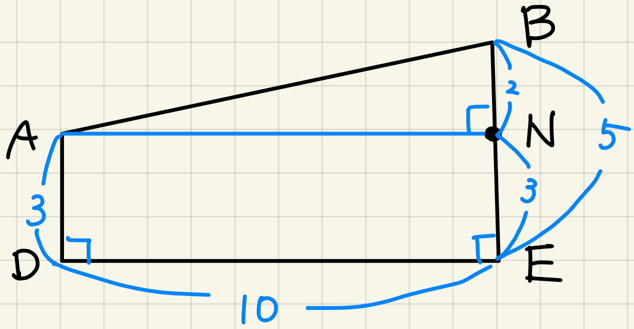
$= 2\sqrt{21}$

よって，△DEFの面積は．

$8 \times 2\sqrt{21} \times \frac{1}{2} = 8\sqrt{21}$ cm^2

②

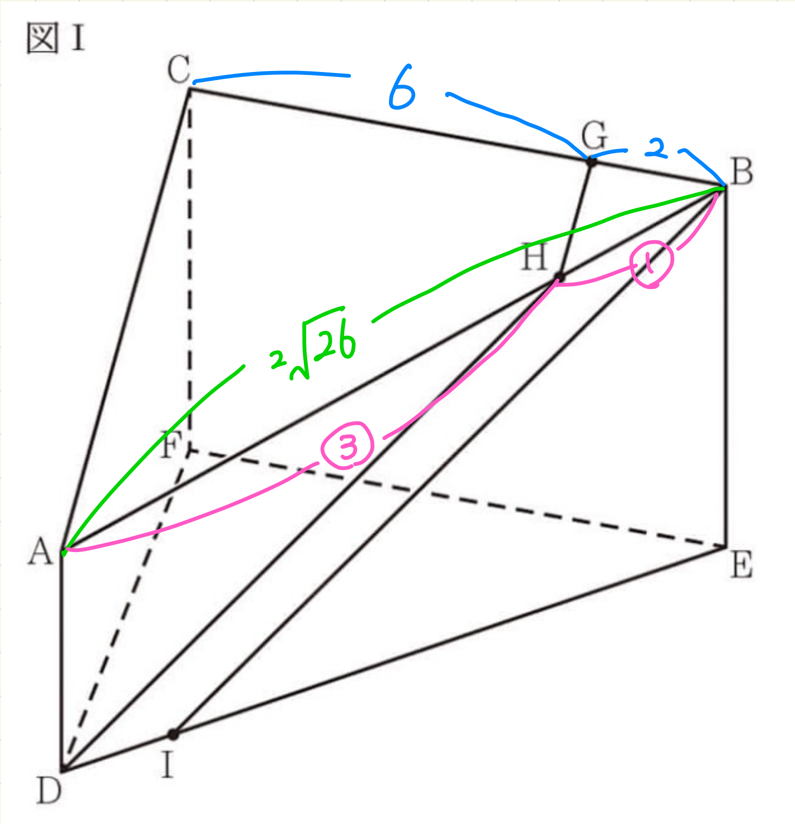




△ANBで三平方の定理より

$AB = \sqrt{10^2 + 2^2}$

$= 2\sqrt{26}$ cm



$GH \parallel CA$ より

$\underbrace{BG}_{2} : \underbrace{GC}_{6} = BH : HA$

よって、

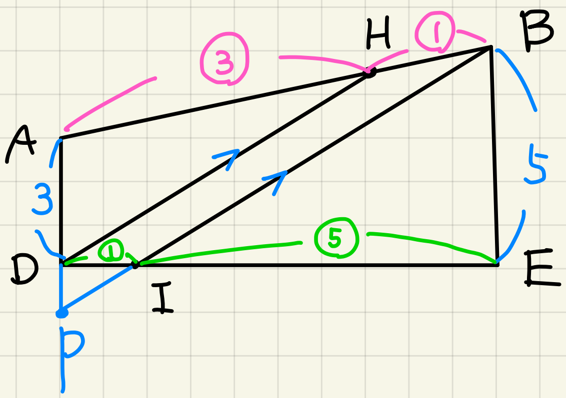
$BH : HA = 1 : 3$

よって、

$BH = \frac{1}{4} AB$

$= \frac{\sqrt{26}}{2}$ cm

③



左図のように、BIとADの延長線の交点をPとする。

$DH \parallel PB$ より

$\underbrace{AH}_{③} : \underbrace{HB}_{①} = \underbrace{AD}_{3} : DP$

よって、DP = 1cm

$\triangle DIP \backsim \triangle EIB$ なので

($DH \parallel LB$ より $\angle DLI = \angle EBI$、対頂角で

$\angle DIL = \angle EIB$)

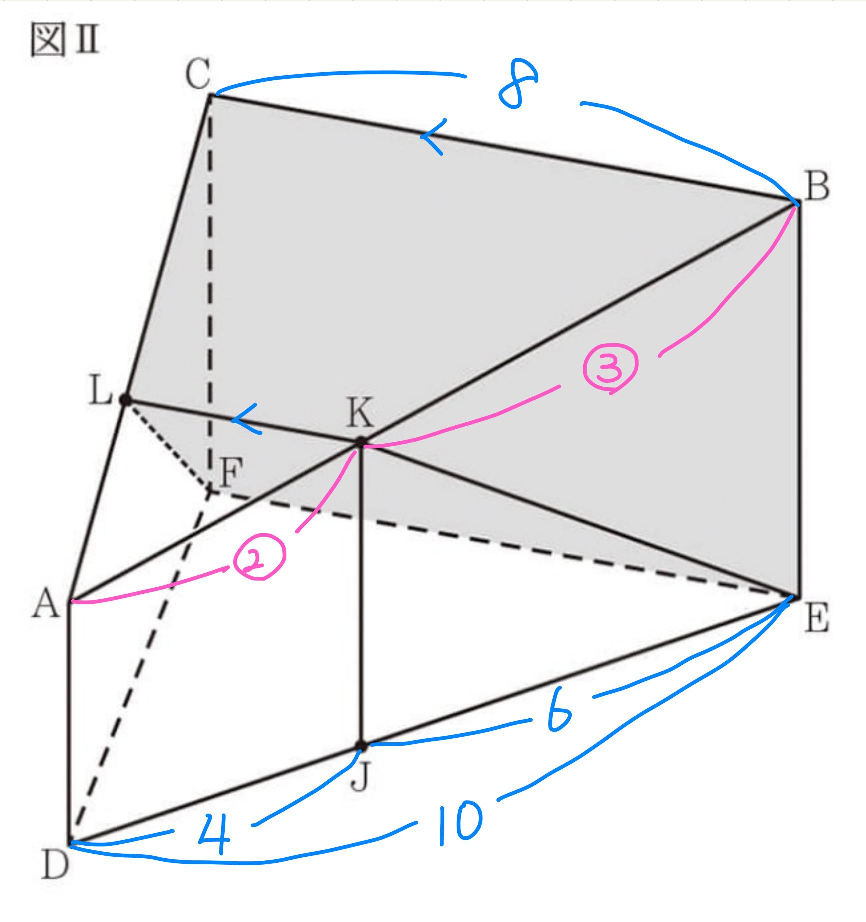
$\underbrace{DP}_{1\,cm} : \underbrace{EB}_{5\,cm} = DI : EI$　　$\therefore DI : EI = 1 : 5$

DE = 10 cm より

$DI = \frac{1}{6} \times 10 = \frac{5}{3}$ cm

(2)

①



KJ // AD // BE より

AK : KB = DJ : JE
$\underbrace{DJ}_{4}$: $\underbrace{JE}_{6}$

よって

AK : KB = 2 : 3

LK // CB より 同位角が等しいので、

△AKL ∽ △ABC

対応する辺の比は等しいので、

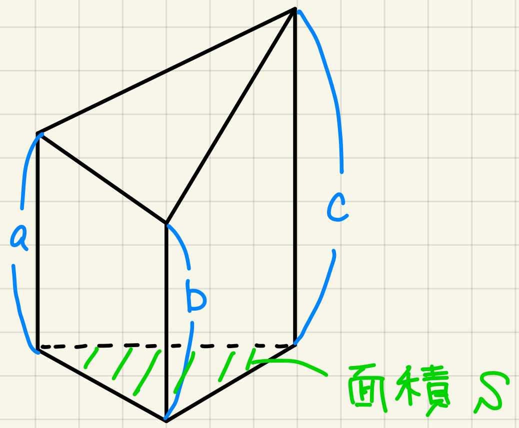
$\underbrace{AK}_{②} : \underbrace{AB}_{⑤} = LK : \underbrace{CB}_{8}$

∴ 5LK = 16 ⇒ LK = $\frac{16}{5}$ cm

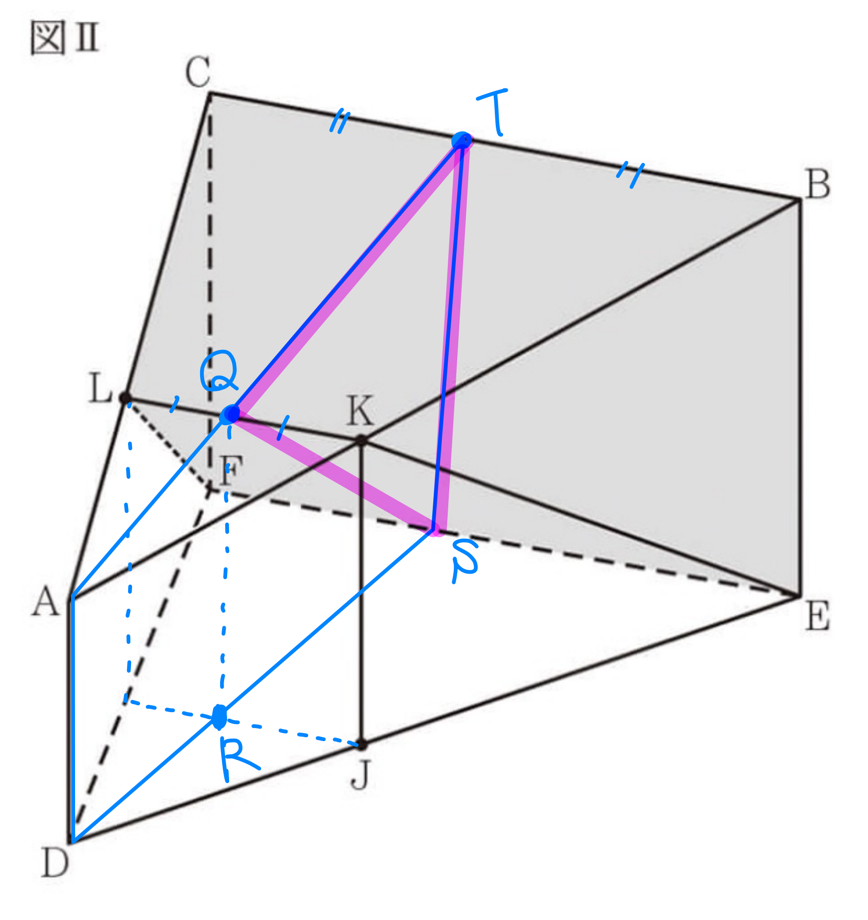
② 難問

斜めに切断された三角柱

⇒ 切頭三角柱の公式を用いる。



⇒ 体積 = $S \times \dfrac{a+b+c}{3}$



左図のように各辺の中点にQ, R, S, Tをとる

このとき，二等辺三角形の性質から，

$\angle LQT = \angle QTC = 90^\circ$

したがって，△QSTを底面と考えると，

立体QST－LFC，立体QST－KEBは，それぞれ切頭三角柱である。

立体QST－LFCの体積

$$= \triangle QST \times \frac{LQ + CT + FS}{3}$$

立体QST－KEBの体積

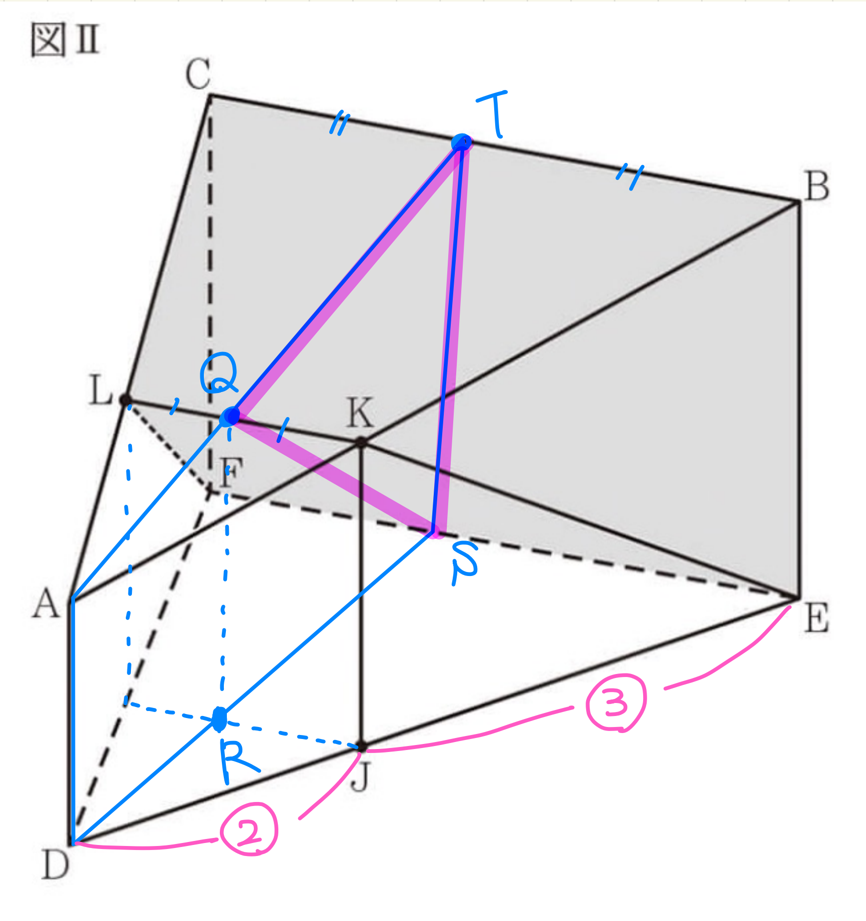
$$= \triangle QST \times \frac{QK + TB + SE}{3}$$

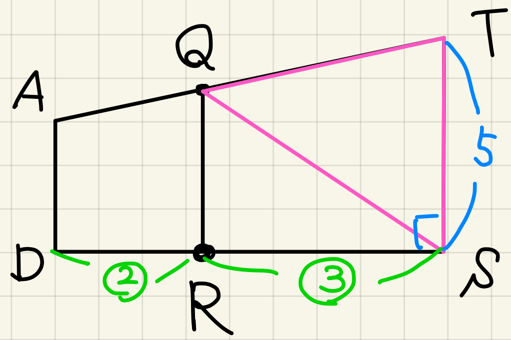
したがって，立体KEB－LFCの体積は，

$$\underbrace{\triangle QST \times \frac{LQ + CT + FS}{3}}_{\text{立体QST－LFC}} + \underbrace{\triangle QST \times \frac{QK + TB + SE}{3}}_{\text{立体QST－KEB}}$$

$$= \triangle QST \times \left(\frac{LQ + QK + CT + TB + FS + SE}{3} \right)$$

$= \triangle QST \times \left(\dfrac{LK + CB + FE}{3} \right)$





(2) ① より

$DJ : JE = 2 : 3$

なので、

$DR : RS = 2 : 3$

（注 $\triangle DRJ \sim \triangle DSE$ より、$DJ : DE = DR : DS$

$\therefore DR : DS = 2 : 5 \Rightarrow DR : RS = 2 : 3$ ）

(1) ① より、$DS = 2\sqrt{21}$ cm なので、

$RS = \dfrac{3}{5} \times 2\sqrt{21} = \dfrac{6}{5}\sqrt{21}$ cm

したがって、

$\triangle QST = 5 \times \dfrac{6}{5}\sqrt{21} \times \dfrac{1}{2} = 3\sqrt{21}$ cm^2

よって，求める体積は．

$$\triangle QST \times \left(\frac{LK + CB + FE}{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{21} \times \left(\frac{\frac{16}{5} + 8 + 8}{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{21} \times \frac{96}{15}$$

$$= \frac{96\sqrt{21}}{5} \quad cm^3$$