2023年度　福島県

数学

kmkm

1.

(1)

① 与式 $= -3$

② 与式 $= -\frac{9}{12} + \frac{10}{12}$

$= \frac{1}{12}$

③ 与式 $= (-3a) \times (-8b^3)$

$= 24ab^3$

④ 与式 $= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$= -\sqrt{2}$

(2) もとの球の半径を r とすると, もとの球の体積は

$\frac{4}{3}\pi r^3$

半径を2倍にしたときの球の体積は

$\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8r^3$

$= \frac{32}{3}\pi r^3$

したがって, もとの球の体積の8倍である.

参考

もとの球のx倍とすると.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times x = \frac{32}{3}\pi r^3$$

両辺$\times \frac{3}{\pi r^3}$をすると.

$$4x = 32 \Rightarrow x = 8$$

2.

(1) 飲み物 a mLに31%の桃の果汁が含まれているので

$$a \times \frac{31}{100} = \frac{31}{100}a \text{ mL}$$

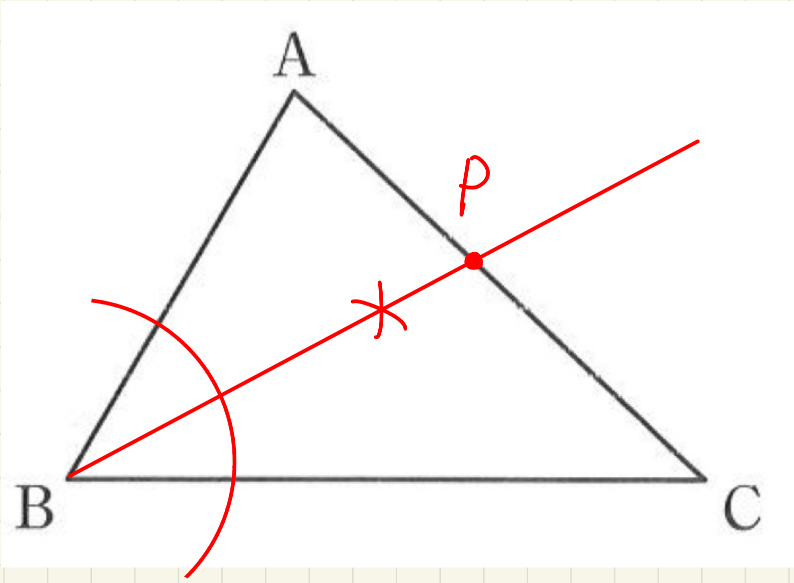
(2) $3x + 2y - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2y = -3x + 4$$

$$\therefore y = \frac{-3x+4}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}x + 2$$

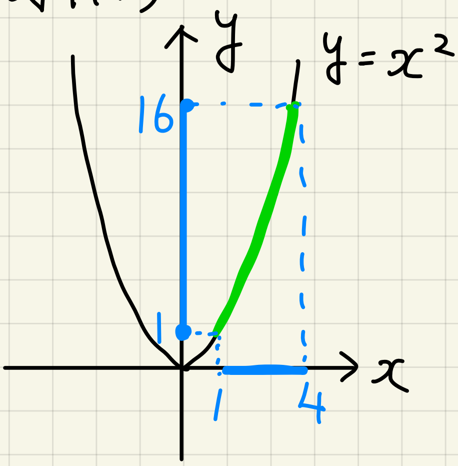
(3)



∠ABCの二等分線の線上は、どこもAB、ACと距離が等しい
⇒二等分線とACの交点が点P

(4) $y = ax^2$ について、x が p から q まで変化するときの変化の割合は、$a(p+q)$ で表される。
$a=1,\ p=1,\ q=4$ より、変化の割合は、
$1(1+4) = 5$

(別解)



$x=1$ のとき、$y=1^2=1$
$x=4$ のとき、$y=4^2=16$
よって変化の割合は、

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{16-1}{4-1} = \frac{15}{3}$$
$$= 5$$

(5) データを小さい順に並べたとき

第1四分位数 ⇒ 8番目のデータ

中央値 ⇒ 15番目, 16番目の平均値

第3四分位数 ⇒ 23番目のデータ

図1

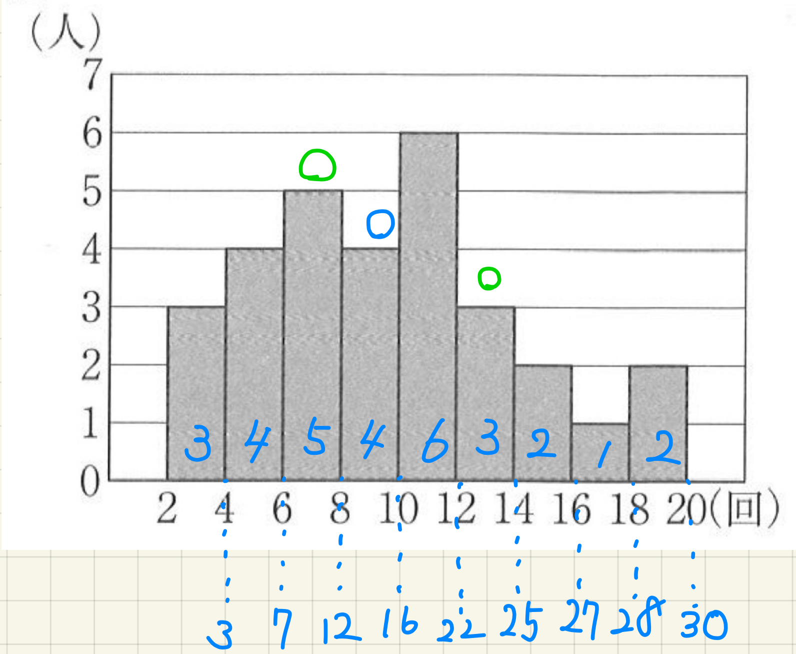


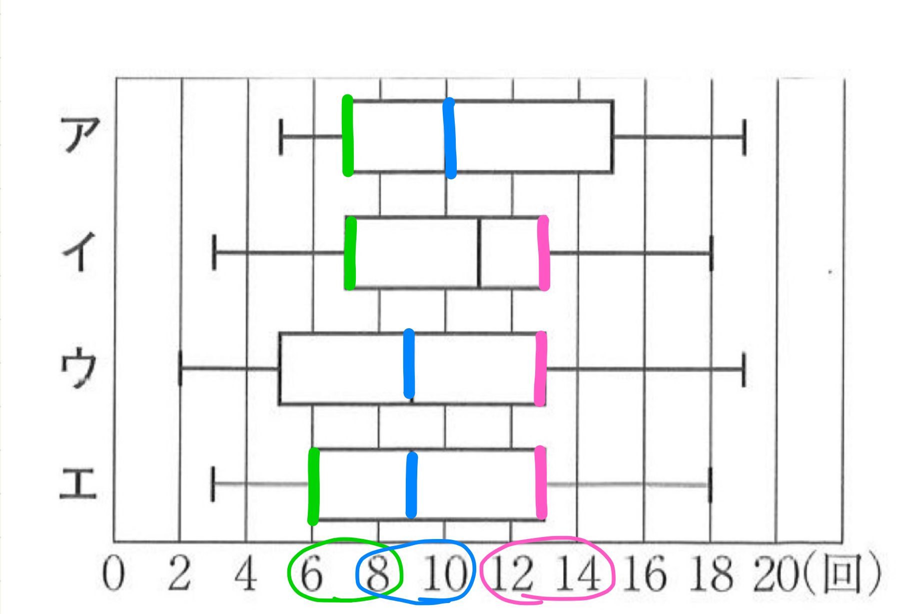
図1より

第1四分位数：6～8回

中央値：8～10回

第3四分位数：12～14回

図2



全てを満たすのは、

エの箱ひげ図である。

3

(1)

① 樹形図は以下の通り

A	B	A＞B
1	1	×
	2	×
	3	×
2	1	○
	2	×
	3	×
3	1	○
	2	○
	3	×

よって，求める確率は $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

② (ア)の場合，①の樹形図で×の場合，
Aは景品をもらえない。その確率は $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

(イ)の場合の樹形図は，以下の通り

A	B	A＞B
1	2	×
	3	×
2	1	○
	3	×
3	1	○
	2	○

Aが景品をもらえないのは，×のときなので，その確率は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$ より Aは，(ア)のときの方が景品をもらえない確率が高い。

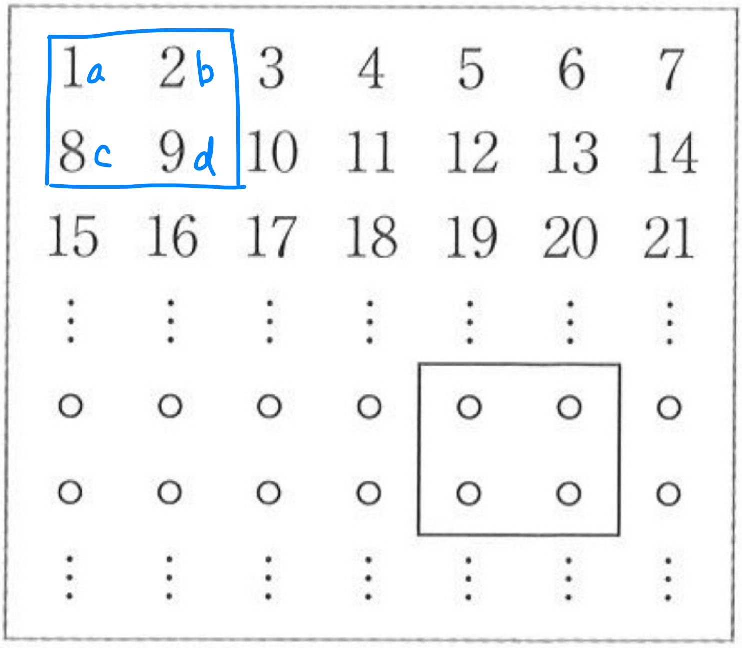
㊟ $\frac{4}{6}>\frac{3}{6}$

よって，(ア)で確率は $\frac{2}{3}$

(2)

①

図 1



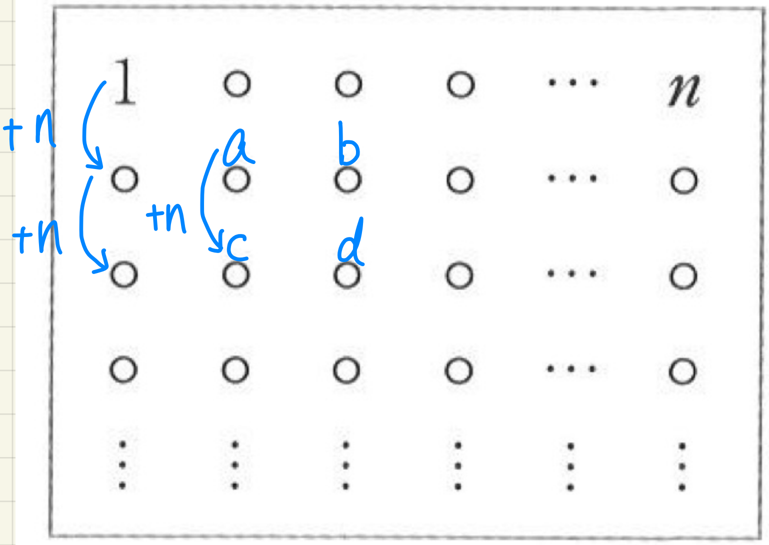
縦，横に２つずつ並んでいる４つの整数であればどこを選んでも同じ値となる。

左図のように４つ選ぶと

$$ad - bc = 9 - 16$$
$$= -7$$

②

図 2



b, c, d は，a と n を使って，

$$b = a + 1$$
$$c = a + n$$
$$d = c + 1$$
$$= \underbrace{(a+n)}_{c} + 1$$

と表すことができる。

$$ad - bc = a(a+n+1) - (a+1)(a+n)$$
$$= a^2 + an + a - (a^2 + an + a + n)$$
$$= a^2 + an + a - a^2 - an - a - n$$
$$= -n$$

したがって、$ad-bc$ は、常に $-n$ となる。

4.

4人のグループの数を x, 5人のグループの数を y とする。

生徒は200人なので、

$$4x+5y=200 \quad \text{——} ①$$

ごみ袋を配るとき、1人1枚ずつに加えて、グループごとの予備として、4人のグループには2枚ずつ、5人のグループには3枚ずつ配ったところ、配ったごみ袋は314枚なので、

$$\underbrace{200\times1}_{\text{200人の生徒に1人1枚}}+\underbrace{2x}_{\text{4人のグループに2枚}}+\underbrace{3y}_{\text{5人のグループに3枚}}=314$$

$$\Rightarrow 2x+3y=114 \quad \text{——} ②$$

①, ② を連立方程式として解く。

$$\begin{cases} 4x+5y=200 & \text{——} ① \\ 2x+3y=114 & \text{——} ② \end{cases}$$

① − ② ×2 より

$$\begin{array}{rr} & 4x+5y=200 \\ -) & 4x+6y=228 \\ \hline & -y=-28 \\ & y=28 \end{array}$$

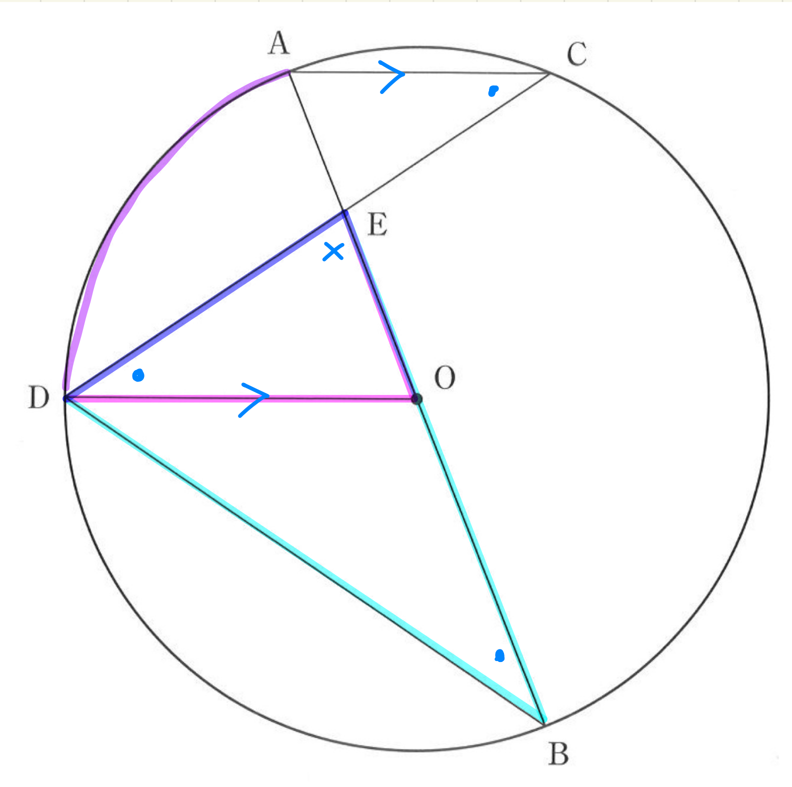
$y=28$ を②に代入して.

$$2x+3\times 28=114$$
$$2x=114-84$$
$$=30$$
$$x=15$$

よって, 4人のグループ数15, 5人のグループ数28

5.

(1)



△EDOと△EBDにおいて,

共通な角は等しいから

$\angle DEO=\angle BED$ —①

$AC /\!/ DO$より錯角が等しいので.

$\angle ACD=\angle EDO$ —②

$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいので.

$\angle ACD=\angle EBD$ —③

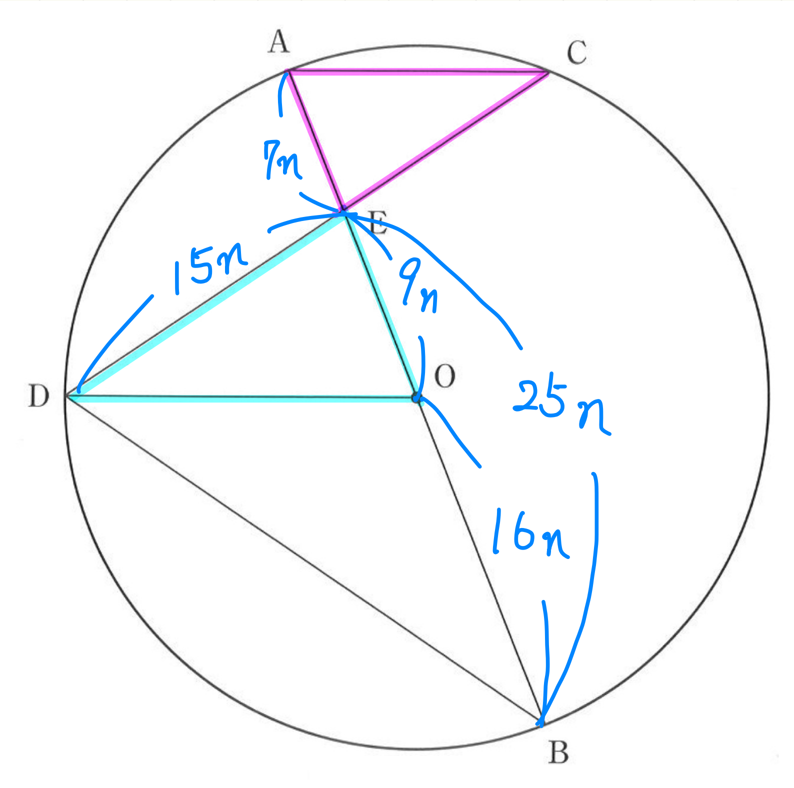
②, ③より

$\angle EDO=\angle EBD$ —④

①, ④より2組の角がそれぞれ等しいので.

$\triangle EDO \backsim \triangle EBD$ (証明終わり)

(2)



△EACと△EODにおいて，AC∥DOより錯角が等しいので

∠EAC = ∠EOB ─①

∠ECA = ∠EDO ─②

①，②より2組の角がそれぞれ等しいので

△EAC ∽ △EOD

対応する辺の比は等しいので

$EA : EO = AC : OD$

$= 7 : 9$

よって，nを自然数とすると

$EA = 7n$，$EO = 9n$

と表すことができる．

$OA = EA + EO = 7n + 9n = 16n$

であり，OA，OBは円の半径なので

$OB = OA = 16n$

したがって，

$EB = OE + OB$

$= 9n + 16n$

$= 25n$

また，(1)より $\triangle EDO \backsim \triangle EBD$ なので，

$$ED : EB = EO : ED$$

$$\Rightarrow ED^2 = EB \times EO$$

$$= 25n \times 9n$$

$$= 225n^2$$

$ED > 0$ より. $ED = 15n$.

したがって，

$$\triangle EDO : \triangle EBD = ED : EB$$

$$= 15n : 25n$$

$$= 3 : 5$$

6.

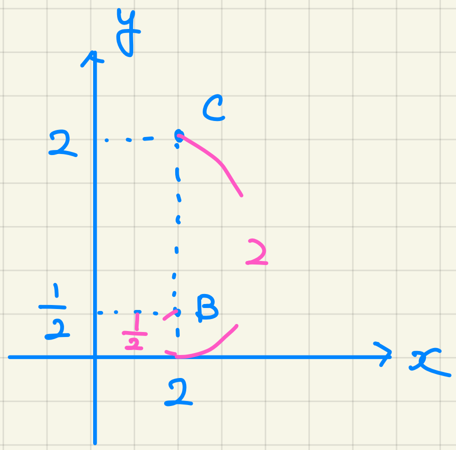
(1) 点 C は $y = x$ のグラフ上にあり，$x = 2$ なので.

点Bのx座標と等しい

$y = 2$ $\quad \therefore C(2, 2)$

点 B は. $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフ上にあり. $x = 2$ なので.

$y = \dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore B\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$

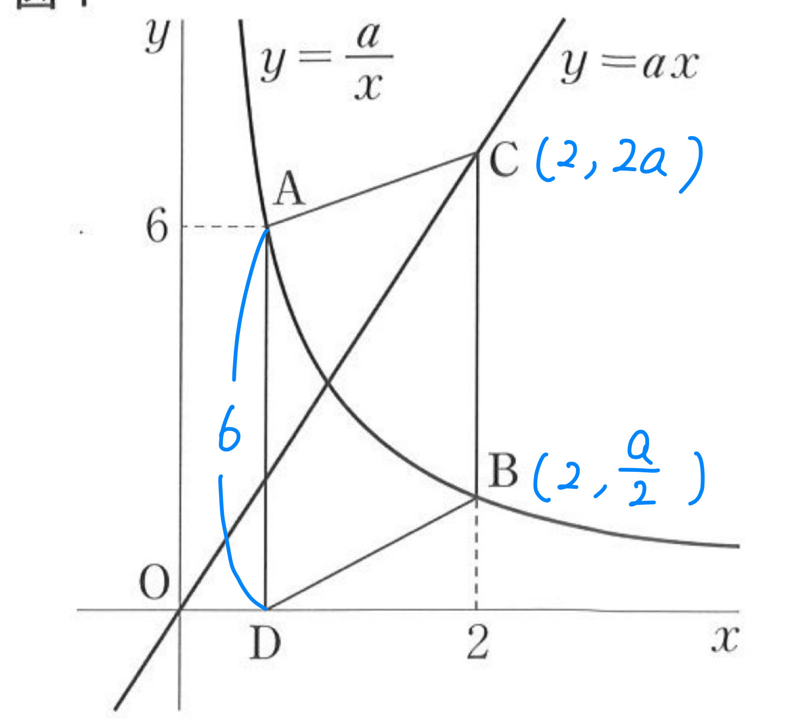


よって BC の長さは

$$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(2)

図 1



□ADBC は平行四辺形なので、

AD = BC

よって

$6 = 2a - \frac{1}{2}a$

$= \frac{3}{2}a$

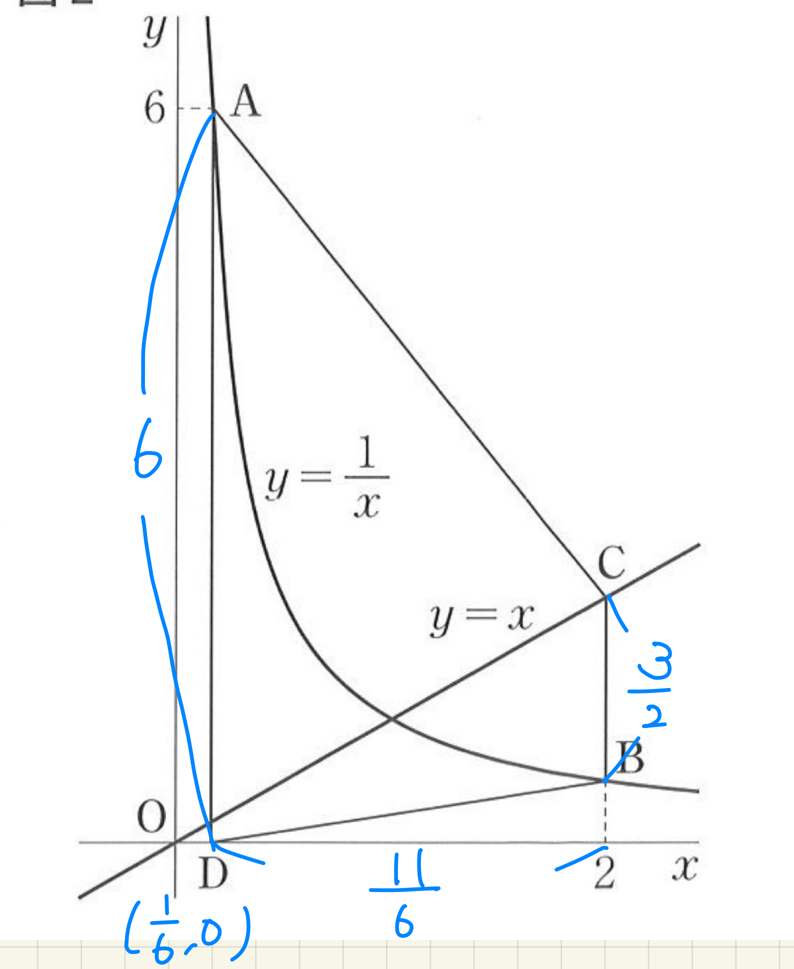
$a = 6 \times \frac{2}{3}$

$= 4$

$\therefore a = 4$

(3)

図 2



点 A は $y = \frac{1}{x}$ のグラフ上にあり、$y = 6$ なので

$6 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

$\therefore A(\frac{1}{6}, 6)$

点 D は、点 A と x 座標が等しく、x 軸上にあるので、

$D(\frac{1}{6}, 0)$

また、□ADBC は AD // BC より台形である。

よって，$a=1$ のときの▱ADBCの面積は

$$\left(\frac{3}{2}+6\right)\times\frac{11}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}^{5}\times\frac{11}{6}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{55}{8}$$

次に $a\neq1$ のときの四角形ADBCの面積を求める

点A：$y=\frac{a}{x}$ のグラフ上にあり $y=6$ なので

$$6=\frac{a}{x}\Rightarrow x=\frac{a}{6}\qquad\therefore A\left(\frac{a}{6},6\right)$$

点B：$y=\frac{a}{x}$ のグラフ上にあり，$x=2$ なので

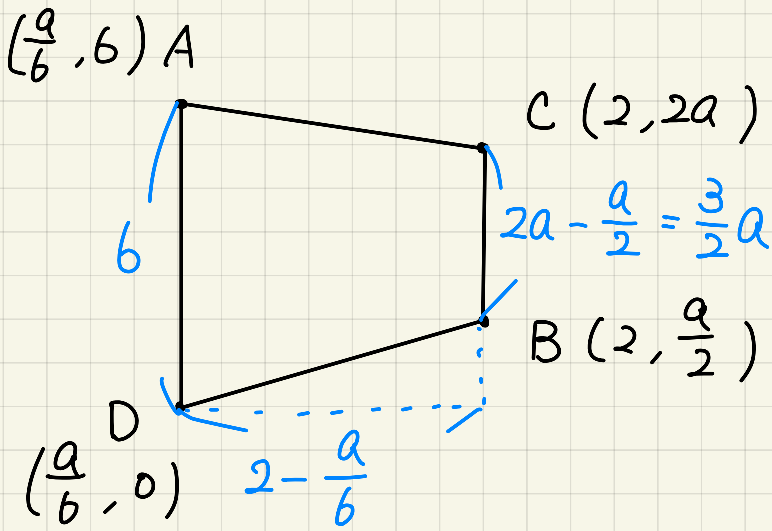
$$y=\frac{a}{2}\qquad\therefore B\left(2,\frac{a}{2}\right)$$

点C：$y=ax$ のグラフ上にあり $x=2$ なので

$$y=2a\qquad\therefore C(2,2a)$$

点D：点Aと x 座標が等しく，x 軸上にあるので

$$D\left(\frac{a}{6},0\right)$$



よって、□ADBCの面積は

$$\left(\frac{3}{2}a+6\right)\times\left(2-\frac{a}{6}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\left(3a-\frac{1}{4}a^2+12-a\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\left(-\frac{1}{4}a^2+2a+12\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{8}a^2+a+6$$

これが $a=1$ のときの面積$\left(\frac{55}{8}\right)$と等しくなれば良いので

$$-\frac{1}{8}a^2+a+6=\frac{55}{8}$$

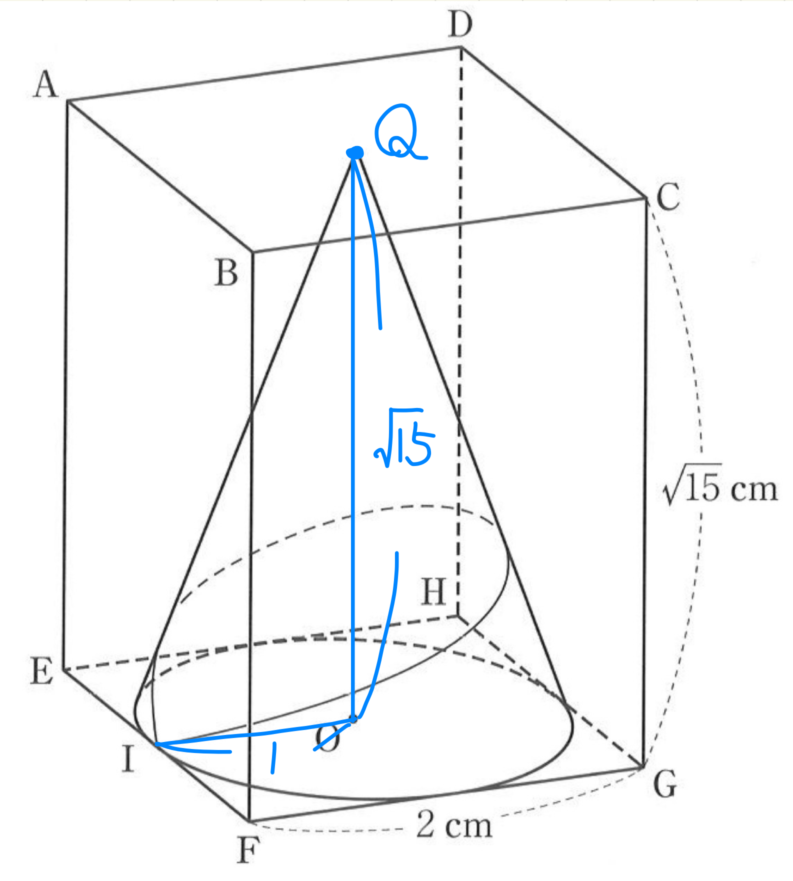
両辺×(−8)

$$a^2-8a-48=-55$$
$$a^2-8a+7=0$$
$$(a-1)(a-7)=0$$
$$a=1,7$$

$a=1$ 以外の値を求めるので、$a=7$

7.

(1)



円すいの頂点をQとする。

OI：円の半径なので

1cm

QO：正四角柱と高さが等しいので

$\sqrt{15}$ cm

よって，△QIOで三平方の定理より

$QI = \sqrt{1 + \sqrt{15}^2} = \sqrt{1+15} = \sqrt{16}$

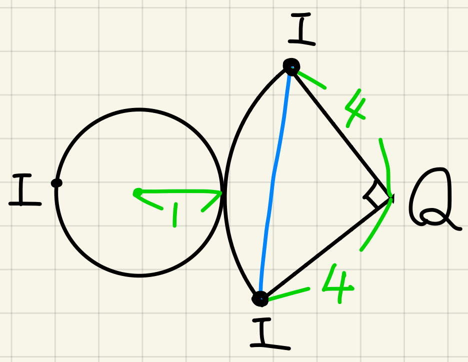
$= 4$ cm

(2) 円すいを展開したときの側面（おうぎ形）の中心角を$a°$とする。

おうぎ形の円周の長さは，底面の円周の長さと等しいので，

$$\underbrace{4}_{\text{おうぎ形の半径（母線の長さ）}} \times 2 \times \pi \times \frac{a}{360} = 2\pi$$

$$\frac{a}{360} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 90°$$



よって、円すいの展開図は、左の通りとなる。

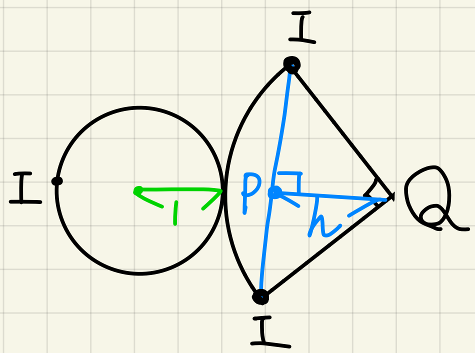
円すいの側面にひもをかけたとき、最も短くなるのは、左の青線で書いたとき(直線)となる。

よって、三平方の定理より

$$\text{ひもの長さ} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

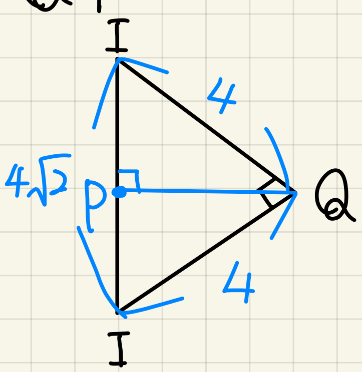
$$= 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

(3)



円すいの展開図において、頂点Qから弦に垂線を下ろした点をPとすると、この点Pが、□ABCDとの距離が最も短くなるときである。

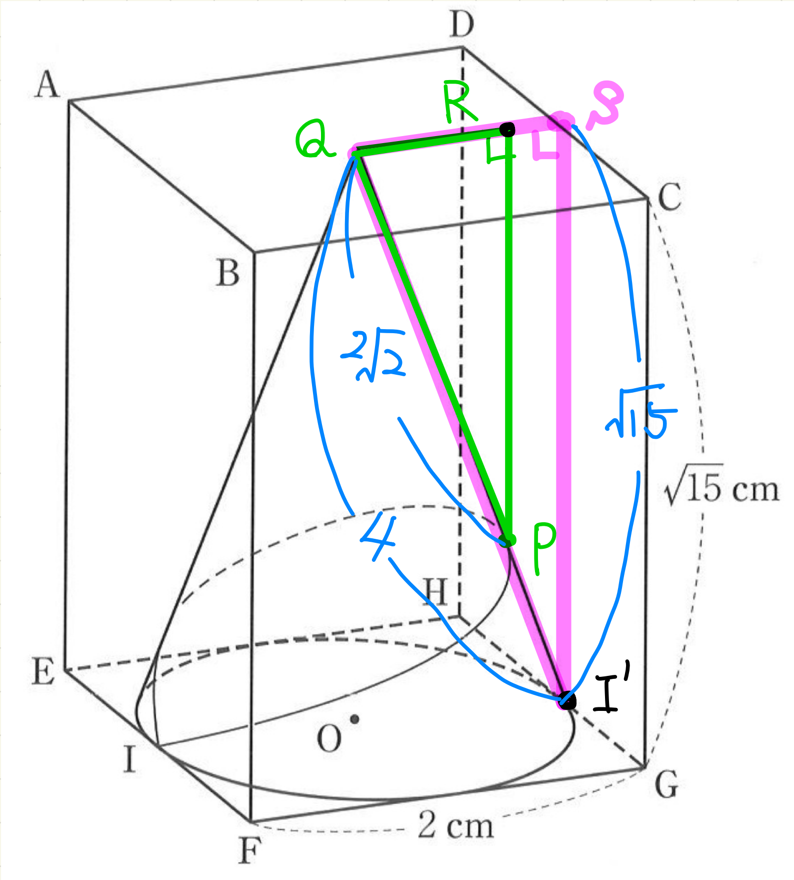
QP = h cm とする



三角形の面積を2通りで表すと、

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times h$$

$$\therefore\ 4 = \sqrt{2}h \quad \Rightarrow h = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$



点PからロABCDに下ろした垂線のあしを点R，点I'からロABCDに下ろした垂線のあしをSとする。

△PQRと△I'QSにおいて，PR//I'Sより同位角が等しいので

$\angle PRQ = \angle I'SQ$ ―①

$\angle QPR = \angle QI'S$ ―②

①，②より2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle PQR \sim \triangle I'QS$

対応する辺の比は等しいので

$\underset{2\sqrt{2}}{PQ} : \underset{\substack{4\\ \shortparallel \\ \text{母線}}}{I'Q} = PR : \underset{\substack{\sqrt{15}\\ \shortparallel \\ CG}}{I'S}$

$\therefore\ 4PR = 2\sqrt{30} \Rightarrow PR = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$ cm

よって，求める四角すいの体積は

$2 \times 2 \times \dfrac{\sqrt{30}}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\sqrt{30}}{3}$ cm^3