2023年度　秋田県
数学

Km Km

1.

(1) 与式 $= 8 - 3$

$= 5$

(2) 与式 $= \dfrac{12ab \times 2b}{6a^2}$

$= \dfrac{4b^2}{a}$

(3) $4^2 = 16$, $\sqrt{10}^{\,2} = 10$ で, $16 > 10$ なので,

$4 > \sqrt{10}$

(4) $2(x - 5y) + 5(2x + 3y)$

$= 2x - 10y + 10x + 15y$

$= 12x - 5y$.

$x = \dfrac{1}{2}$, $y = -3$ より

$12x - 5y = 12 \times \dfrac{1}{2} + 5 \times (-3)$

$= 6 - 15$

$= -9$

(5) 与式 $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$= \dfrac{3\sqrt{2}}{6} - \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{6}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

※ $\dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

(6) 両辺に 4 をかけて.

$5x - 2 = 28$

$5x = 30$

$x = 6$

(7) $\begin{cases} 2x + y = 5 & \text{— ①} \\ x - 4y = 7 & \text{— ②} \end{cases}$

① − ② × 2 より

$$\begin{array}{rr} & 2x + y = 5 \\ -) & 2x - 8y = 14 \\ \hline & 9y = -9 \end{array}$$

$y = -1$

$y = -1$ を ① に代入して

$2x + (-1) = 5$

$2x = 6$

$x = 3$

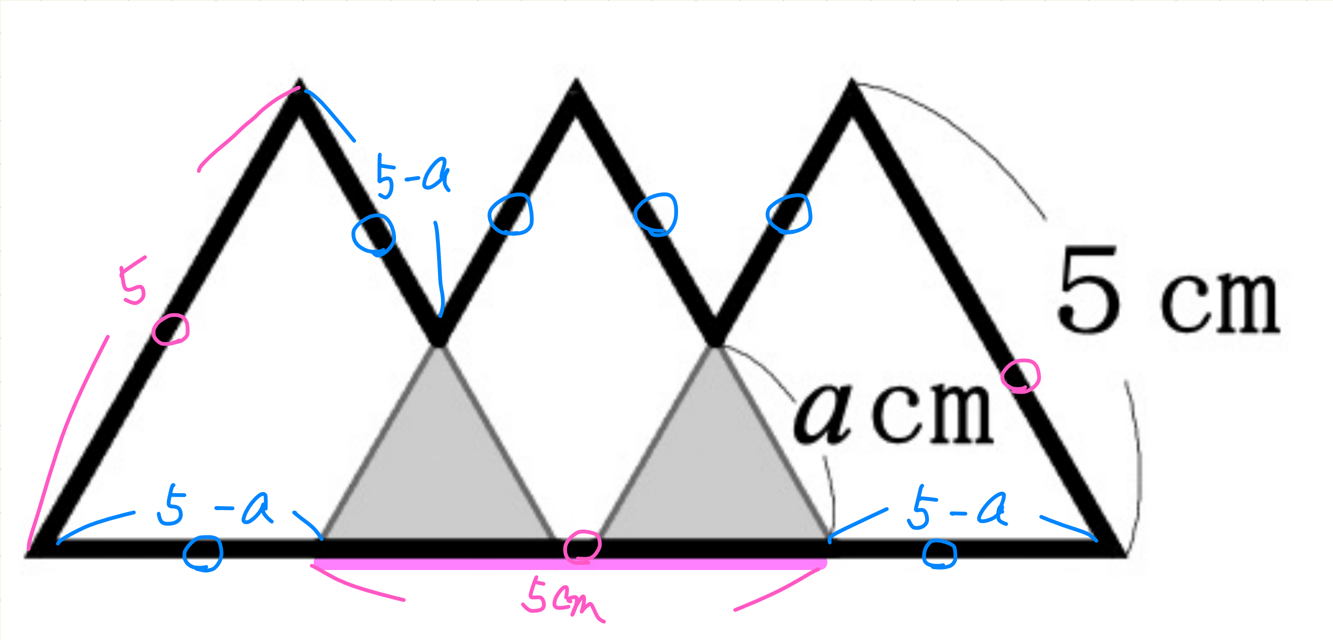
$\therefore\ x = 3,\ y = -1$

(8) x^2+5x+2 は因数分解できないので,
解の公式より

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times2}}{2\times1}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

(9)



各辺の長さは上記の通り。よって求める長さは,

$5\times3+(5-a)\times6$

$=15+30-6a$

$=45-6a$ cm

(10) 231 を素因数分解すると.

$231 = 3 \times 7 \times 11$

よって,

$n+2 = 3, 7, 11, 21, 33, 77$

であれば, $\dfrac{231}{n+2}$ は整数となる.

ここで, n は 100 より小さい素数であることに注意すると.

$n+2 = 3 \Rightarrow n = 1$ なので不適

$n+2 = 7 \Rightarrow n = 5$ で適する.

$n+2 = 11 \Rightarrow n = 9$ なので不適

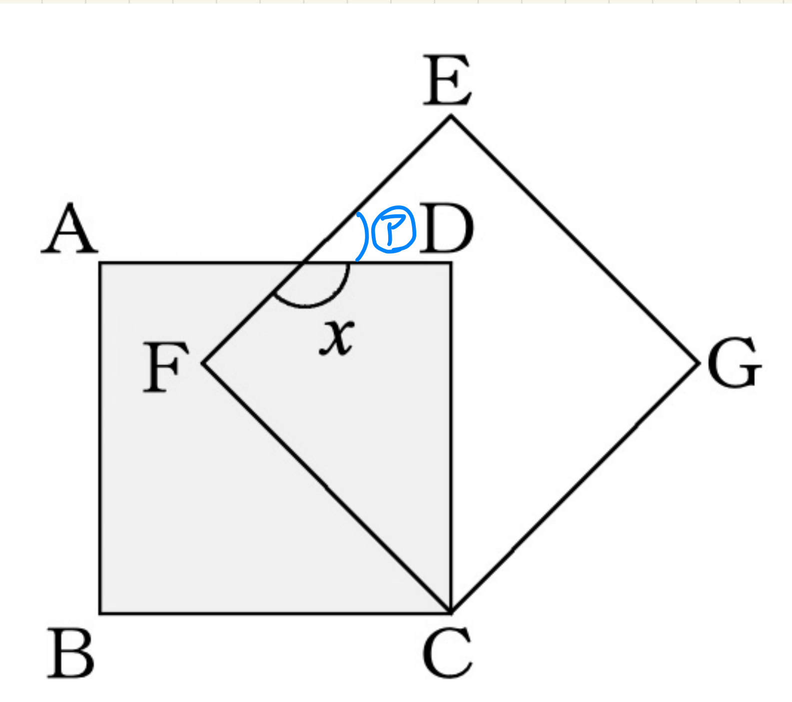
$n+2 = 21 \Rightarrow n = 19$ で適する

$n+2 = 33 \Rightarrow n = 31$ で適する

$n+2 = 77 \Rightarrow n = 75$ なので不適

よって, $n = 5, 19, 31$

(11)



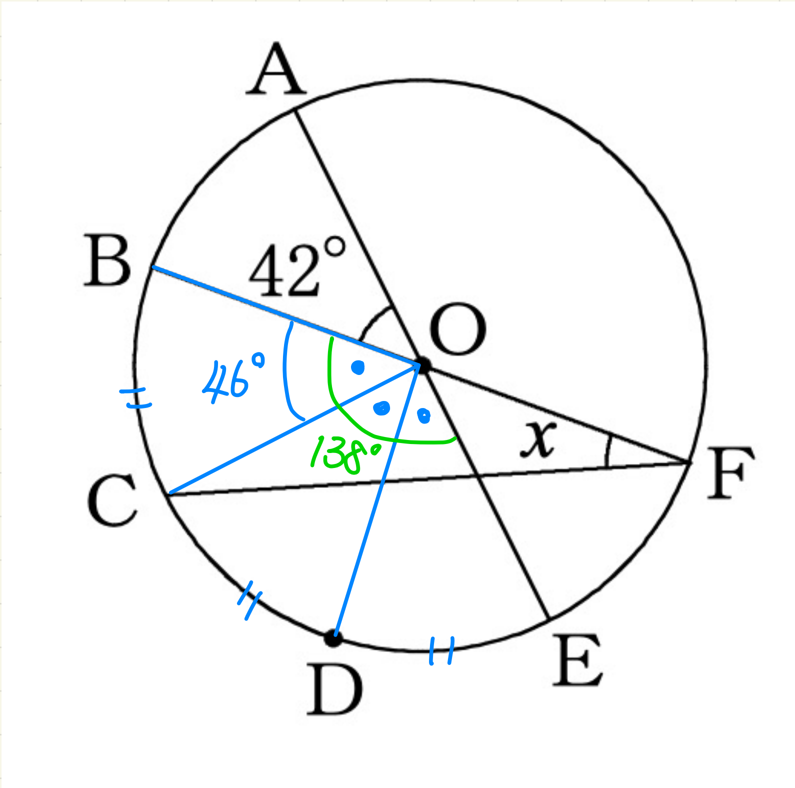
□EFCG は □ABCD を時計まわりに 45° 回転したので,

$\angle$㋐ $= 45°$

$\therefore \angle x = 180° - 45°$

$= 135°$

(12)



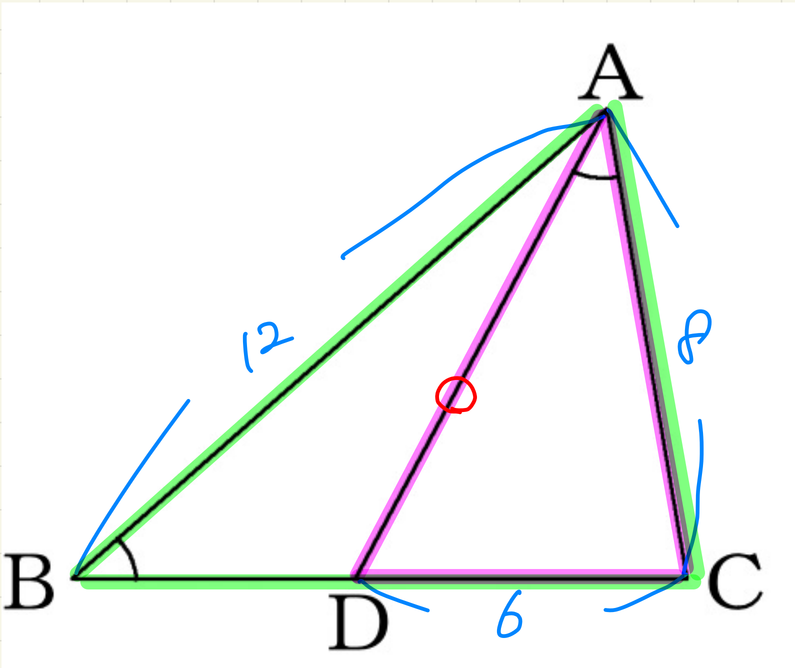
$\angle BOE = 180° - 42°$
$= 138°$

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$ より
$\angle BOC = \angle COD = \angle DOE$

よって.
$\angle BOC = 138° \div 3$
$= 46°$
⇒ $\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角

$\angle x$ は. $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角なので.
$\angle x = 46° \div 2$
$= 23°$

(13)



△ADCと△BACにおいて,
仮定より
$\angle DAC = \angle ABC$ —①
共通な角は等しいので.
$\angle ACD = \angle BCA$ —②
①,②より. 2組の角が

それぞれ等しいので, △ADC ∽ △BAC.

対応する辺の比は等しいから

$$\underset{12}{AD : BA} = \underset{6}{DC} : \underset{8}{AC}$$

$8AD = 72 \Rightarrow AD = 9\ \text{cm}$

(14)

図1も図2も容器の体積，水の体積は等しい

⇒ 水が入っていない部分の体積も等しい．

図 1

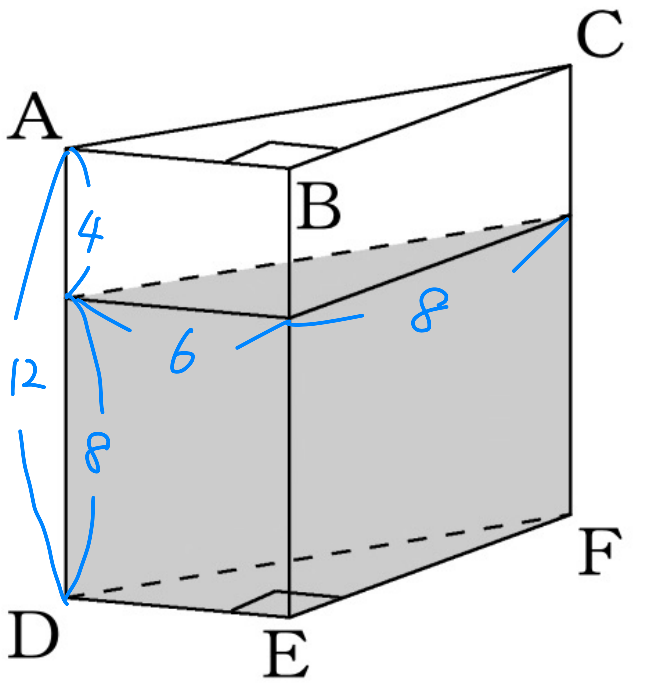


図1より，水の入っていない部分の体積は

$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 4 = 96\ \text{cm}^3$ —㋐

図 2

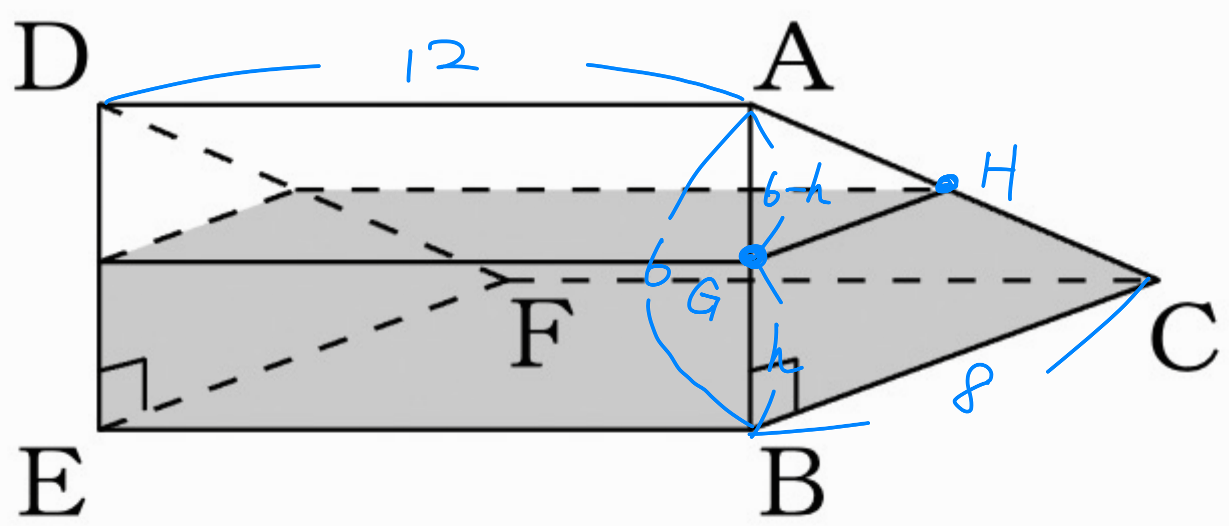


図2において，水の高さをh cm $\underbrace{(0 \leqq h \leqq 6}_{DE=6cm より})$ とする。

辺AB，辺ACと水面との交点をG，Hとする。
図2の水の入っていない部分の体積を求めるには，GHの長さが必要である

△AGHと△ABCにおいて，
GH//BCより同位角が等しいので，

$\angle AGH = \angle ABC$ ―①

$\angle AHG = \angle ACB$ ―②

①，②より2組の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle AGH \backsim \triangle ABC$

対応する辺の比は等しいので，

$\underbrace{AG}_{6-h} : \underbrace{AB}_{6} = GH : \underbrace{BC}_{8}$

$\therefore\ 6GH = 8(6-h) \Rightarrow GH = \frac{4}{3}(6-h)$

したがって，図2の水の入っていない部分の体積は

$12 \times \frac{4}{3}(6-h) \times (6-h) \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{四角錐}$

$= \frac{16}{3}(6-h)^2$ ―イ

ア＝イより

$96 = \frac{16}{3}(6-h)^2$

両辺 $\times \frac{3}{16}$ より

$$18=(6-h)^2$$

$$h^2-12h+18=0$$

$$h=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\times1\times18}}{2}$$

$$=\frac{12\pm6\sqrt{2}}{2}$$

$$=6\pm3\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}\fallingdotseq1.414$ より

$$6+3\sqrt{2}=6+3\times1.414$$
$$=10.242$$

$0\leqq h\leqq6$ より $h=10.242$ は不適.

$$6-3\sqrt{2}=6-3\times1.414$$
$$=1.758$$

$0\leqq h\leqq6$ より $h=1.758$ は条件を満たす。

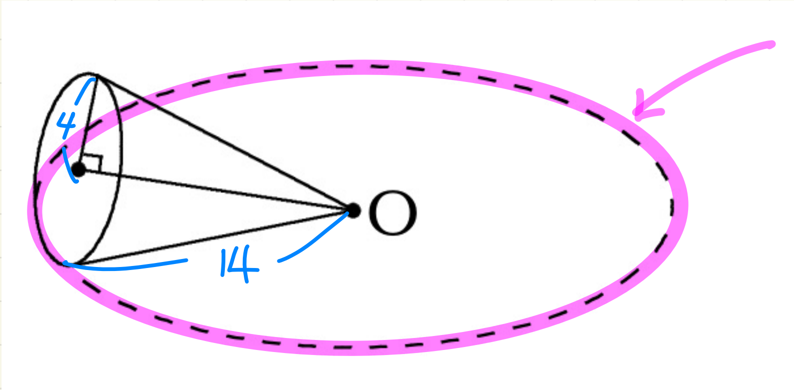
よって、図2の水面の高さは.

$6-3\sqrt{2}$ cm

(15) 底面の半径が 4 cm より，底面の円周の長さは，

$$\underbrace{4\times2}_{\text{直径}}\times\pi=8\pi \text{ cm}$$

この円周が 3 回転半したので，



底面の円周の長さの3回転半と等しい。

点 O を中心とする円周の長さは，

$$8\pi\times3.5=28\pi \text{ cm}$$

したがって，点 O の半径を r cm とすると，

$$2\times r\times\pi=28\pi \Rightarrow r=14 \text{ cm}$$

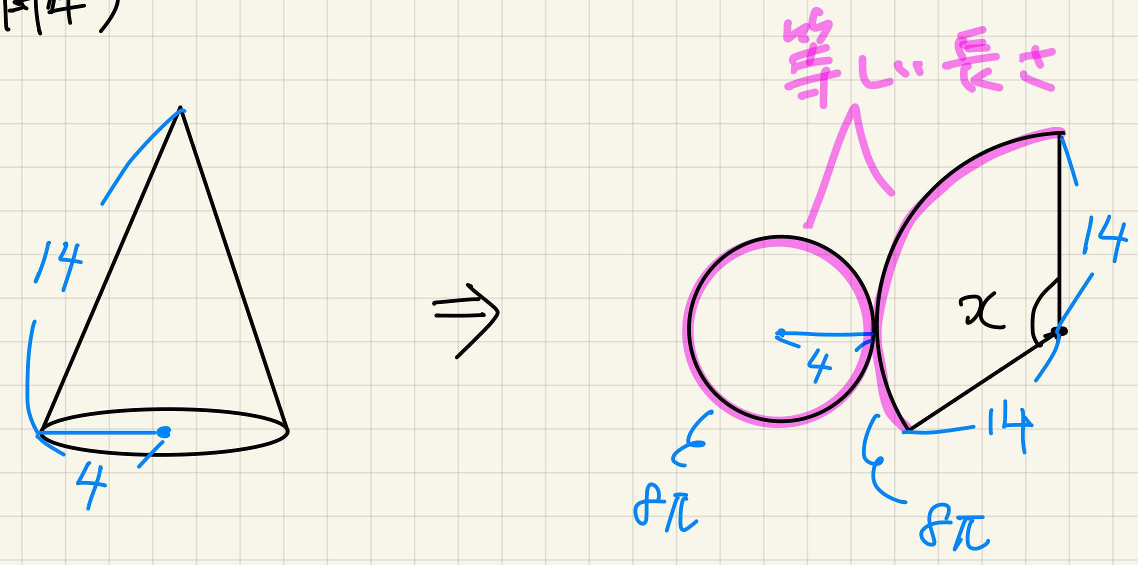
これは，円錐の母線の長さに等しい。

円錐の表面積 ＝（半径 ＋ 母線）× 半径 × π

より，求める表面積は，

$$(4+14)\times4\times\pi=18\times4\pi$$
$$=72\pi \text{ cm}^2$$

(別解)



おうぎ形の周の長さは 8π cm なので、中心角を $x°$ とすると、

$$14 \times 2 \times \frac{x}{360} = 8\pi \Rightarrow \frac{x}{360} = \frac{2}{7}$$

よって、求める表面積は、

$$4 \times 4 \times \pi + 14 \times 14 \times \pi \times \boxed{\frac{x}{360}} = \frac{2}{7}$$

$$= 16\pi + 196\pi \times \frac{2}{7}$$

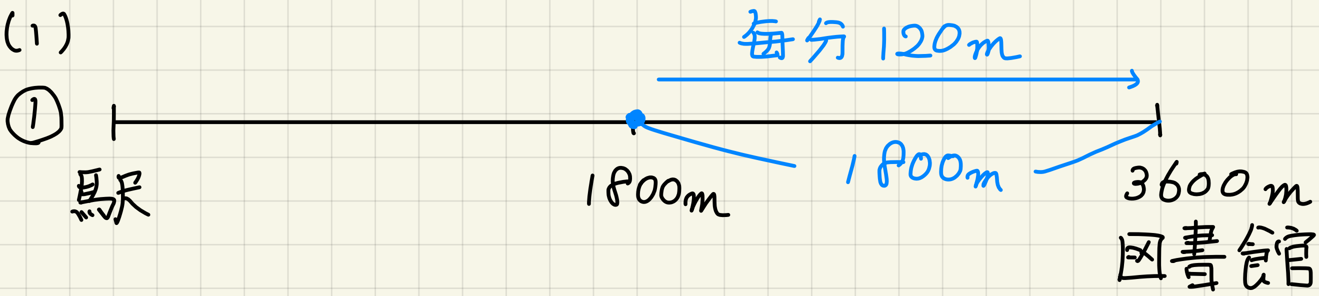
$$= 16\pi + 56\pi$$

$$= 72\pi \text{ cm}^2$$

2.

(1)

①



1800m の地点から図書館まで 1800m あり.
毎分 120m で進んだので, かかった時間は,

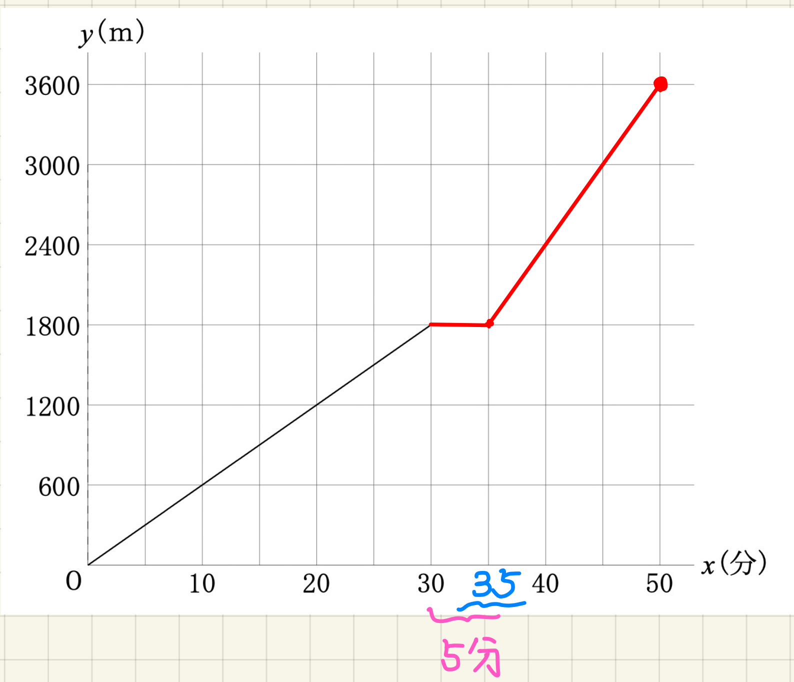
$$1800 \div 120 = 15 \text{ 分}$$

10時50分に図書館についたので, 1800m 地点を出発した時間は.

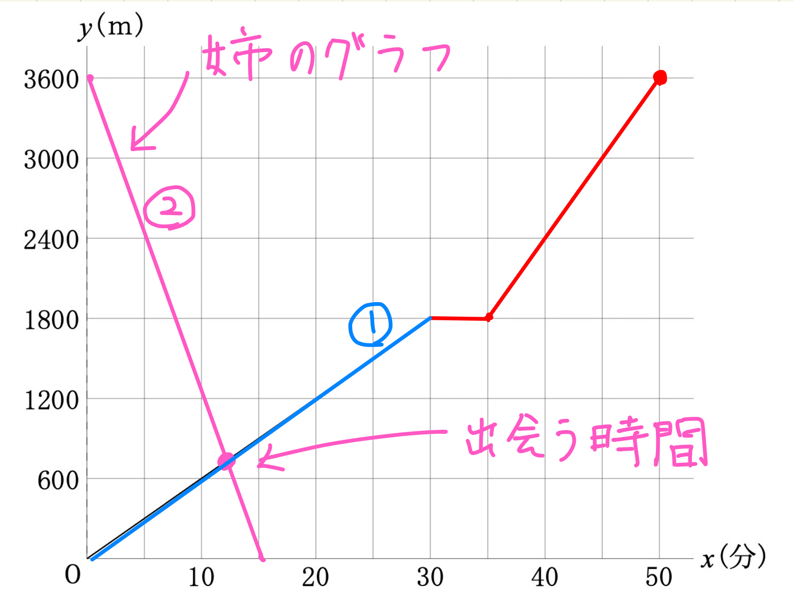
$$10\text{時}50\text{分} - 15\text{分} = 10\text{時}35\text{分}$$

したがって, 1800m 地点で休憩した時間は.

$$35\text{分} - 30\text{分} = 5\text{分}$$



② 駅から図書館まで 3600m なので.
姉が図書館から駅にかかる時間は.
$3600 \div 240 = 15$分



姉のグラフは.左記の通りとなる。
したがって,①と②のグラフの交点を求めれば良い。

① のグラフについて,

$$傾き = \frac{1800}{30} = 60$$

原点を通るので,グラフ①の式は.

$y = 60x$ —— ③

② のグラフについて

$$傾き = \frac{-3600}{15} = -240$$

切片は $(0, 3600)$ なので,グラフ②の式は.

$y = -240x + 3600$ —— ④

③，④ を連立して，

$$\begin{cases} y = 60x \\ y = -240x + 3600 \end{cases}$$

よって

$$60x = -240x + 3600$$ 代入法

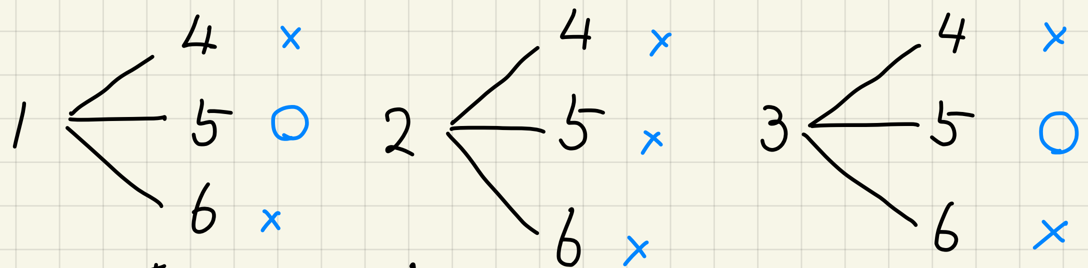
$$300x = 3600$$

$$x = 12$$

したがって，出会った時刻は，10時12分

(2)

① 樹形図は，以下の通り

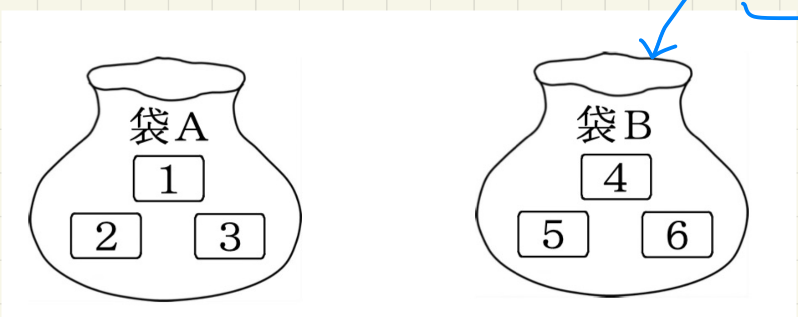


よって，積が奇数となる確率は，

$$\frac{2}{9}$$

②

$\underbrace{\boxed{7}\ \boxed{7}\ \cdots}_{x枚}$



袋Bに $\boxed{7}$ を x 枚追加したとする。

㋐

A	B	積
1	4	偶
	5	奇
	6	偶
	7	奇
	7	奇
	⋮	⋮

(7 の行：x 通り)

⇒ 偶数 2 通り

奇数 $x+1$ 通り

㋑

A	B	積
2	4	偶
	5	偶
	6	偶
	7	偶
	7	偶
	⋮	⋮

(7 の行：x 通り)

⇒ 偶数 $x+3$ 通り

奇数 0 通り

㋒

A	B	積
3	4	偶
	5	奇
	6	偶
	7	奇
	7	奇
	⋮	⋮

(7 の行：x 通り)

⇒ 偶数 2 通り

奇数 $x+1$ 通り

カードの取り出し方は、全部で

$$\underbrace{2+x+1}_{㋐}+\underbrace{x+3}_{㋑}+\underbrace{2+x+1}_{㋒}$$

$= 3x+9$ 通り

カードの積が偶数となるのは

$$\underbrace{2}_{㋐}+\underbrace{x+3}_{㋑}+\underbrace{2}_{㋒}$$

$= x+7$ 通り

よって、偶数となる確率は、

$$\frac{x+7}{3x+9}$$

カードの積が奇数となるのは

$\underbrace{x+1}_{ア} + \underbrace{0}_{イ} + \underbrace{x+1}_{ウ} = 2x+2$ 通り

よって，奇数となる確率は

$$\frac{2x+2}{3x+9}$$

したがって

$$\frac{x+7}{3x+9} = \frac{2x+2}{3x+9}$$

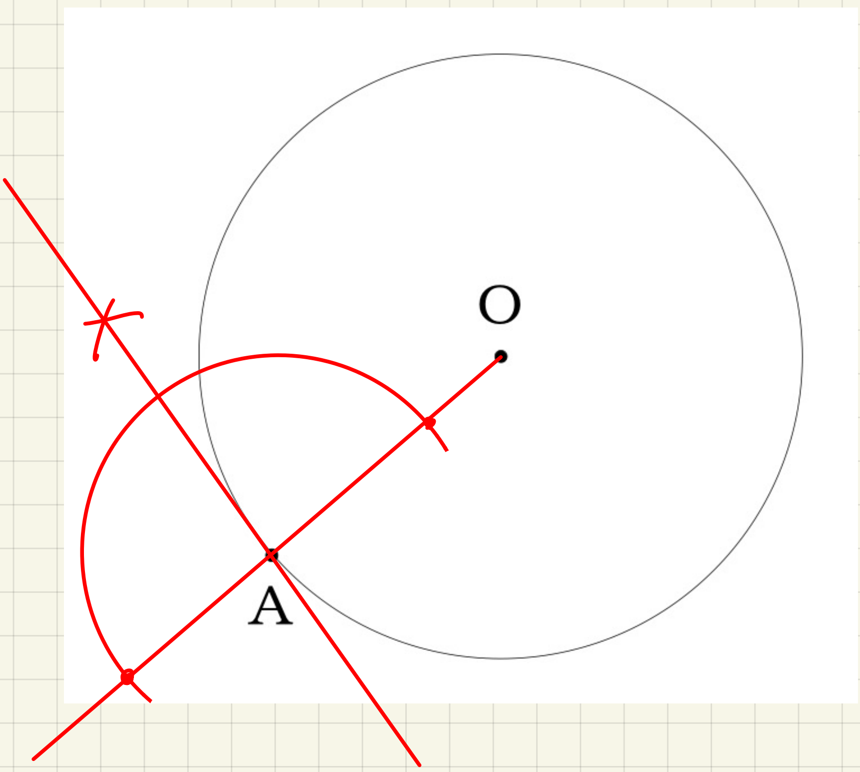
両辺に $3x+9$ をかけて

$$x+7 = 2x+2$$

$$\therefore x = 5$$

よって 5枚

(3)



点Aと円Oが接する

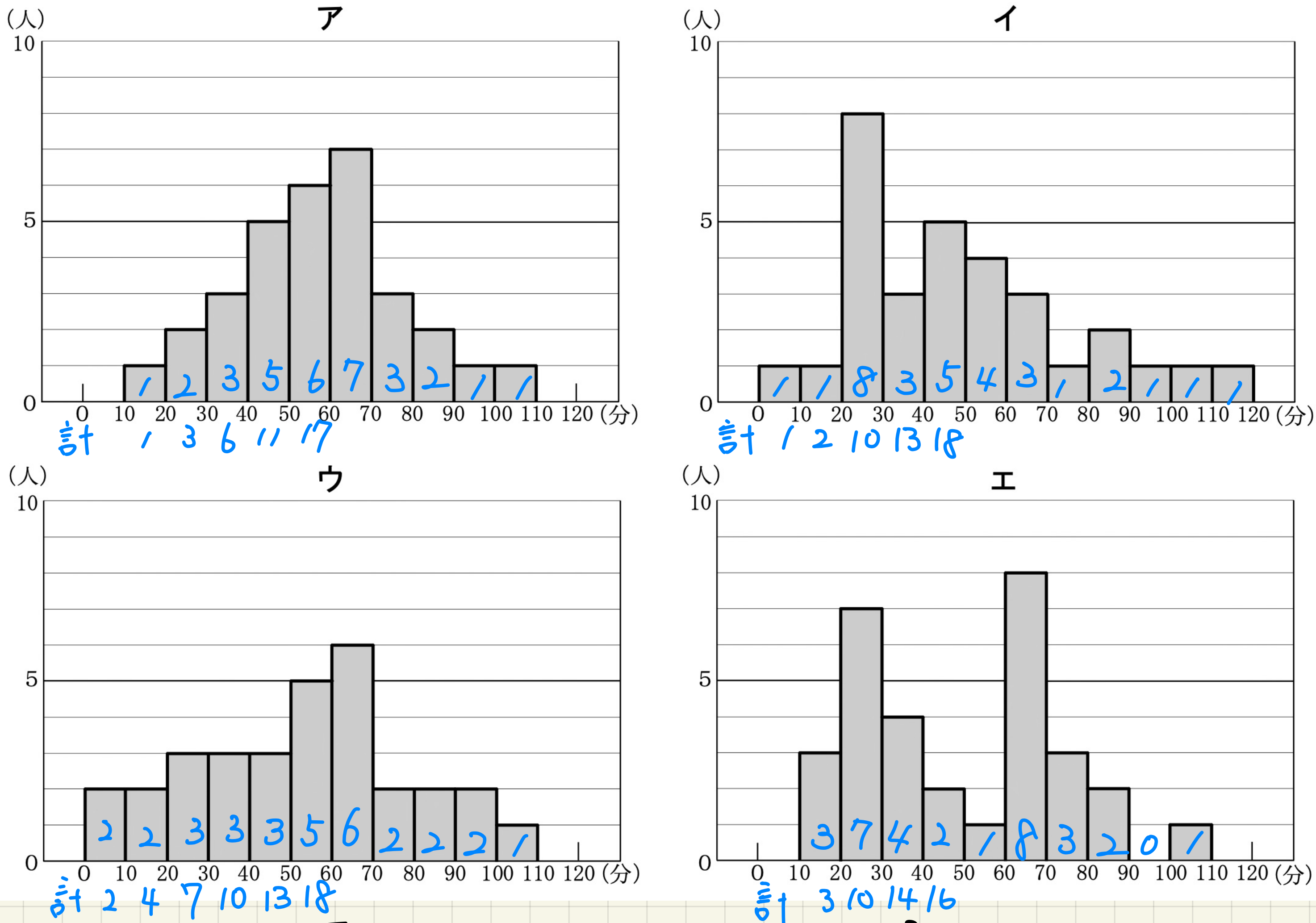
⇒ 接線 ⊥ OA

となるように作図すれば良い

3.

(1)

図 1



31人の中央値：データを小さい順に並べたときの

真ん中の値

⇒16番目の生徒の値

ア：中央値＝50～60，最頻値＝60～70 不適

イ：中央値＝40～50，最頻値＝20～30 適する

ウ：中央値＝50～60，最頻値＝60～70 不適

エ：中央値＝40～50 最頻値＝60～70 不適

よって，答えはイ

(2)

範囲 = 最大値 − 最小値
　　= 110 − 5
　　= 105 分

第1四分位数 = 下位データの中央値

下位データ

3年2組の読書時間（単位　分）

5	10	10	15	20	25	25	30	35	40
40	40	45	50	55	60	60	60	60	60
65	65	65	70	80	85	85	90	105	110

下位データの中央値

中央値

よって、第1四分位数 = 30 分

(3) ①

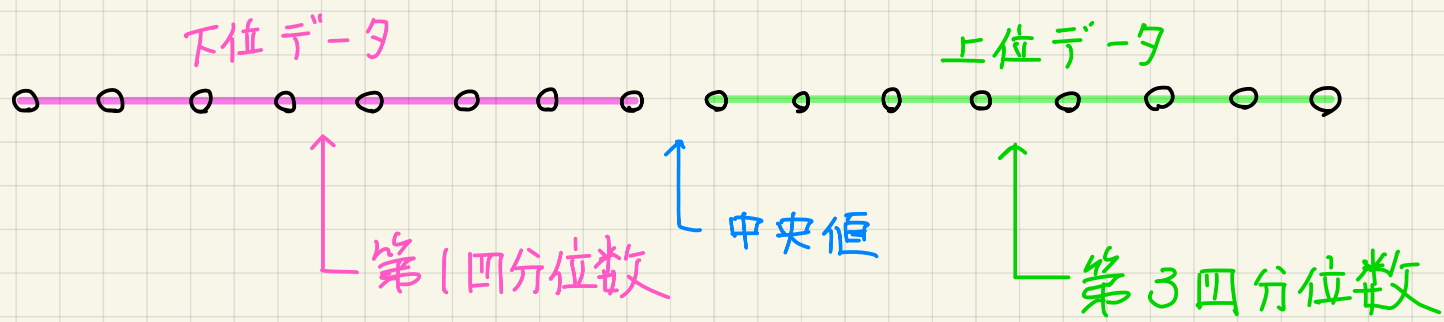
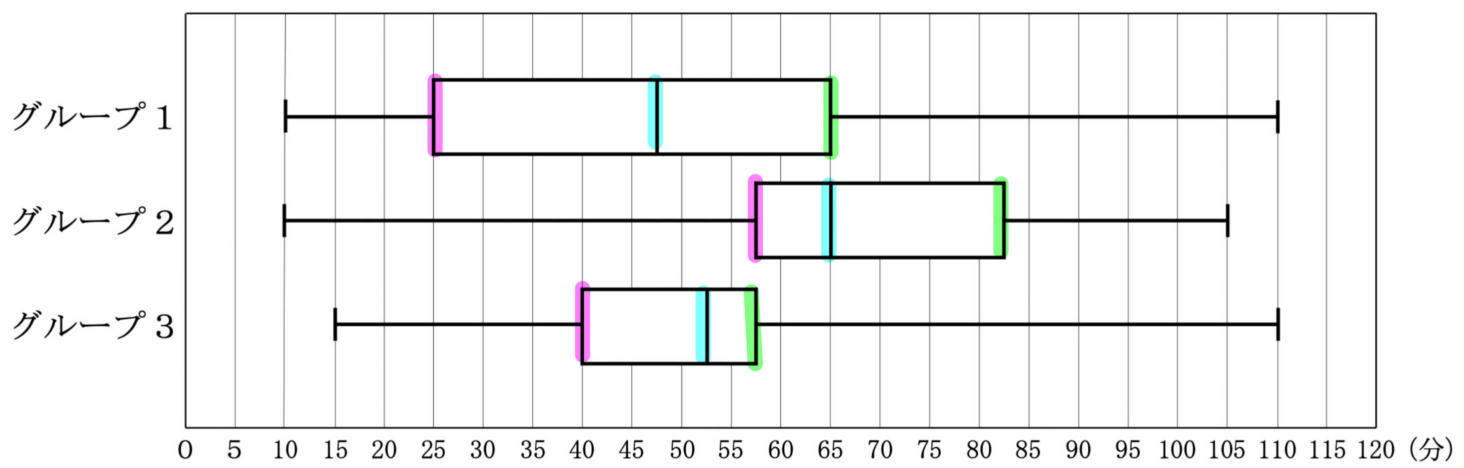
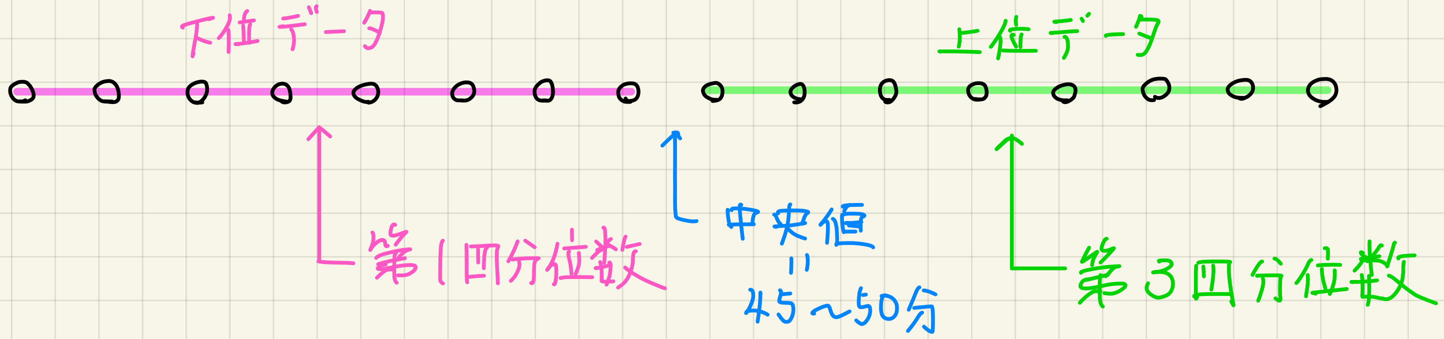


図2

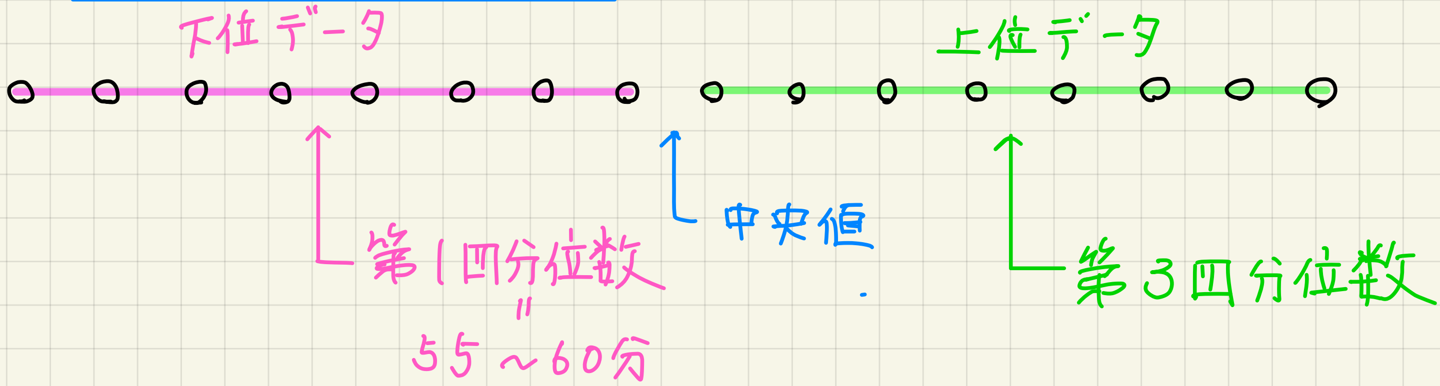


㋐：グループ1について、



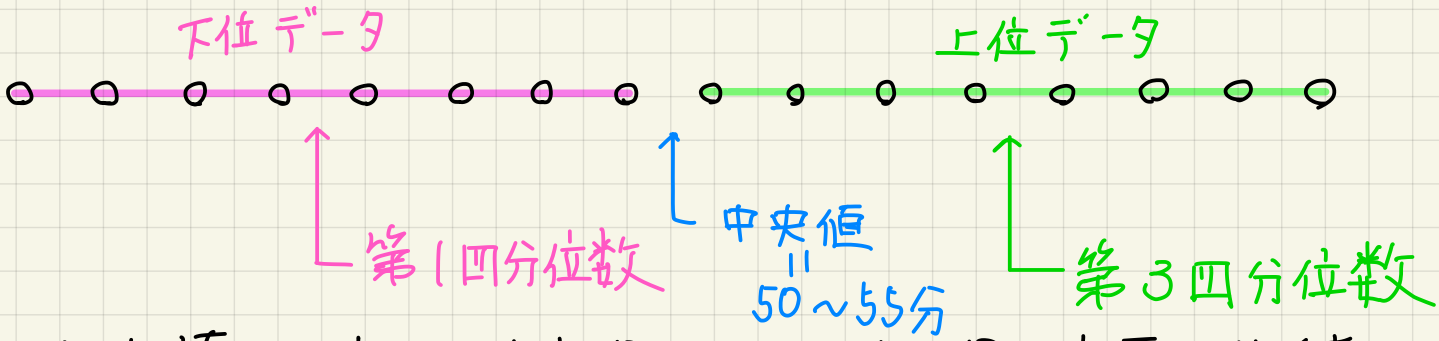
中央値が45〜50分なので、55分以下の生徒は少なくとも8人いる。

グループ2について



第1四分位数が55〜60分なので、55分以下の生徒は、多くても4人

グループ3について



中央値が50〜55分なので、55分以下の生徒は、少なくとも8人いる。

よって、グループ2が最も少ない ⇒ 正しい

イ：アより55分以下の生徒が最も少ないのはグループ2である。したがって，55分以上の生徒が最も多いのはグループ2である。
よって誤り

ウ：グループ1，グループ3について，80分以上100分未満は箱ひげ図の「ひげ」の部分である。
⇒「ひげ」の部分のデータは詳細が分からないため，確実にいるかどうか分からない
よって誤り

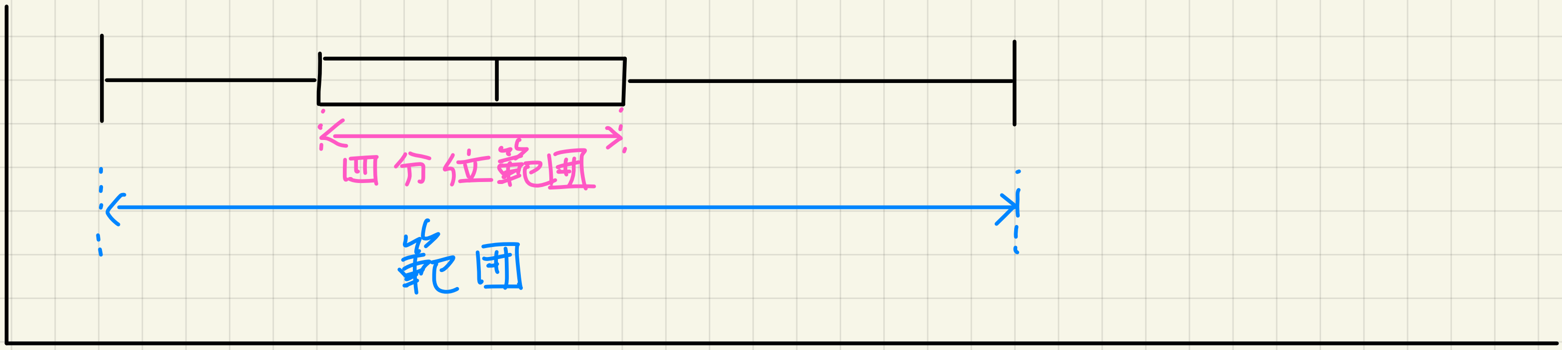
エ：グループ1の最大値：110分
グループ2の最大値：105分
グループ3の最大値：110分
したがって，100分以上の生徒は必ずいる。
⇒正しい

よって，答えは ア，エ

② データの散らばりぐあいは範囲の大きさと，四分位範囲の大きさで決まる。
範囲：最大値 − 最小値
四分位範囲：第3四分位範囲 − 第1四分位範囲

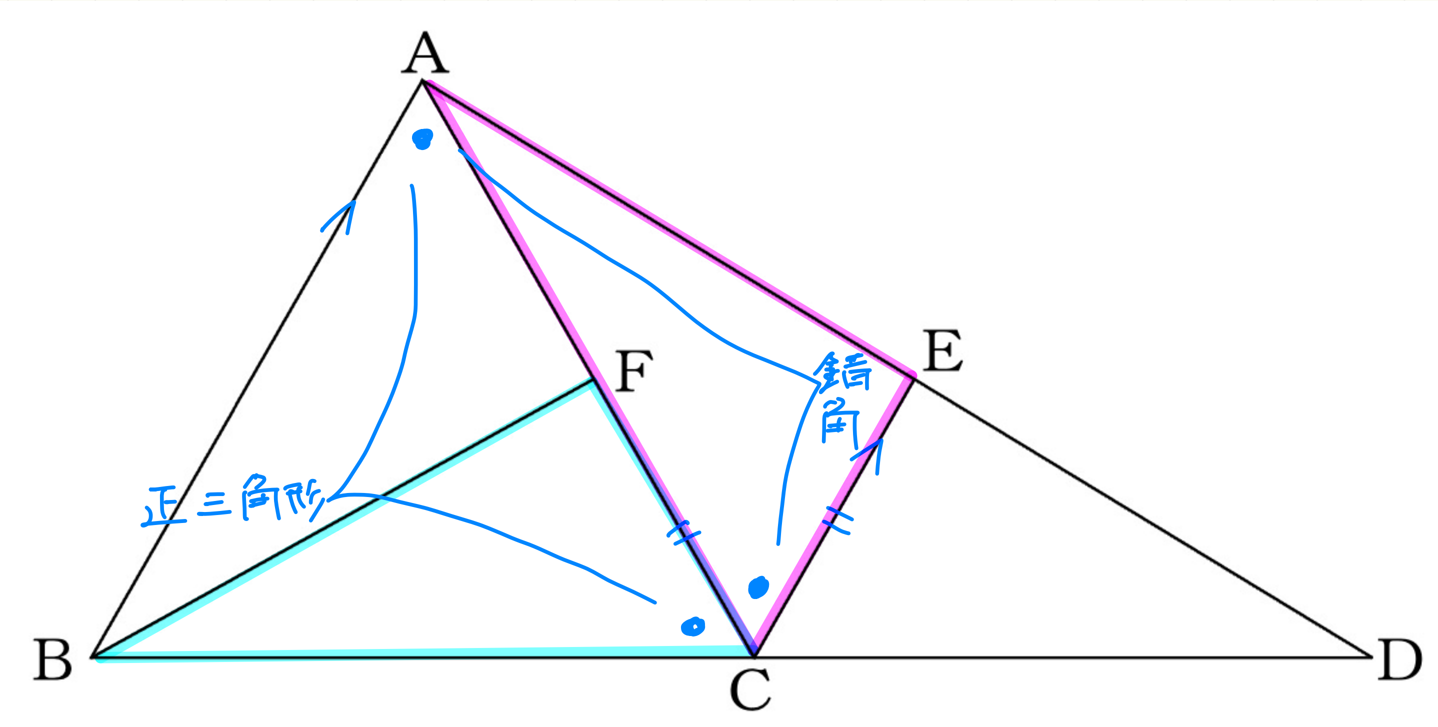
箱ひげ図より，グループ1 は 範囲と四分位範囲
(P)
がともに最も大きいので，データの散らばりぐあいが最も大きい

(参考)



4.

(1)



△ACE と △BCF において,

仮定から

CE = CF —— ①

△ABC は,正三角形なので,

AC = BC —②

AB // EC より錯角は等しいので

∠ACE = ∠CAB — ③

$\triangle ABC$は正三角形なので、

$\angle CAB = \angle ACB = 60^\circ$ — ④

③、④より

$\angle ACE = \angle ACB$ —— ⑤

$(= \angle BCF)$

①、②、⑤より2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、$\triangle ACE \equiv \triangle BCF$ (証明終わり)

(2)

ア

2つの自然数 a, b において、$a = 3$, $b = 6$ ならば、$a + b = 9$

仮定　　結論

逆は、仮定と結論を入れ替えれば良い。よって、

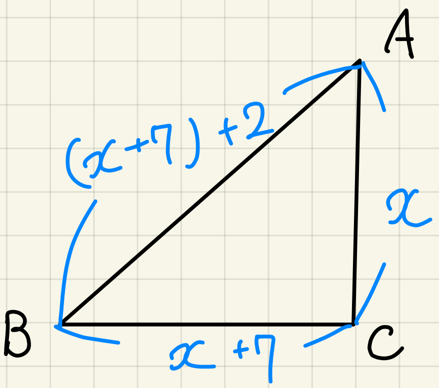
$a + b = 9$ ならば、$a = 3$, $b = 6$

イ　$a + b = 9$ を満たし、$a = 3$, $b = 6$ 以外の組み合わせを答えれば良い。

$\therefore\ a = 1,\ b = 8$

※ $a = 2$, $b = 7$ など、他の組み合わせでも良い!

(3)



AB : BC + 2 cm

BC : CA + 7 cm

より、最も長い辺はABである。

⇒ ABが斜辺

$AC = x\,\mathrm{cm}$ とすると.

$BC = \underbrace{x+7}_{AC+7}$, $AB = \underbrace{(x+7)}_{BC} \underbrace{+2}_{+2}$

$= x+9$

よって, 三平方の定理より

$(x+9)^2 = (x+7)^2 + x^2$

$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 14x + 49 + x^2$

$x^2 - 4x - 32 = 0$

$(x+4)(x-8) = 0$

$\therefore\ x = -4,\ 8$

$x > 0$ より $x = 8$

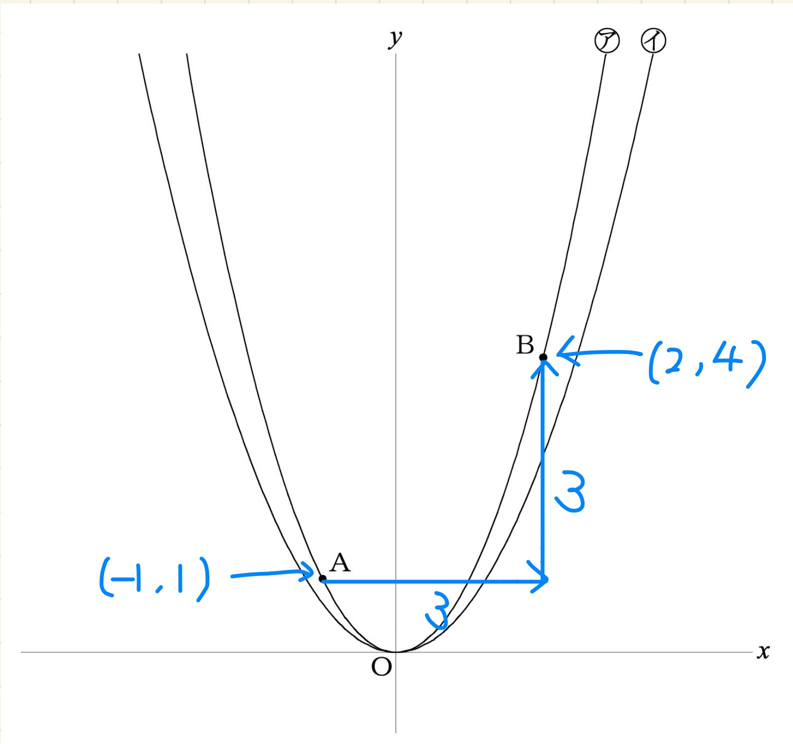
したがって, 斜辺の長さ(=AB)は.

$x + 9 = 8 + 9$

$= 17\ \mathrm{cm}$

5. I

(1)



1次関数では.

傾き = 変化の割合

なので,

傾き = 変化の割合

$= \dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

$= \dfrac{4-1}{2-(-1)}$

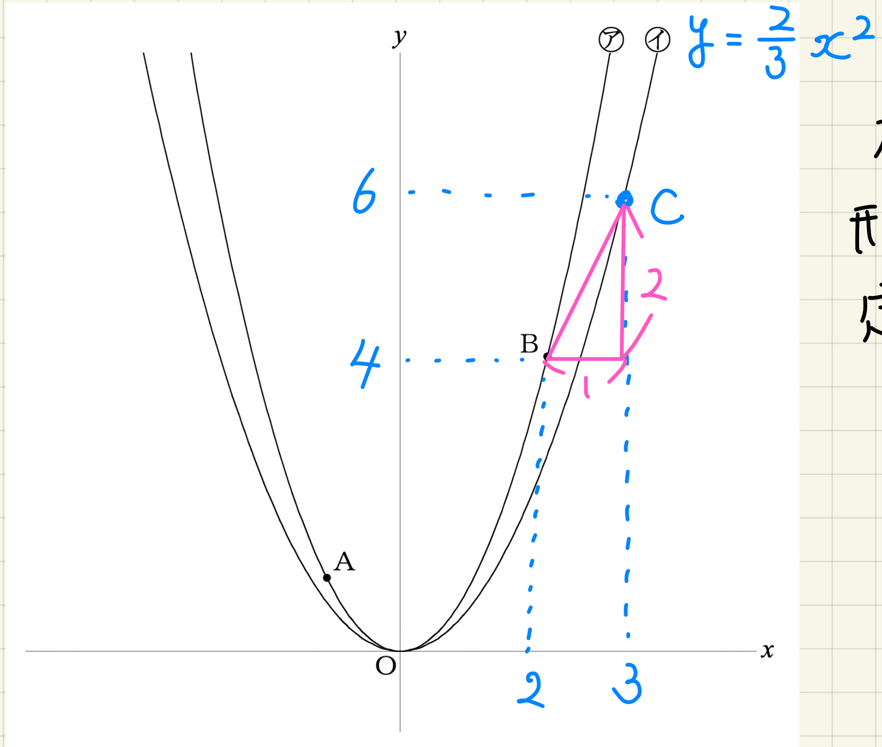
$= 1$

よって、求める直線の式を $y = x + b$ とおくと、
A $(-1, 1)$ を通るので、

$$1 = -1 + b \Rightarrow b = 2$$

よって、$y = x + 2$

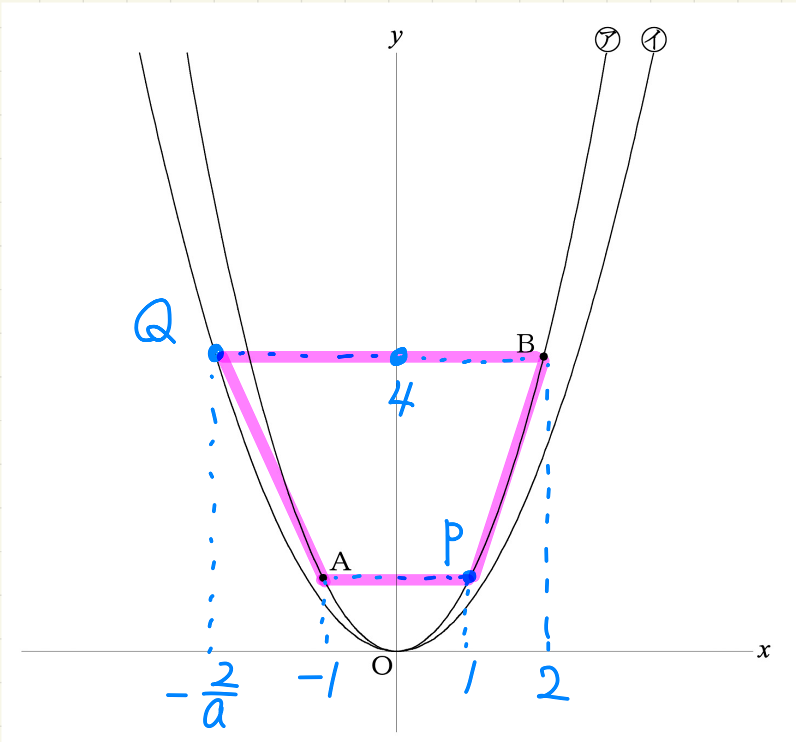
(2)



左図のように直角三角形を考えると、三平方の定理より

$$BC = \sqrt{1^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{5} \text{ cm}$$

(3)



点 P は ㋐ $y = x^2$ のグラフ上にあり、$x = 1$ なので、

$$y = 1^2 = 1$$

$\therefore$ P$(1, 1)$

点Qは① $y=ax^2$ のグラフ上にあり $y=4$ なので

$$4 = ax^2 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{a}}$$

$0<a<1$ であり，点Qのx座標は-1より小さいので，

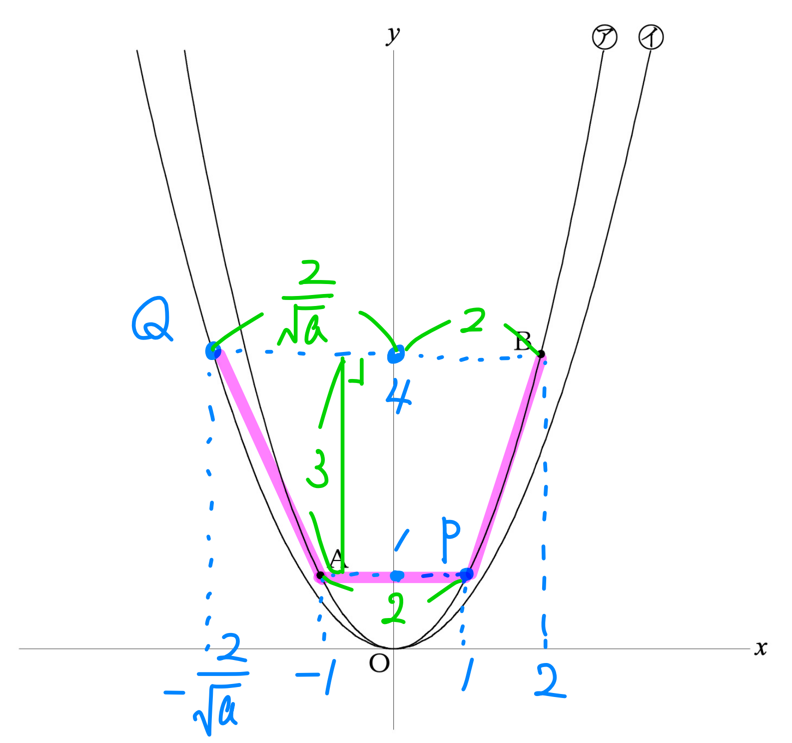
$$x = -\frac{2}{\sqrt{a}}$$

$$\therefore Q\left(-\frac{2}{\sqrt{a}}, 4\right)$$

※ $a>0$ より

$$\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\text{正の数}} > 0$$

$$-\frac{2}{\sqrt{a}} = -\frac{2}{\text{正の数}} = -(\text{正の数}) < 0$$



点Aと点P，点Bと点Qは，それぞれy座標が等しいので，□APBQは台形となる。
よって，面積は

$$\left(2+\frac{2}{\sqrt{a}}+2\right)\times 3\times\frac{1}{2} = 12$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{a}}+4\right)\times\frac{3}{2} = 12$$

$$\frac{2}{\sqrt{a}}+4 = 8 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{a}} = 4 \Rightarrow 4\sqrt{a} = 2$$

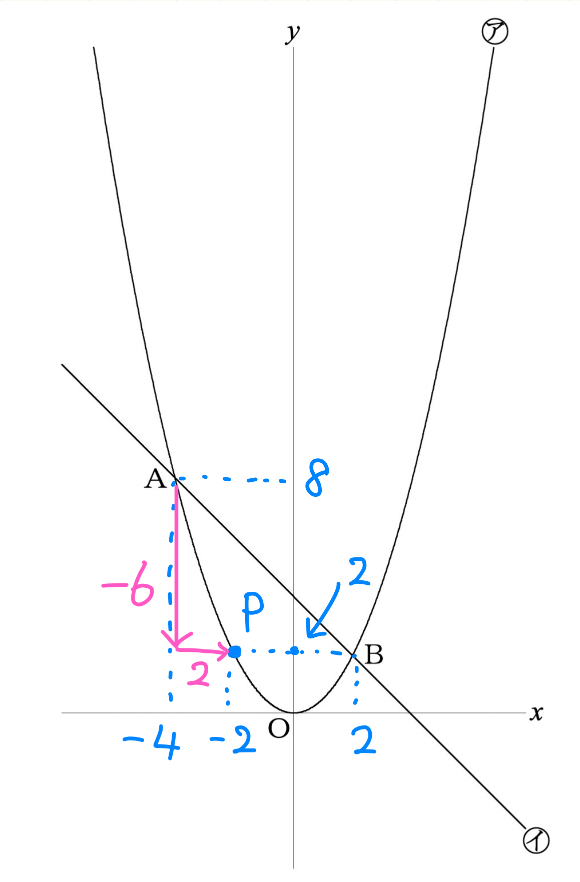
両辺を2乗して，

$$16a = 4$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

Ⅱ

(1)



点Pは、$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフ上にあり、$x=-2$なので、

$$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2$$

$$=2$$

$\therefore$ P$(-2, 2)$

1次関数では、傾き＝変化の割合なので、

$$\text{傾き}=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

$$=\frac{2-8}{-2-(-4)}=-3$$

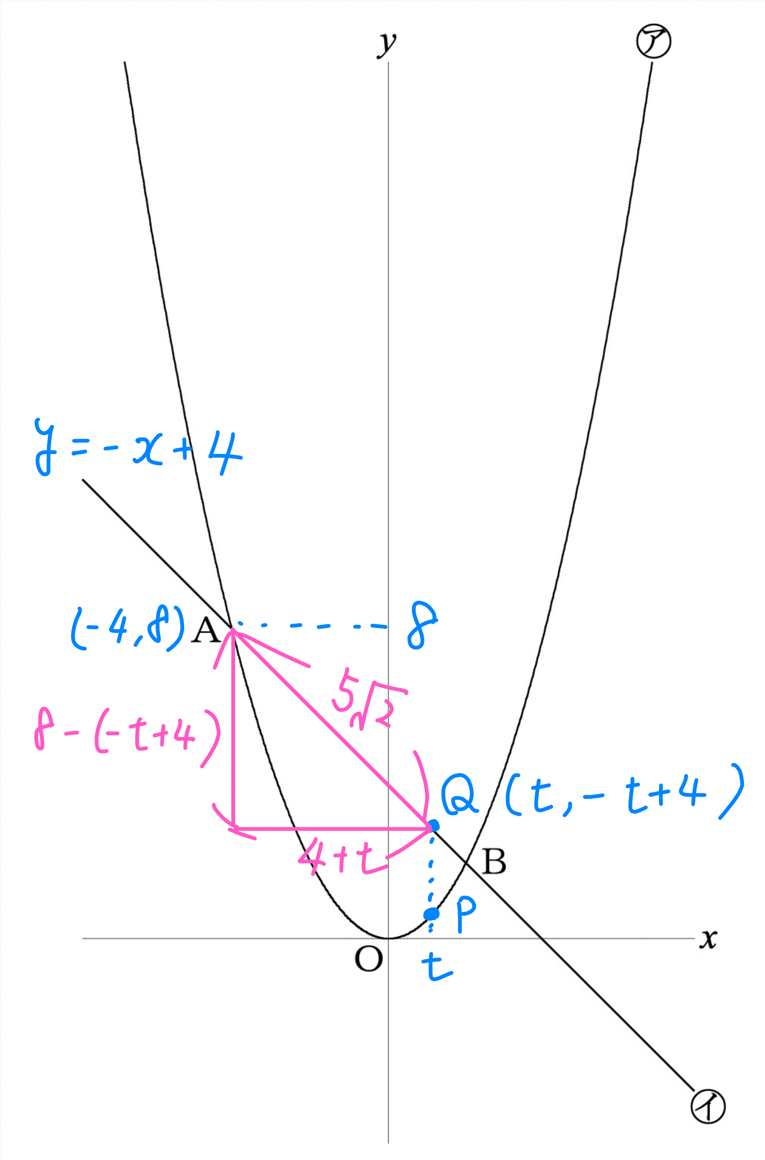
求める直線の式を$y=-3x+b$とおくと、P$(-2, 2)$を通るので、

$$2=-3\times(-2)+b \Rightarrow b=-4$$

$\therefore y=-3x-4$

(2)

①



点Pと点Qのx座標 $x = t$ で等しい。また、点Qは $y = -x + 4$ のグラフ上にあるので、

$$y = -t + 4$$

$\therefore$ Q$(t, -t + 4)$

左図のように直角三角形を考えると、三平方の定理より

$$(5\sqrt{2})^2 = (4 + t)^2 + \{8 - (-t + 4)\}^2$$

$$= (t + 4)^2 + (t + 4)^2$$

式を整理すると、

$$50 = t^2 + 8t + 16 + t^2 + 8t + 16$$

$$\therefore 2t^2 + 16t - 18 = 0$$

$$t^2 + 8t - 9 = 0$$

$$(t - 1)(t + 9) = 0$$

$$t = 1, -9$$

$-4 < t < 2$ より $t = 1$

②

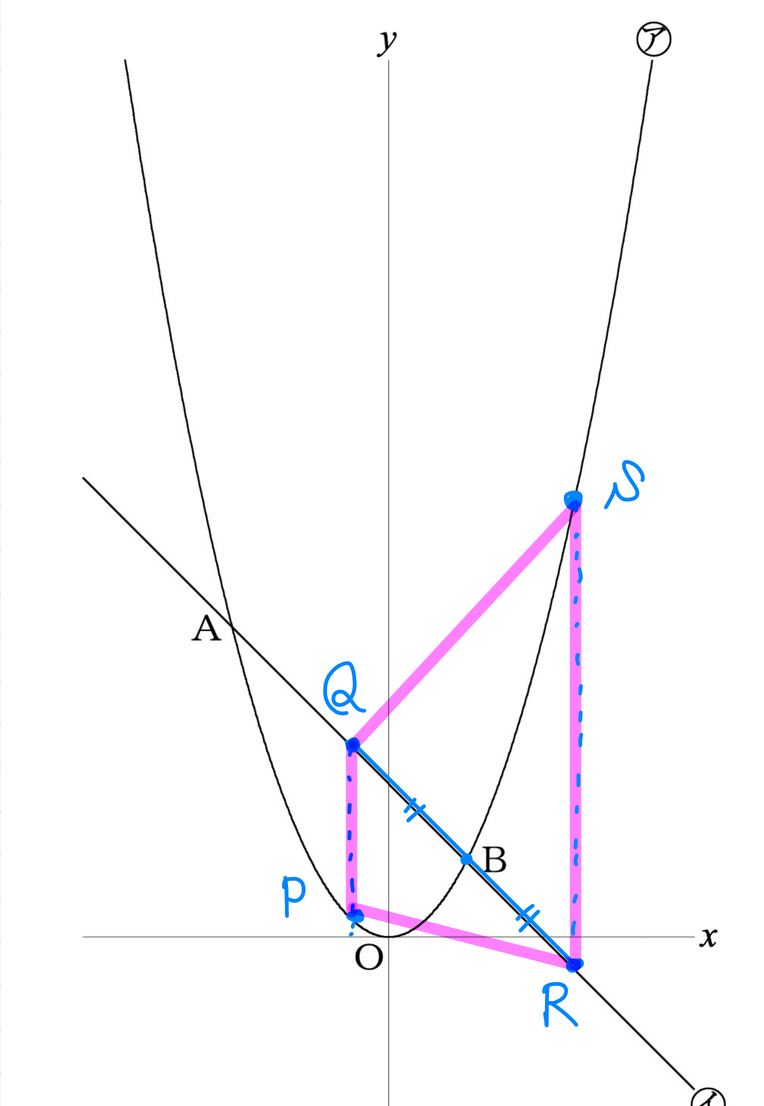


図1

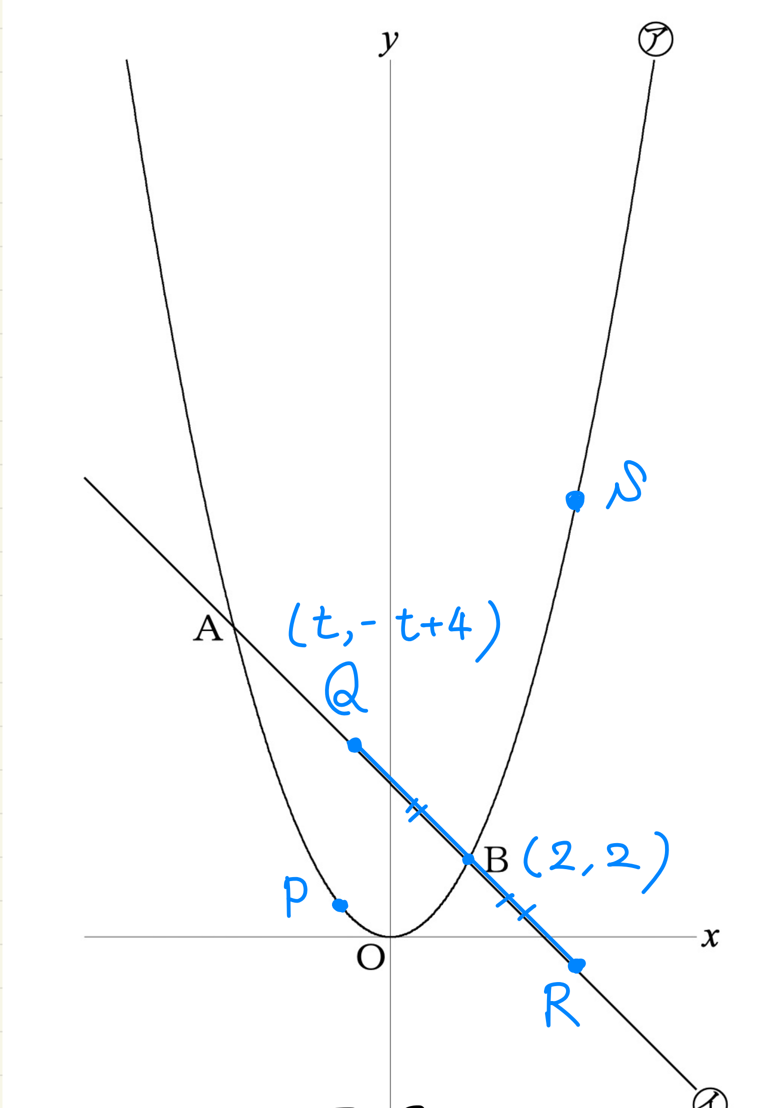


図2

点Pと点Q，点Rと点Sは，それぞれx座標が等しいので，□PQRSは台形となる（図1）

BQ = BRより 点BはQRの中点である。
点Rのx座標をsとすると，$y = -x + 4$のグラフ上にあるので，$y = -s + 4$　∴ $R(s, -s+4)$

中点の座標は 点Q，点Rの座標の平均なので，

$$x\text{座標} = \frac{t+s}{2} = \underbrace{2}_{\text{点Bの}x\text{座標}} \Rightarrow s = 4 - t.$$

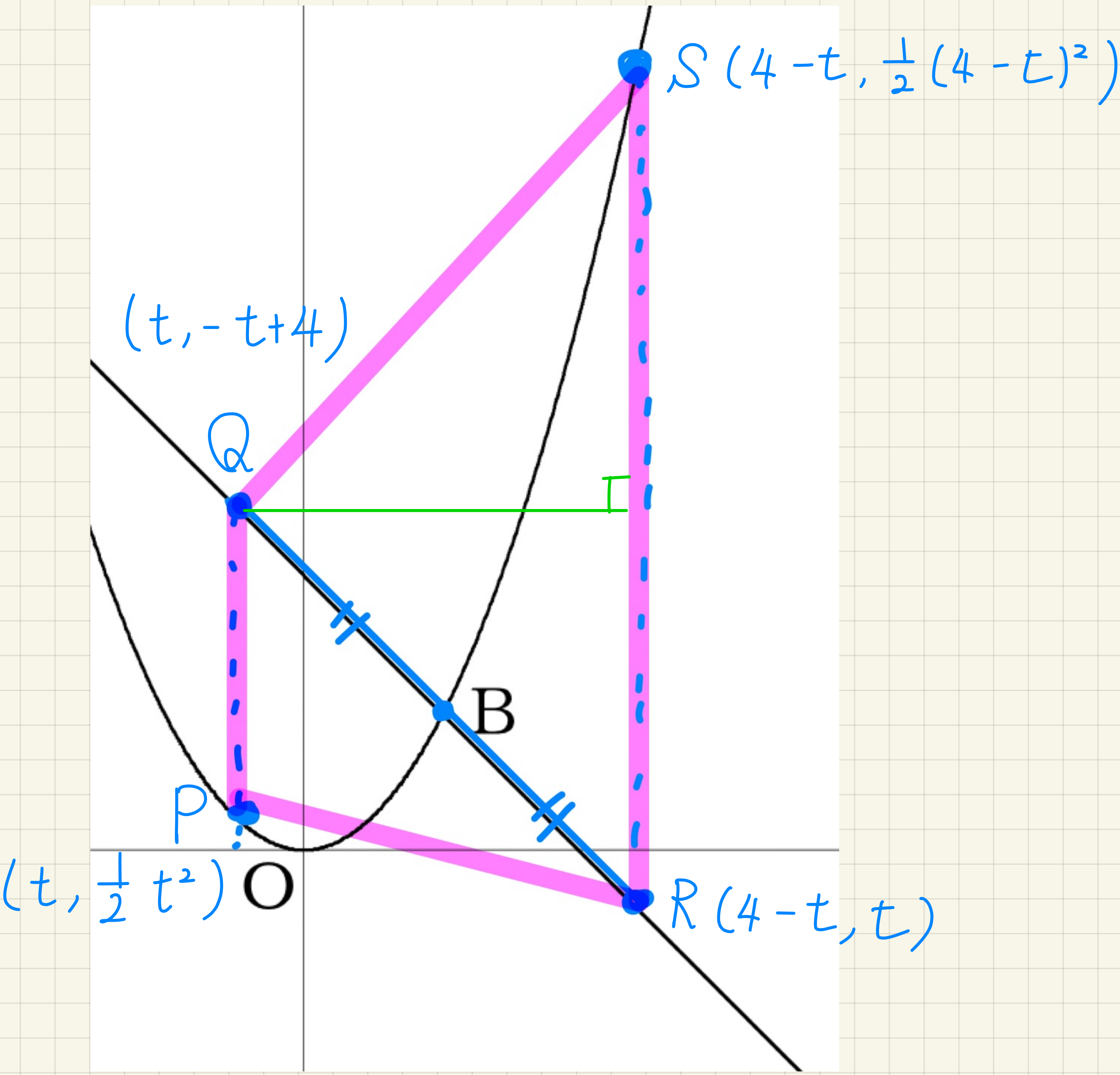
よって，Rのy座標は

$$-s+4=-(4-t)+4 \quad \cdots \quad s=4-t \text{ を代入}$$

$$=t \quad \Rightarrow \quad R(4-t,\ t)$$

点Sは $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり x座標は点Rと等しいので，

$$y=\frac{1}{2}(4-t)^2 \quad \Rightarrow \quad S\left(4-t,\ \frac{1}{2}(4-t)^2\right)$$



以上より

$$PQ = (-t+4) - \frac{1}{2}t^2$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 - t + 4$$

$$RS = \frac{1}{2}(4-t)^2 - t$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - 5t + 8$$

台形の高さ $= (4-t) - t$

$$= -2t + 4 = 2(-t+2)$$

よって、□PQRSの面積は

$$\left\{\underbrace{\left(-\frac{1}{2}t^2 - t + 4\right)}_{PQ} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}t^2 - 5t + 8\right)}_{RS}\right\} \times \underbrace{2(-t+2)}_{高さ} \times \frac{1}{2} = 30$$

$$(-6t+12)(-t+2) = 30$$

$$-6(t-2) \times (-1)(t-2) = 30$$

$$\therefore (t-2)^2 = 5$$

$$t - 2 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{5}$$

$2 < \sqrt{5} < 3$ より $\sqrt{5} = 2.\cdots$

$2 + \sqrt{5} = 2 + 2.\cdots = 4.\cdots$ ⇐ 4より大きい

$2 - \sqrt{5} = 2 - 2.\cdots = -0.\cdots$

$-4 < t < 2$ より、$t = 2 - \sqrt{5}$