2023年度 茨城県
数学

Km Km

1.

(1)

① 与式 $= -5$

② 与式 $= 2x + 6y - 5x + 4y$

$= -3x + 10y$

③ 与式 $= \dfrac{15a^2b \times b^2}{3ab^3}$

$= 5a$

※ $\dfrac{9}{\sqrt{3}} = \dfrac{9}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{3}$

$= 3\sqrt{3}$

④ 与式 $= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

(2) 与式 $= (x-3)^2$

2.

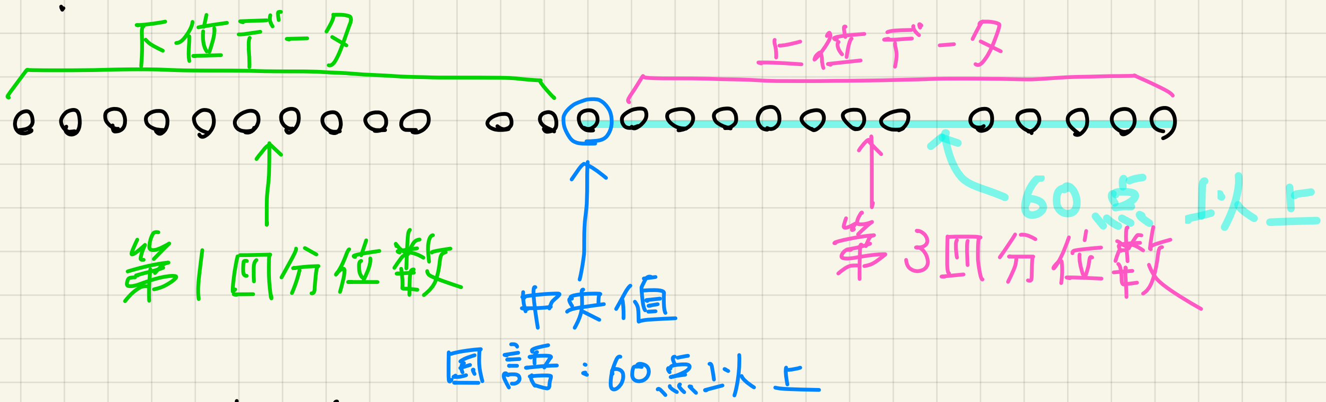
(1)

ア：平均値は、箱ひげ図に△や×で表示されるが、記載がないため、各教科の平均点は分からない ⇒ 誤り

イ：国語の最低点は30点より大きい
数学の最低点は20点
英語の最低点は20点より大きい。

したがって、1人の生徒が全て最低点だったとしても 30+20+20=70点より大きい。
よって正しい。

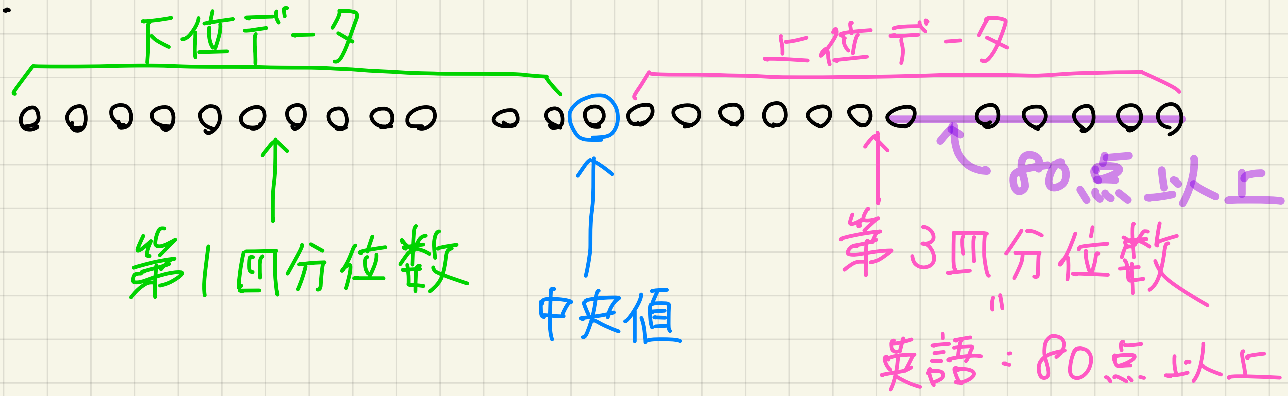
ウ：



25人の生徒のデータでは、
第1四分位数：6番目と7番目の平均値
中央値：13番目の値
第3四分位数：19番目と20番目の平均値。

国語の中央値は60点以上のため，少なくとも13人は60点以上である。よって誤り

エ：



英語の第3四分位数は80点以上であるため、少なくとも6人は80点以上である。よって正しい

以上より答えはイ，エ

(2) 252を素因数分解すると

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

ある自然数の2乗 ⇒ $○^2 \times △^2 \times □^2 \times \cdots$

$= (○ \times △ \times □ \times \cdots)^2$

となれば良い

$\dfrac{252}{n} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 7}{n}$ より $n = 7$ であれば

$\dfrac{2^2 \times 3^2 \times 7}{7} = 2^2 \times 3^2 = (2 \times 3)^2$ となる。

よって，$n = 7$

(3) $x^2 + 3ax + a^2 - 7 = 0$ に $a = -1$ を代入して

$$x^2 + 3 \times (-1)x + (-1)^2 - 7 = 0$$

$$\therefore x^2 - 3x - 6 = 0$$

$x^2 - 3x - 6$ は因数分解できないので，解の公式より

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

(4) 箱の数をx個とする.

1個の箱にチョコレートを30個ずつ入れたところ, 22個あまったので. チョコレートの総数は.

$$30x + 22$$

また, 1個の箱にチョコレートを35個ずつ入れたところ, 最後の箱は32個になったので, チョコレートの総数は.

$$\underbrace{35(x-1)}_{x-1\text{個の箱に}35\text{個入れた。}} + 32$$

よって,

$$30x + 22 = 35(x-1) + 32$$
$$30x + 22 = 35x - 35 + 32$$
$$-5x = -25$$
$$x = 5$$

よって, 箱の数は 5個

3.

(1) 2人がさいころを投げたとき, 出る目の場合の数は. $6 \times 6 = 36$ 通り

太郎が $\boxed{1}$ にいるとき

太郎が1, 花子が6を出せば良い

⇒ 1通り

太郎が $\boxed{2}$ にいるとき.

太郎が2, 花子が5を出せば良い

⇒ 1通り.

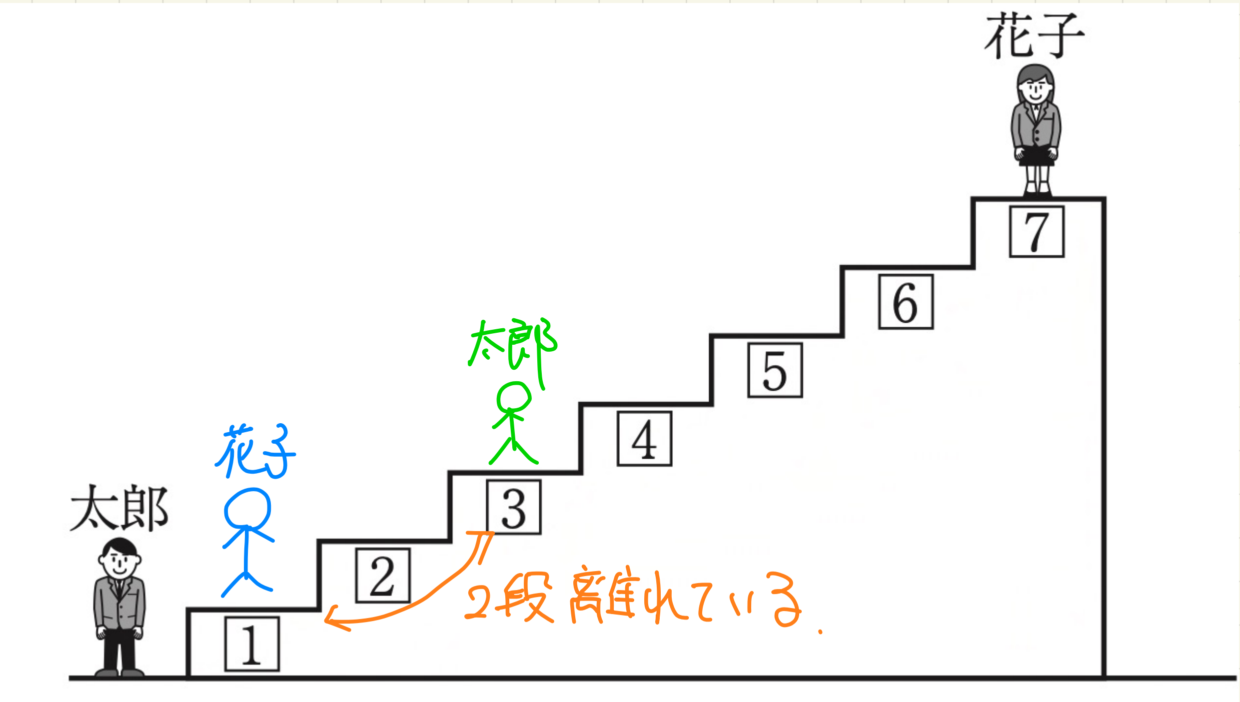
同様に，太郎が$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$にいるとき，それぞれ1通り。
よって，太郎と花子が同じ段にいる場合の数は，全部で6通り。したがって，求める確率は，

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

(2) (太郎のさいころの目，花子のさいころの目)と書くことにする。

太郎が$\boxed{1}$にいるとき ⇒ (1，4)
太郎が$\boxed{2}$にいるとき ⇒ (2，3)
太郎が$\boxed{3}$にいるとき ⇒ (3，2)，(3，6)

注 (3，6) ⇒ 太郎が3，花子が6の目を出したとき，



太郎が$\boxed{4}$にいるとき ⇒ (4，1)，(4，5)
太郎が$\boxed{5}$にいるとき ⇒ (5，4)
太郎が$\boxed{6}$にいるとき ⇒ (6，3)

よって、太郎と花子が2段離れている場合の数は、
8通り。したがって求める確率は、

$$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

(3) 3段以上離れている場合の数
＝全体－(同じ段＋1段離れ＋2段離れ)

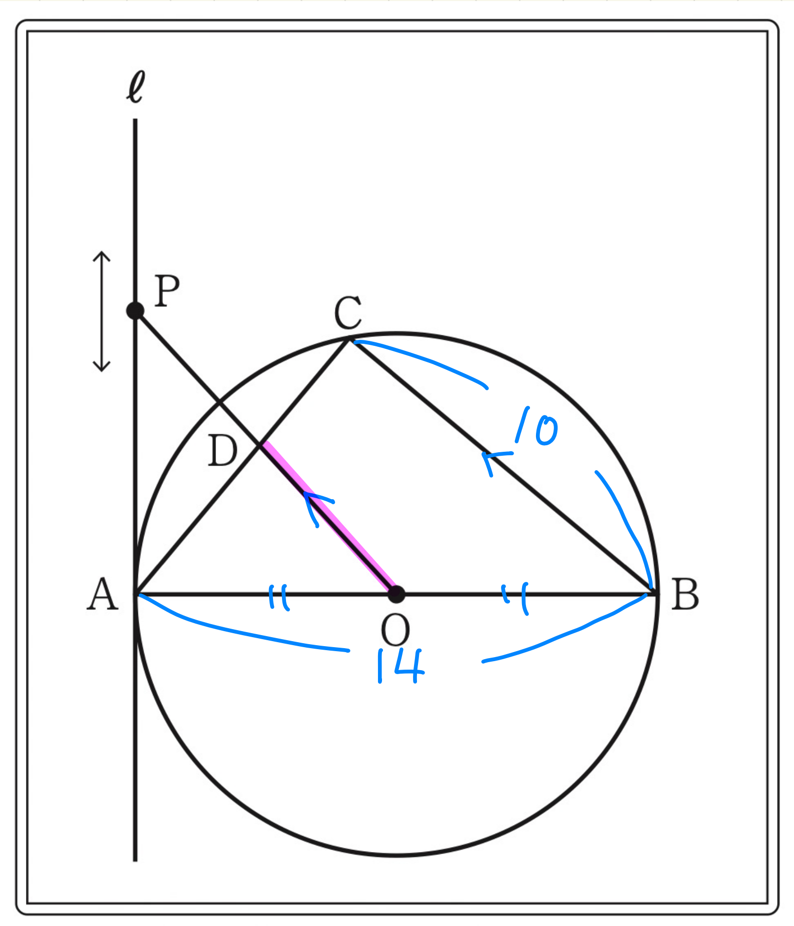
1段離れているとき、
太郎が①にいるとき ⇒ (1, 5)
太郎が②にいるとき ⇒ (2, 4), (2, 6)
太郎が③にいるとき ⇒ (3, 3), (3, 5)
太郎が④にいるとき ⇒ (4, 2), (4, 4)
太郎が⑤にいるとき ⇒ (5, 1), (5, 3)
太郎が⑥にいるとき ⇒ (6, 2)
よって10通り
(1), (2) より
3段以上離れている ＝ $\underbrace{36}_{\text{全体}}-(\underbrace{6}_{\text{同じ段}}+\underbrace{10}_{\text{1段差}}+\underbrace{8}_{\text{2段差}})$

＝12通り
よって、求める確率は、

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

4.

(1) ①



OA, OB は半径なので、

$OA = OB$

⇒ 点 O は AB の中点

また、OP // BC なので、

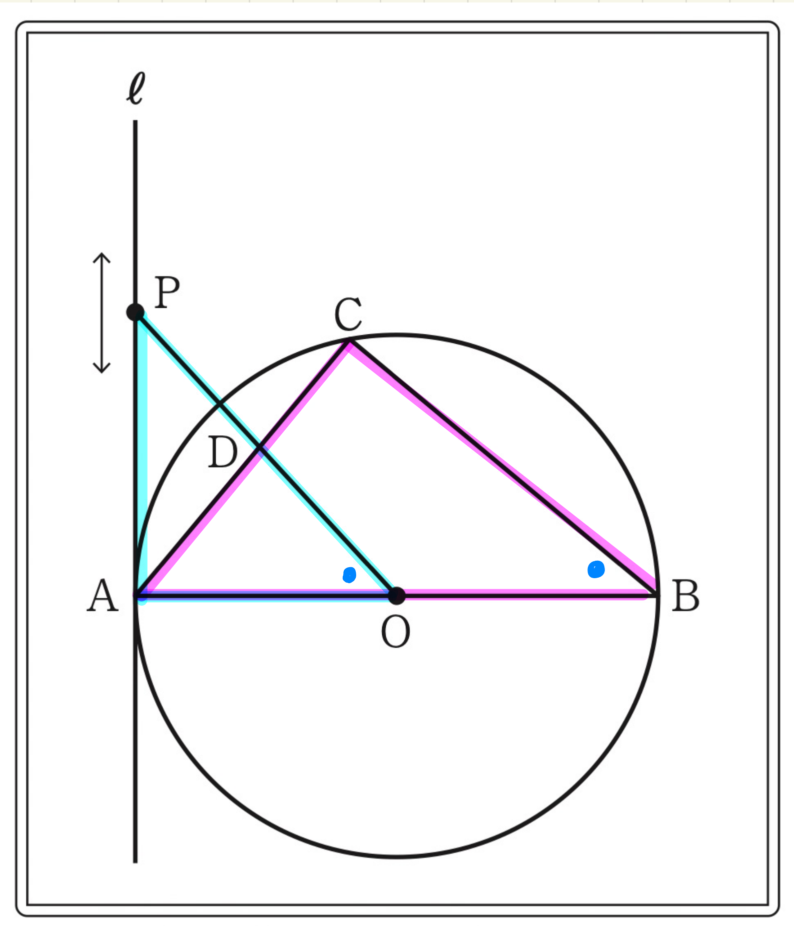
中点連結定理より

$OD = \frac{1}{2}BC$

$= \frac{1}{2} \times 10$

$= 5$ cm

②



△ABC と △POA において、

半円の弧に対する円周角だから

$\angle ACB = 90^\circ$ —— ①

直線 ℓ は、点 A における円 O の接続だから

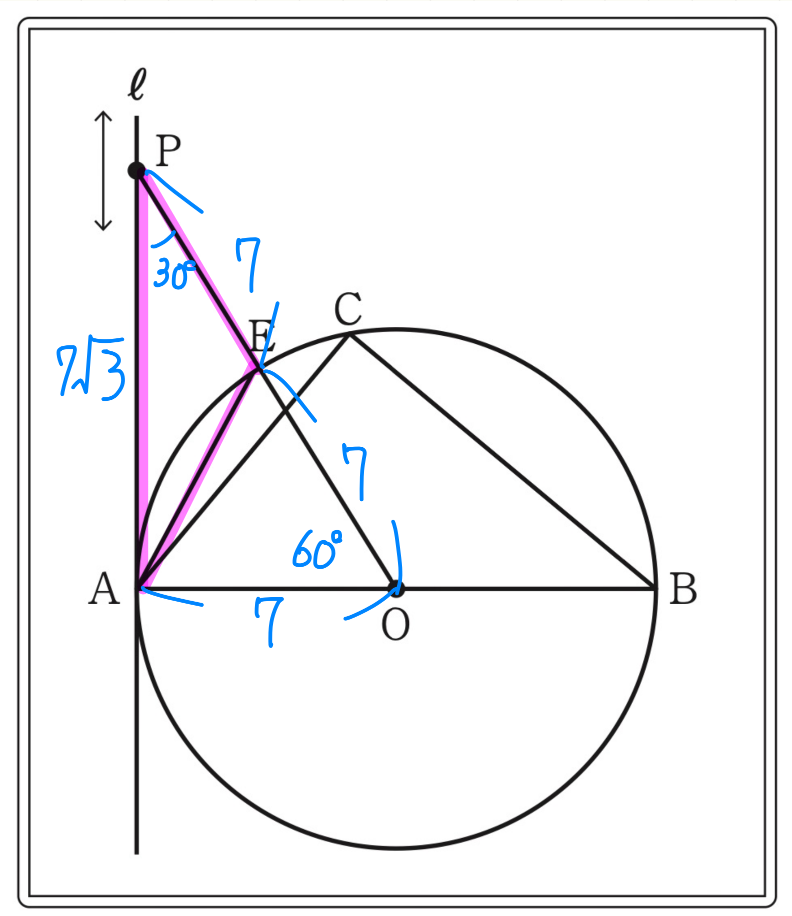
$\angle PAO = 90^\circ$ —— ②

①, ② より

$\angle ACB = \angle PAO$ —— ③

平行線の同位角は等しいから
$\angle ABC = \angle POA$ ―②
③,④より2組の角がそれぞれ等しいので.
$\triangle ABC \backsim \triangle POA$ (証明終わり)

(2)



$\angle PAO = 90°$
$\angle AOP = 60°$ より
$\triangle PAO$ で
$\angle OPA = 30°$
よって,$\triangle PAO$は. 30°-60°-90°の直角三角形なので,
$\underbrace{AO}_{7} : OP : PA = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$\therefore OP = 14$ cm
$PA = 7\sqrt{3}$ cm

OEは円の半径なので. OE = 7 cm よって.
$EP = OP - OE$
$= 14 - 7$
$= 7$ cm
$\triangle PAO$と$\triangle PAE$において,それぞれ底辺を.
OP, EPとすると,高さが等しいので.
2つの三角形の面積比は,底辺比と等しい.

$$\triangle PAO = \frac{1}{2} \times 7 \times 7\sqrt{3}$$
$$= \frac{49\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

なので、

$$\underbrace{\triangle PAO}_{\frac{49\sqrt{3}}{2}} : \triangle PAE = 14 : 7$$
$$= 2 : 1$$

$$\therefore 2\triangle PAE = \frac{49\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle PAE = \frac{49\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

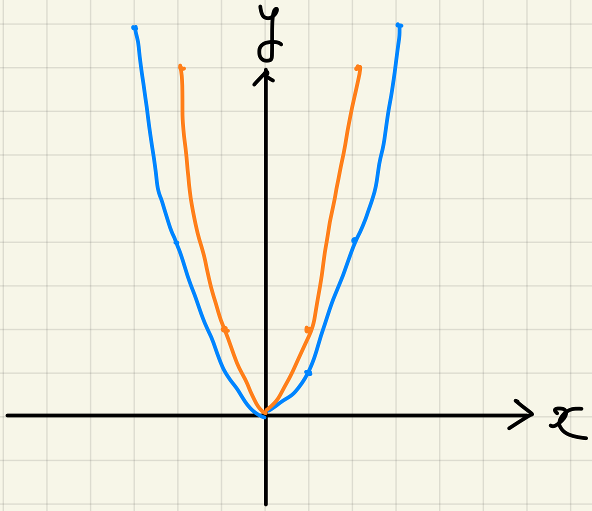
5.

(1) $m : y = ax^2$ が点 B(6, 6) を通るので、

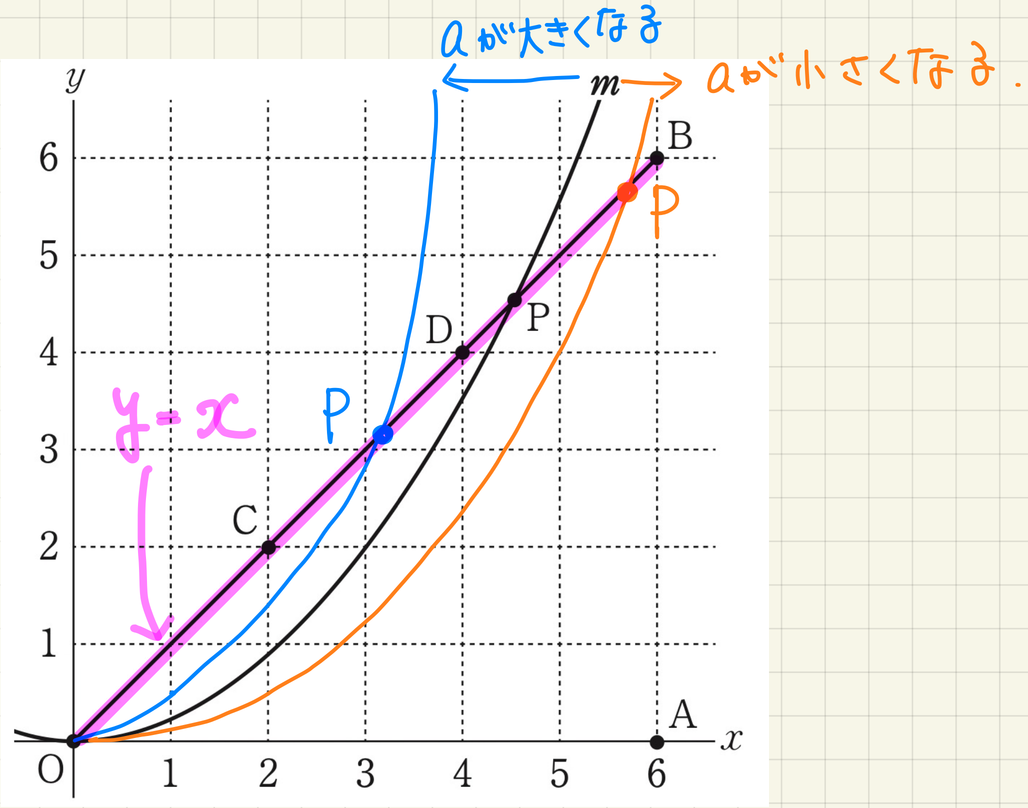
$$6 = a \times 6^2 \Rightarrow 36a = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

(2)

$y = x^2$ と $y = 2x^2$ を比較すると、



左のグラフより a の値が大きいほど、グラフの開き具合は狭くなる。



よって, aが大きくなると, 点Pは点Cの方に動き, aが小さくなると, 点Pは点Bの方に動く

また, $a=\frac{1}{3}$ すなわち $y=\frac{1}{3}x^2$ と直線OB: $y=x$

の交点は

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ y=x \end{cases} \iff \frac{1}{3}x^2=x \iff x^2=3x$$

よって,

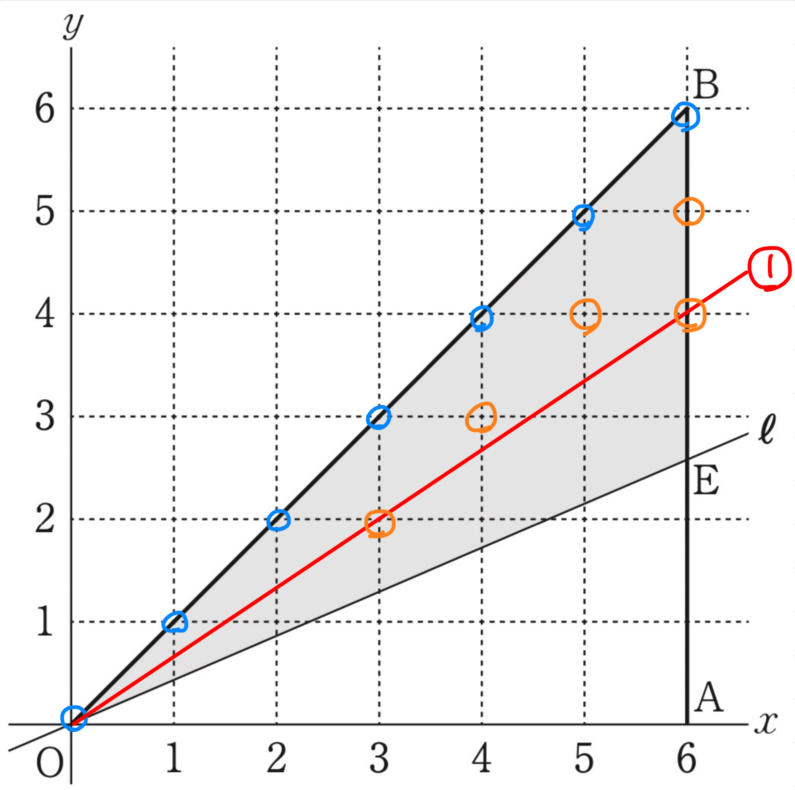
$$x(x-3)=0 \qquad \therefore x=0,3$$

点Pは点Oと異なる点なので, 点Pのx座標は3である。$y=x$ より $y=3$。 $\therefore P(3,3)$

よって, 点Pは, 線分CD上にある.

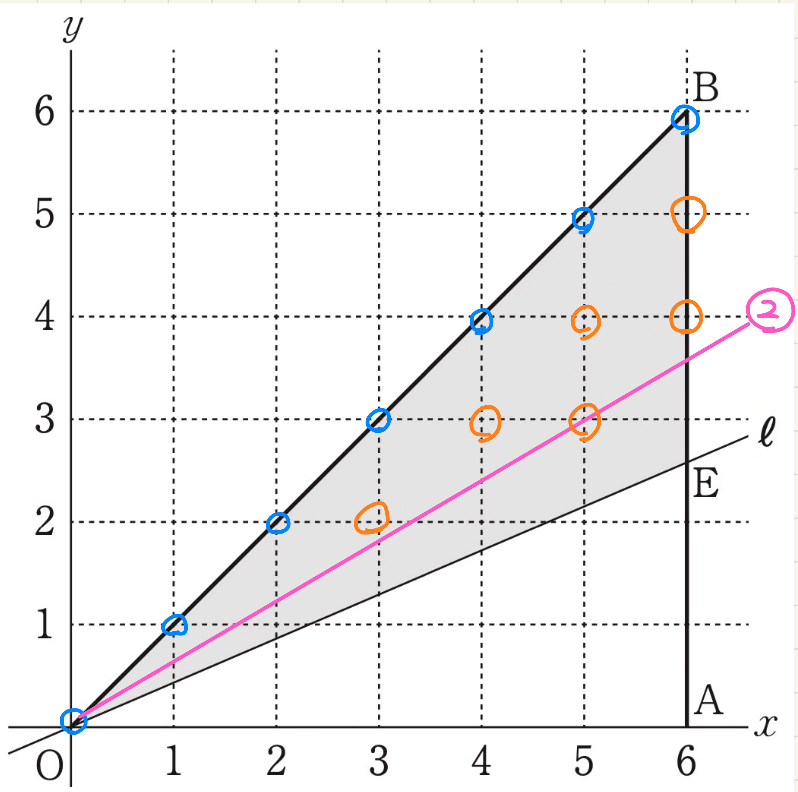
以上より答えは, オ

(2)



直線OBは変化しないので、○の点は固定である。(7個)
残り5個の点が条件を満たすような直線を考える。

①のとき、○がちょうど5個になるので、条件を満たす。
このときの傾きは $\frac{2}{3}$ である。



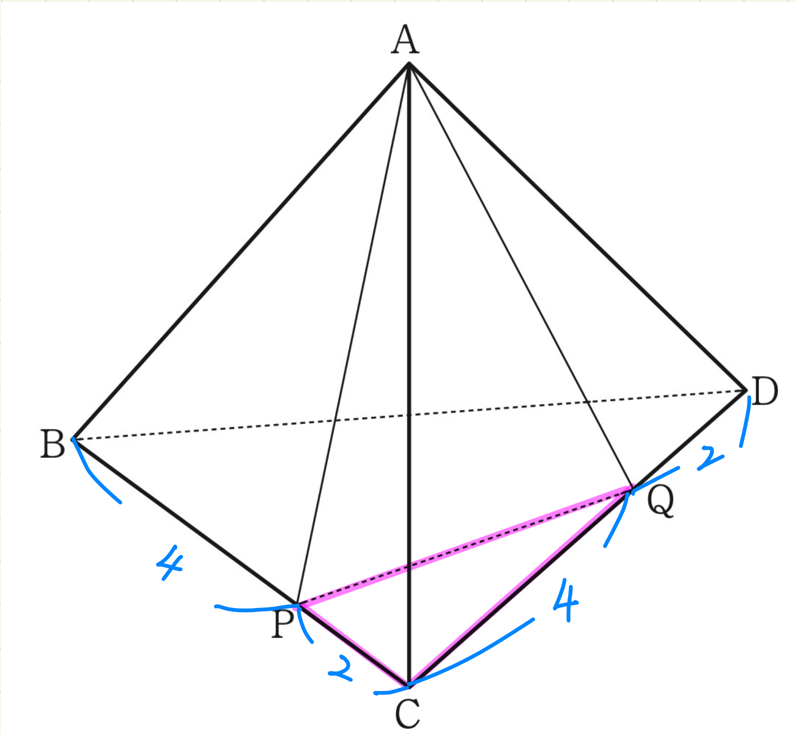
次に、②のとき、○が6個となるため、条件を満たさない。このときの傾きは $\frac{3}{5}$ である。

したがって、傾きが $\frac{3}{5}$ より大きく $\frac{2}{3}$ 以下であれば、○はちょうど5個になる

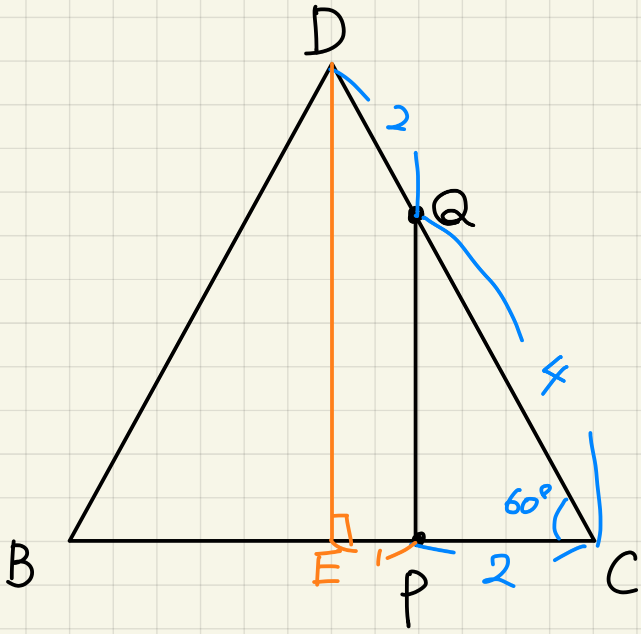
よって、求める範囲は $\frac{3}{5} < b \leqq \frac{2}{3}$

6.

(1)



→



$BC = CD = 6$ cm、$BP : PC = CQ : QD = 2 : 1$ より
$BP = CQ = 4$ cm、$PC = QD = 2$ cm である。

また、点Dから辺BCに垂線をひいた足をEとする。

△CPQ と △CED において、
共通な角は等しいので
$$\angle QCP = \angle DCE \text{ —— ①}$$
辺の比より
$$CQ : CD = 4 : 6$$
$$= 2 : 3 \text{ —— ②}$$

$$CP : CE = 2 : 3 \text{ —— ③}$$

①、②、③ より 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle CPQ \backsim \triangle CED$

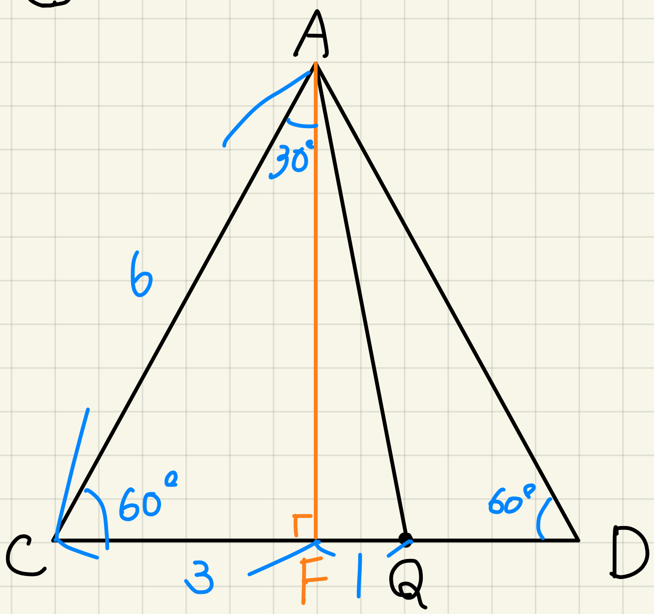
よって

$\angle QPC = \angle EDC = 90°$

したがって $\triangle CPQ$ は直角三角形である。 ㋒

(2)

①



点Aから辺CDに垂線を下ろした足をFとする。

$\triangle ACF$ は $30° - 60° - 90°$ の直角三角形なので、

$CF : AC : AF = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$\therefore AF = 3\sqrt{3}$ cm

$\triangle AFQ$ で三平方の定理より

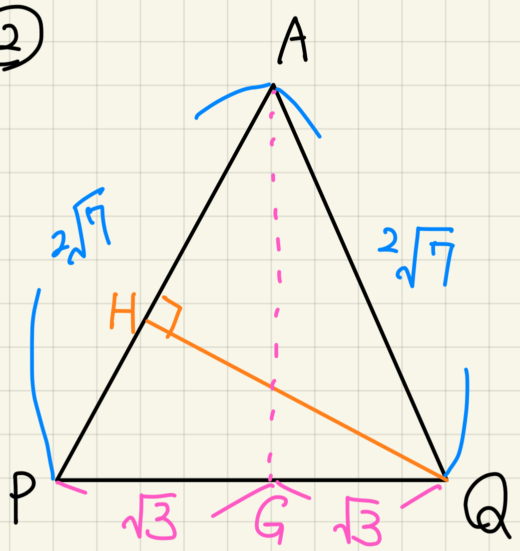
$AQ = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2}$

$= \sqrt{27+1}$

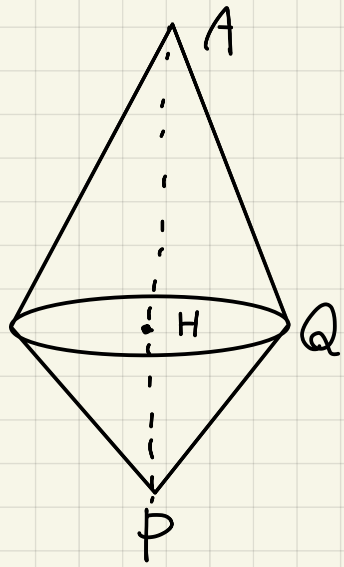
$= \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$= 2\sqrt{7}$ cm

②



⇒



APを軸として、△APQを1回転させると、上図のように円すいが2つ合わさった立体となる。

点Qから辺APに垂線を下ろした点をHとする。
また、点Aから辺PQに垂線を下ろした点をGとする

△APQは、$AP = AQ = 2\sqrt{7}$ cm より二等辺三角形なので、点Gは辺PQの中点である。

(1)より△CPQは30°-60°-90°の直角三角形なので、

$PQ = 2\sqrt{3}$ cm ⇒ $PG = \sqrt{3}$ cm

△APGで三平方の定理より

$$AG = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{28-3} = \sqrt{25}$$
$$= 5$$

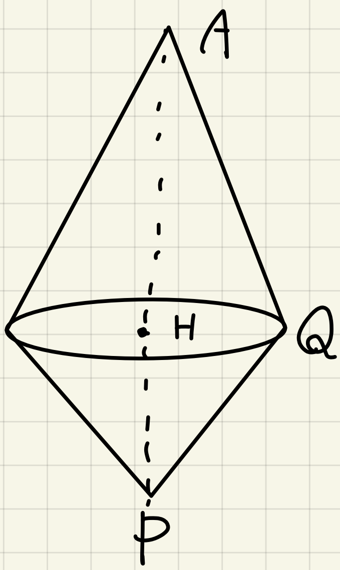
よって、△APQの面積を2通りで表すと、

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 5 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times QH$$

$$\therefore\ 2\sqrt{7}\,QH = 10\sqrt{3}$$

$$QH = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{5\sqrt{21}}{7}$$



よって、求める体積は

$$QH^2 \times \pi \times AH \times \frac{1}{3} + QH^2 \times \pi \times PH \times \frac{1}{3}$$

$$= QH^2 \times \pi \times \frac{1}{3} \times (AH + PH)$$

$$= QH^2 \times \pi \times \frac{1}{3} \times AP$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{21}}{7}\right)^2 \times \pi \times \frac{1}{3} \times 2\sqrt{7}$$

$$= \frac{25 \times \cancelto{7}{21}}{\cancelto{7}{49}} \times \pi \times \frac{1}{\cancelto{1}{3}} \times 2\sqrt{7}$$

$$= \frac{50\sqrt{7}}{7}\pi \quad cm^3$$