2023年度　栃木県

数学

kmkm

$\boxed{1}$

1. 与式 $= 3+5$
$= 8$

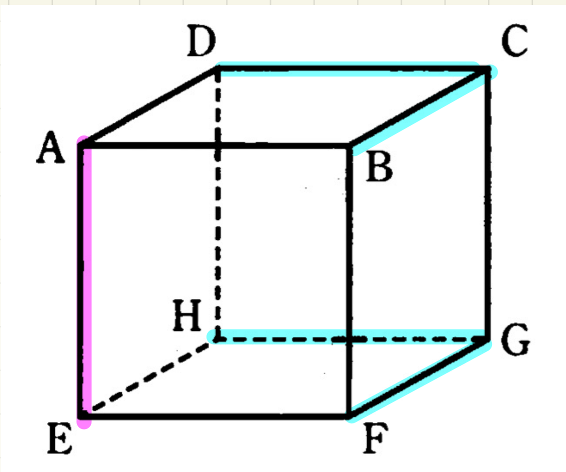
2. 与式 $= \dfrac{8a^3b^2}{6ab}$
$= \dfrac{4}{3}a^2b$

3. 与式 $= x^2+6x+9$

4. 1個 x 円のパン7個 → $7x$ 円
1本 y 円のジュース5本 → $5y$ 円
代金の合計が2000円以下なので、
$7x+5y \leqq 2000$

㊟ 代金の合計が2000円未満であれば、
$7x+5y<2000$

5.



辺ABとねじれの位置にある辺は、
辺BC、辺CD
辺FG、辺GH
の4つである。

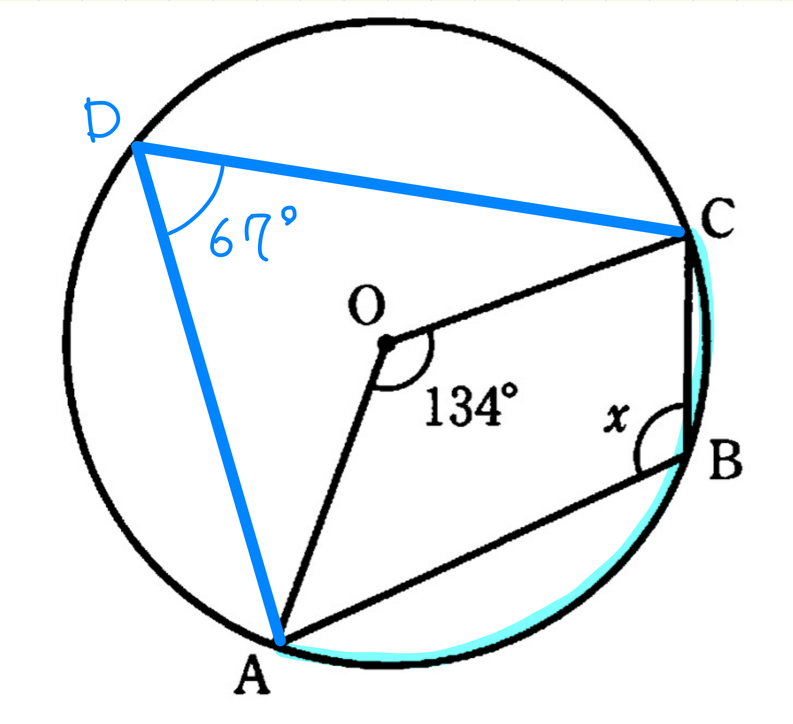
6. y は x に反比例するので、$y = \frac{a}{x}$ とおく。

$x = -2$ のとき、$y = 8$ なので、

$$8 = \frac{a}{-2} \Rightarrow a = -16$$

よって、$y = -\frac{16}{x}$

7.



左図のように補助線を引く。

$\overset{\frown}{AB}$ に対して、

$\angle ADC$: 円周角

$\angle AOC$: 中心角

より

$$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = 67°$$

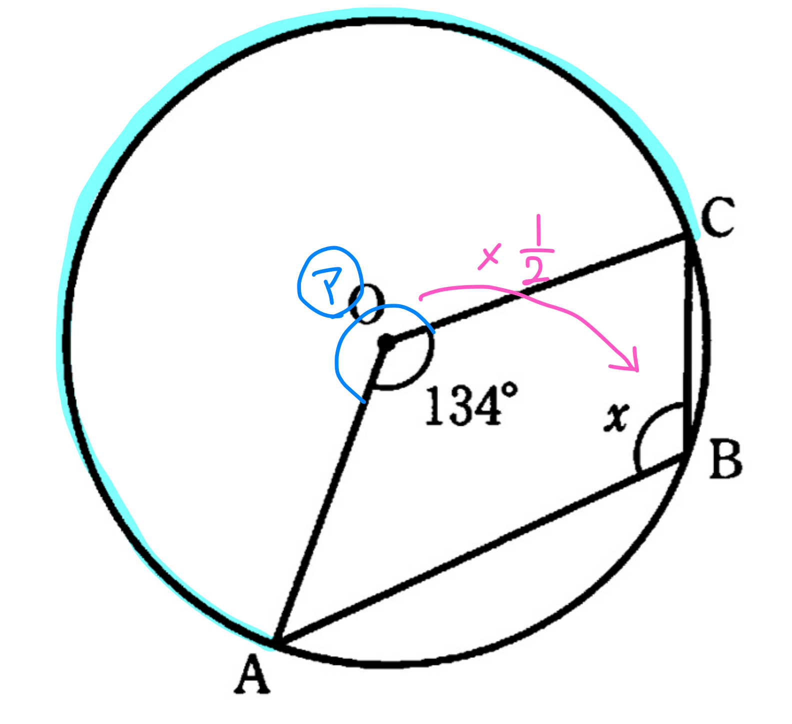
□ABCD は円に内接しているので、

$$\angle ADC + \angle ABC = 180°$$

よって、

$$\angle x = 180° - 67° = 113°$$

(別解)



左図の∠㋐は、

$\angle ㋐ = 360° - 134°$

$= 226°$

$\overset{\frown}{AC}$ に対して、

$\angle x = \frac{1}{2} \times 226°$

$= 113°$

8. 相似な三角形において、面積比は、相似比に等しい。よって

$\triangle ABC : \triangle DEF = 3^2 : 5^2$

$= 9 : 25$

$\therefore 9 \triangle DEF = 25 \triangle ABC$

$\Rightarrow \triangle DEF = \frac{25}{9} \triangle ABC$

よって、$\triangle DEF$ は $\triangle ABC$ の $\frac{25}{9}$ 倍

$\boxed{2}$

1. x^2+4x+1 は因数分解できないので、解の公式より

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{3}$$

2. 使用できる教室の数をxとする。

参加者を15人ずつにすると、34人が入れないので、$15x + 34$

34人余る

また、参加者を20人ずつにすると、14人の教室が1つでき、使用できない教室が1つできるので、

$20(x-2) + 14 + 0$

x個の教室のうち、1つは14人、1つは0人なので、$x-2$個の教室に20人いる。

$= 20(x-2) + 14$

よって、

$$15x + 34 = 20(x-2) + 14$$

$$15x + 34 = 20x - 40 + 14$$

$$-5x = -60$$

$$x = 12$$

よって、使用できる教室の数は12

3.

M：一の位が0でない900未満の3けたの自然数。百の位がa，十の位がb，一の位がcなので，

$$M = \underbrace{100}_{①}a + \underbrace{10}_{②}b + c$$

また，N = M + 99より

$$N = (100a + 10b + c) + 99$$

99 = 100 − 1 より

$$= (100a + 10b + c) + (100 - 1)$$

$$= 100a + 10b + c + 100 - 1$$

となるから，

$$N = 100a + 100 + 10b + c - 1$$

$$= 100\underbrace{(a+1)}_{③} + 10\underbrace{b}_{④} + \underbrace{c-1}_{⑤}$$

となり，Nの百の位はa+1，十の位はb，一の位はc−1となる。よって，Nの各位の和は

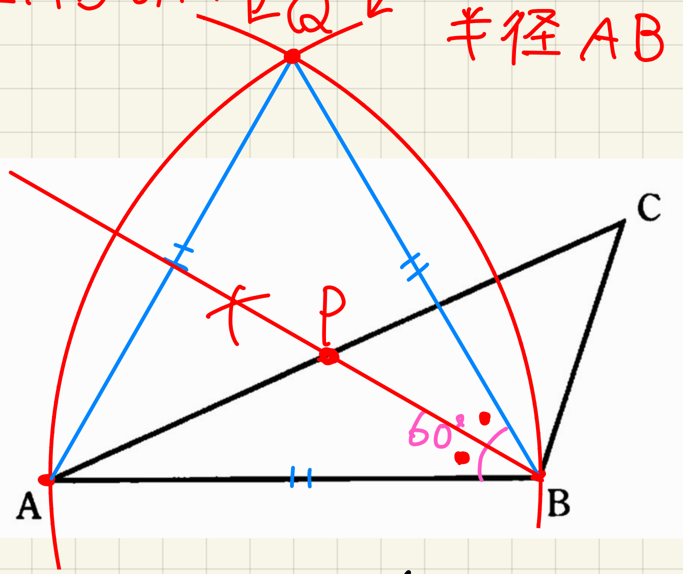
$$a+1 + b + c - 1 = a + b + c$$

となるので，Mの各位の数の和と，Nの各位の数の和は，それぞれa+b+cとなり，同じ値になる。

3

1. 点Bを中心として半径ABの円

点Aを中心として、半径ABの円



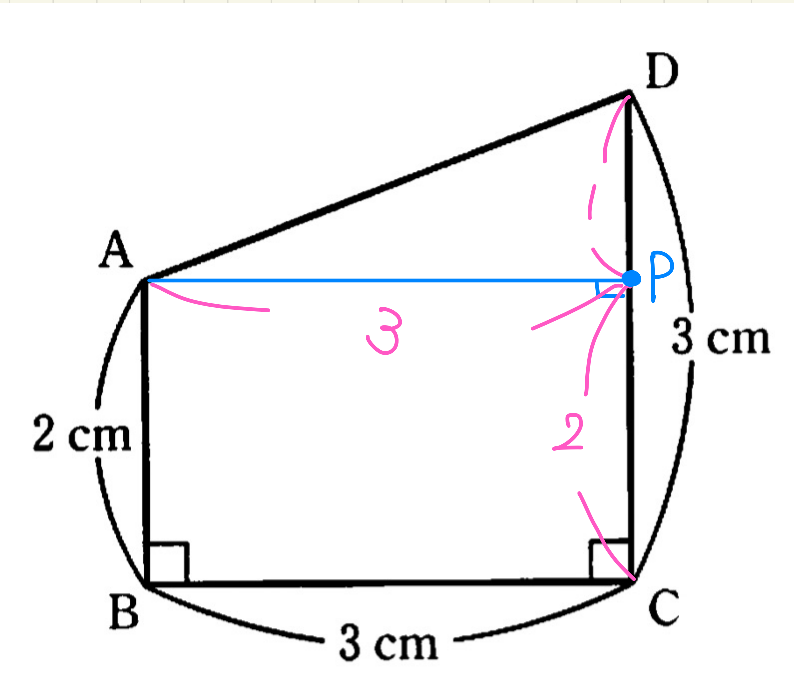
⇒ △ABQは正三角形

⇒ ∠ABQ = 60°

よって、∠ABQ の二等分線を作図し、辺ACとの交点が、点Pである。

2.

(1)

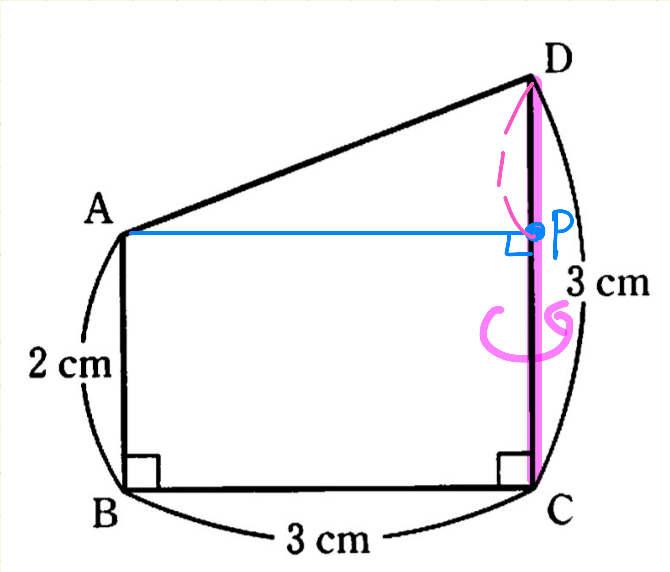


△APDで三平方の定理より

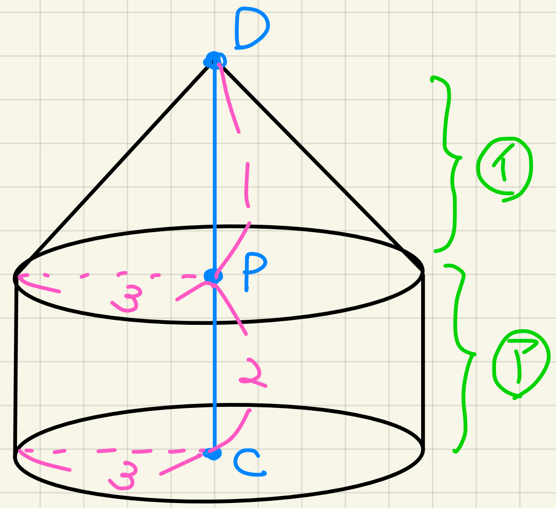
$$AD = \sqrt{3^2+1^2}$$

$$= \sqrt{10}\ \text{cm}$$

(2)



⇒



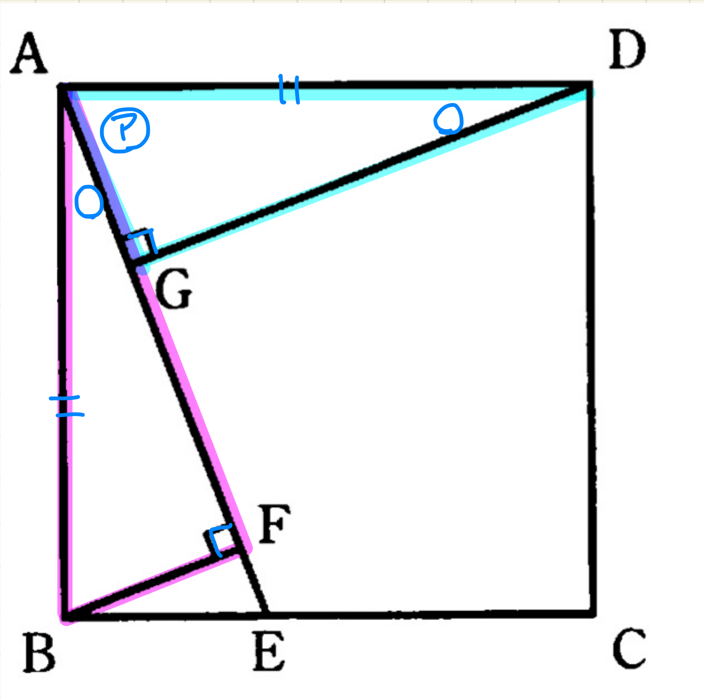
辺CDを軸として1回転させた立体は、上図のようになる。よって求める体積は

$$\underbrace{3 \times 3 \times \pi \times 2}_{ア} + \underbrace{3 \times 3 \times \pi \times 1 \times \frac{1}{3}}_{イ}$$

$= 18\pi + 3\pi$

$= 21\pi\ cm^3$

3.



△ABFと△DAGにおいて、

仮定より

∠BFA = ∠AGD = 90° ―①

□ABCDは正方形なので、

AB = DA ―②

∠BAD = 90° ―③

③より

$$\angle BAF = 90^\circ - \angle DAG \quad \text{—— ④}$$

$$\bigcirc = 90^\circ - ㋐$$

△DAGにおいて、

$$\angle ADG = 180^\circ - (90^\circ + \angle DAG)$$

$$\bigcirc \quad = 90^\circ - \angle DAG \quad \text{—— ⑤}$$

㋐

④、⑤より

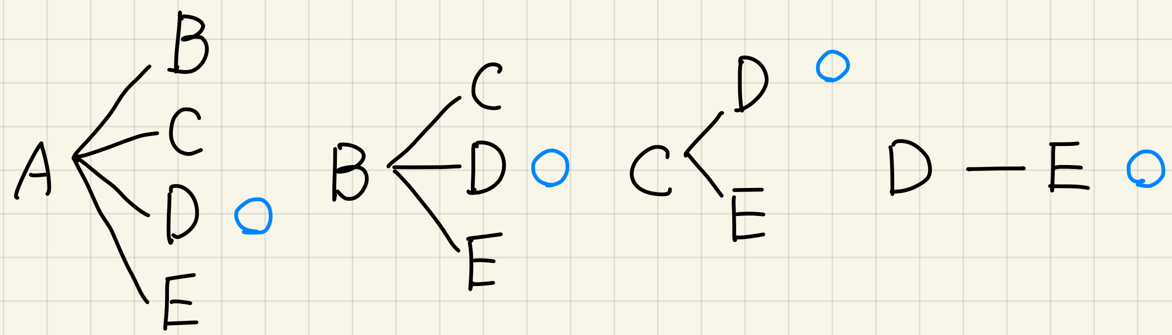
$$\angle BAF = \angle ADG \quad \text{—— ⑥}$$

①、②、⑥より直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので、

△ABF ≡ △DAG（証明終わり）

$\boxed{4}$

1. 樹形図で考える。



5人の中から2人を選ぶ方法は、10通り。
そのうち、Dが含まれるのは、4通り。
よって、求める確率は

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2.

(1)

階級(秒)			度数(人)	累積度数	
以上		未満			
14.0	～	16.0	2	2	
16.0	～	18.0	7	9	… 2+7
18.0	～	20.0	8	17	… 2+7+8
20.0	～	22.0	13	30	… 2+7+8+13
22.0	～	24.0	5	35	… 2+7+8+13+5
計			35		

よって，累積度数は 17人

(2) 最頻値：最も度数が大きい階級の階級値

階級の平均値

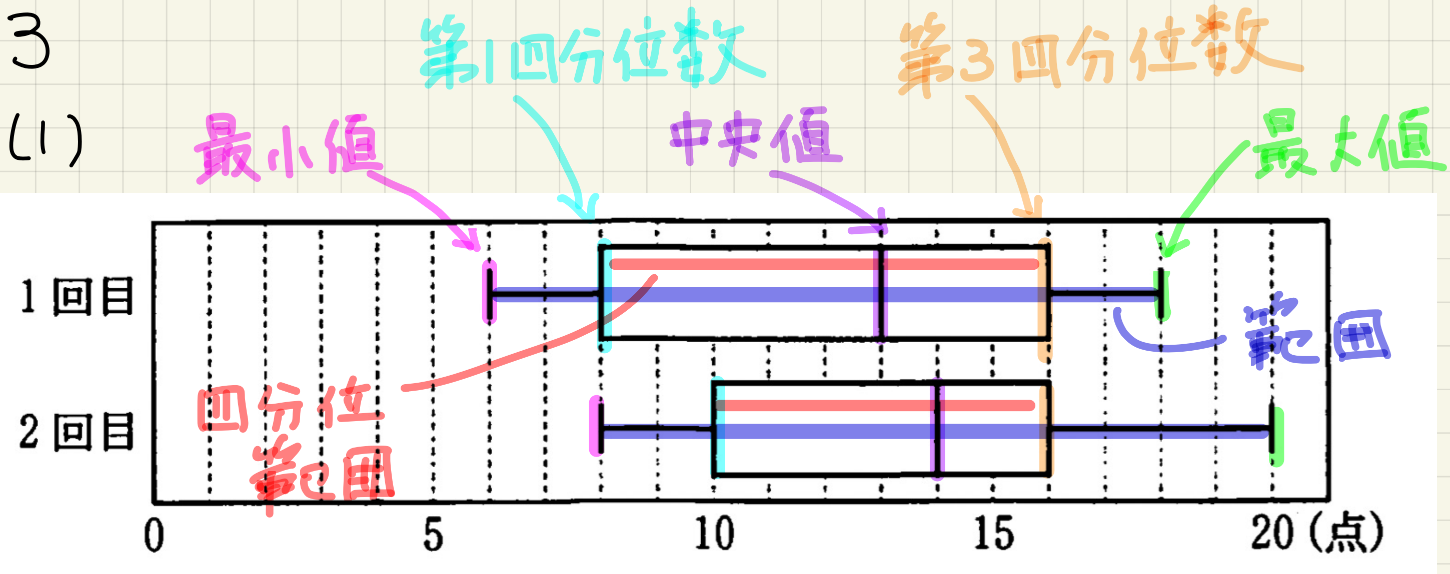
最も度数が大きいのは 13人で，そのときの階級は 20.0～22.0秒なので，階級値は

$$\frac{20.0+22.0}{2} = \frac{42.0}{2}$$

$$= 21.0\text{秒}$$

3

(1)



ア：中央値は，1回目より2回目の方が大きいので，正しい。

イ：最大値は，1回目より2回目の方が大きいので，誤り

ウ：1回目の範囲：18 − 5 = 13回
　　2回目の範囲：20 − 8 = 12回

よって，1回目の範囲の方が大きいので，誤り

エ：四分位範囲は，1回目より2回目の方が小さいので正しい。

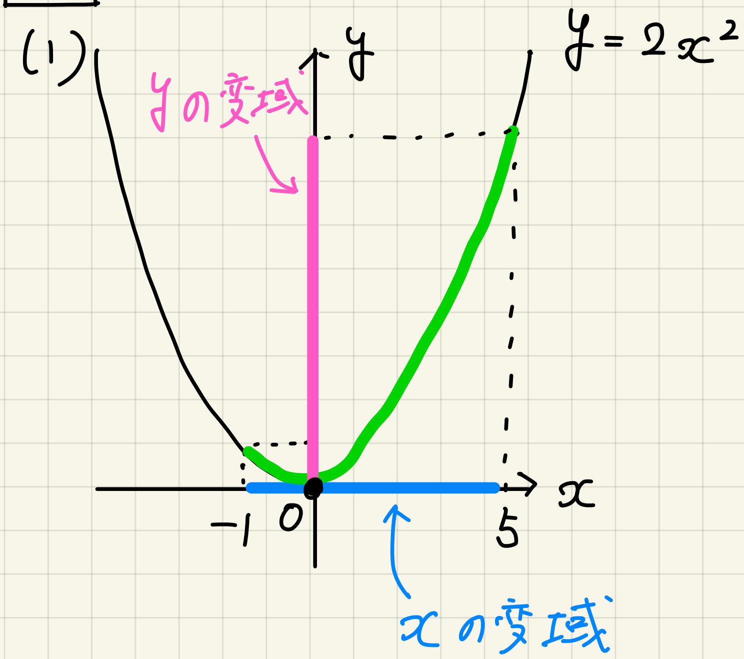
よって，答えは，ア，エ

(2) 100人の第1四分位数
⇒データを小さい順に並べたときの25番目と26番目の生徒の平均値

よって，25番目の生徒が7点，26番目の生徒が9点のとき，第1四分位数は8点となる。

$\boxed{5}$ 1.

(1)



$x=5$ のとき，

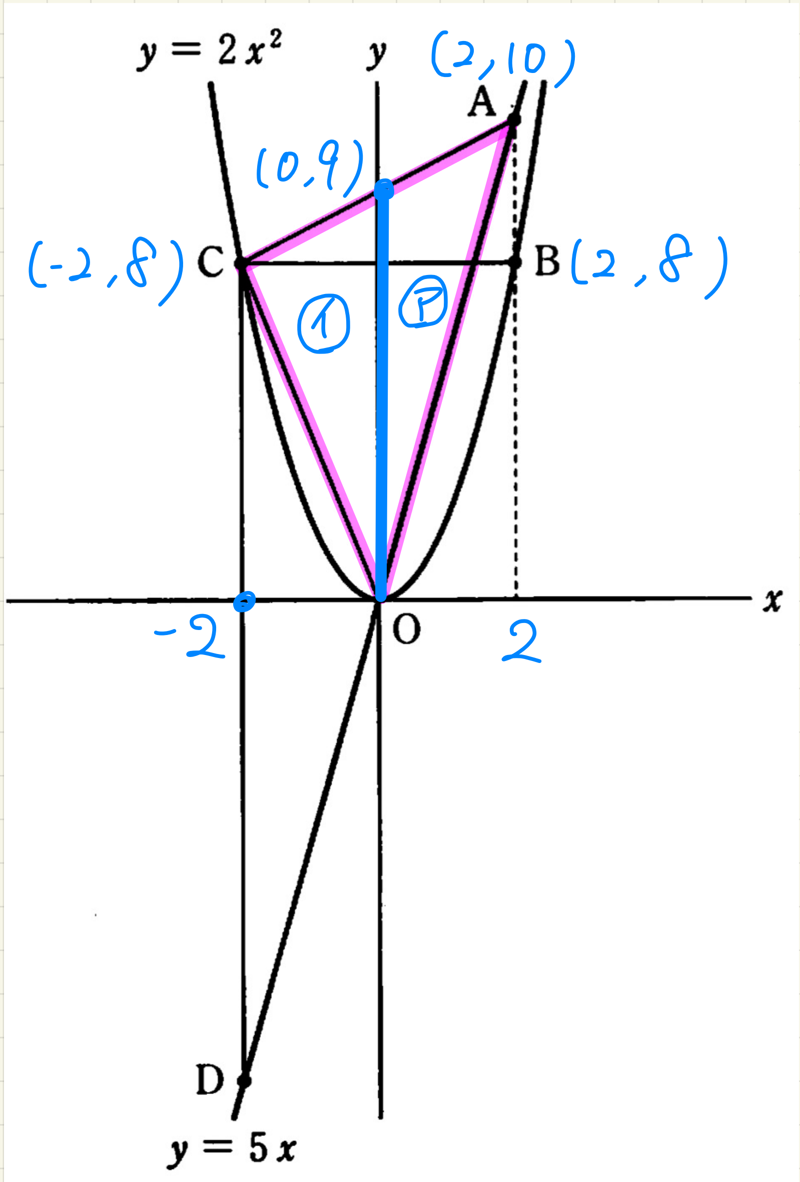
$y=2\times5^2$

$=50$

よって，yの変域は

$0 \leqq y \leqq 50$

(2)



△OACを左図のように

㋐，①に分ける。

点A：$x=2$ で，$y=5x$

のグラフ上にあるので，

$y=10$

$\therefore A(2,10)$

点B：$x=t$ で $y=2x^2$ の

グラフ上にあるので：

$y=2\times2^2=8$

$\therefore B(2,8)$

点C：$y=2x^2$ は，y軸

対称なので，

$x=-2$，$y=8$

$\therefore C(-2,8)$

直線ACの式を$y=ax+b$とすると．
1次関数では，傾き＝変化の割合なので．

$$a=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$
$$=\frac{10-8}{2-(-2)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

よって，$y=\frac{1}{2}x+b$で，点A$(2,10)$を通るので

$$10=\frac{1}{2}\times 2+b \Rightarrow b=9$$

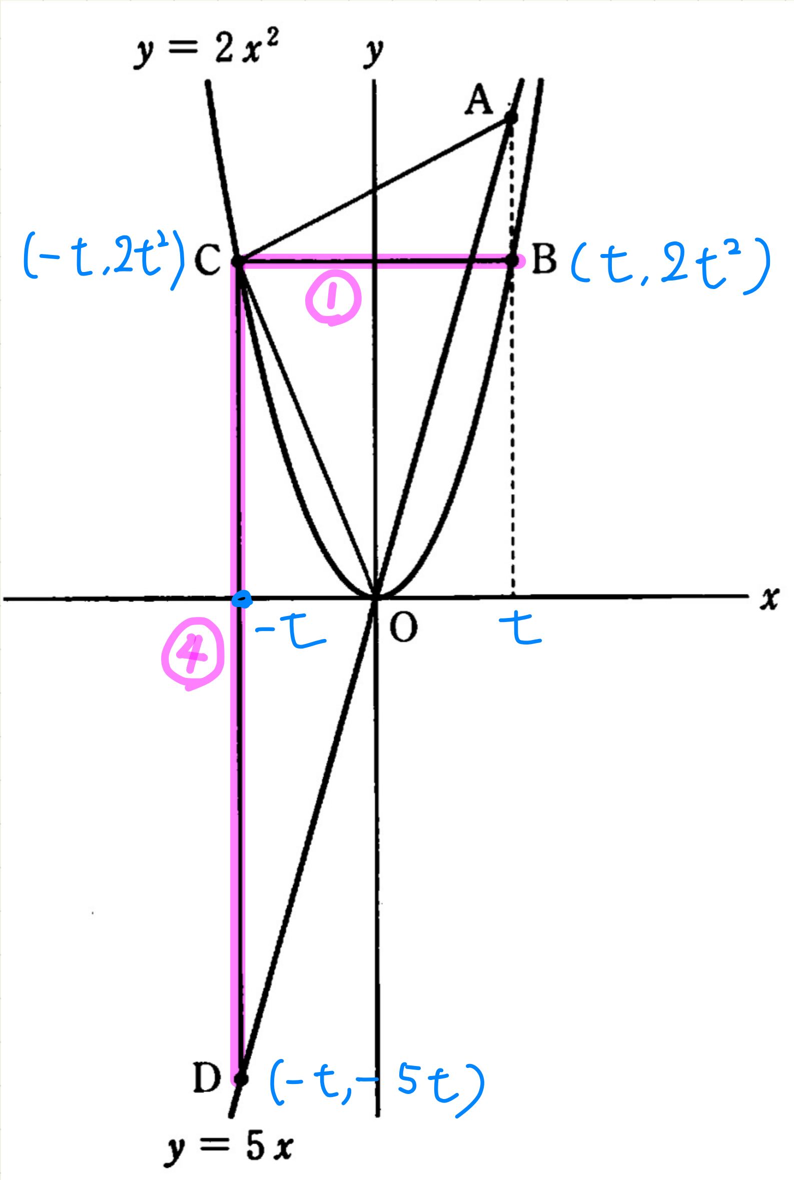
よって

$$ア=\frac{1}{2}\times 9\times 2=9$$
$$イ=\frac{1}{2}\times 9\times 2=9$$

※ アとイは，底辺が共通で，高さも等しいので，面積も等しい

$$\therefore \triangle OAB=ア+イ$$
$$=9+9$$
$$=18$$

(3)



点B

$y=2x^2$のグラフ上にあり、$x=t$なので、

$y=2t^2$　$\therefore B(t,2t^2)$

点C

$y=2x^2$のグラフ上にあり、$x=-t$なので、

$y=2\times(-t)^2$
$=2t^2$　$\therefore C(-t,2t^2)$

点D

$y=5x$のグラフ上にあり、$x=-t$なので、

$y=-5t$　$\therefore D(-t,-5t)$

よって、

$BC=t-(-t)=2t$

$CD=2t^2-(-5t)=2t^2+5t$

$BC:CD=1:4$より

$2t:2t^2+5t=1:4$

$\therefore 2t^2+5t=8t$

$2t^2-3t=0$

$t(2t-3)=0 \Rightarrow t=0,\frac{3}{2}$

$t>0$より $t=\frac{3}{2}$

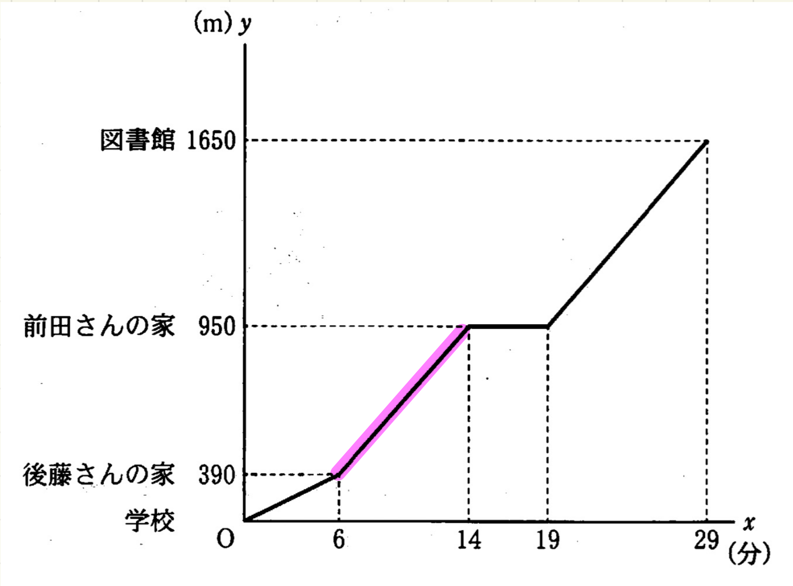
2.

(1) 6分で390m進んだので、速さは

$$390 \div 6 = 65$$

よって、毎分65m

(2)



求める直線の式を
$y = ax + b$ とおく。
1次関数では、
傾き = 変化の割合
なので、

$$a = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{950 - 390}{14 - 6} = 70$$

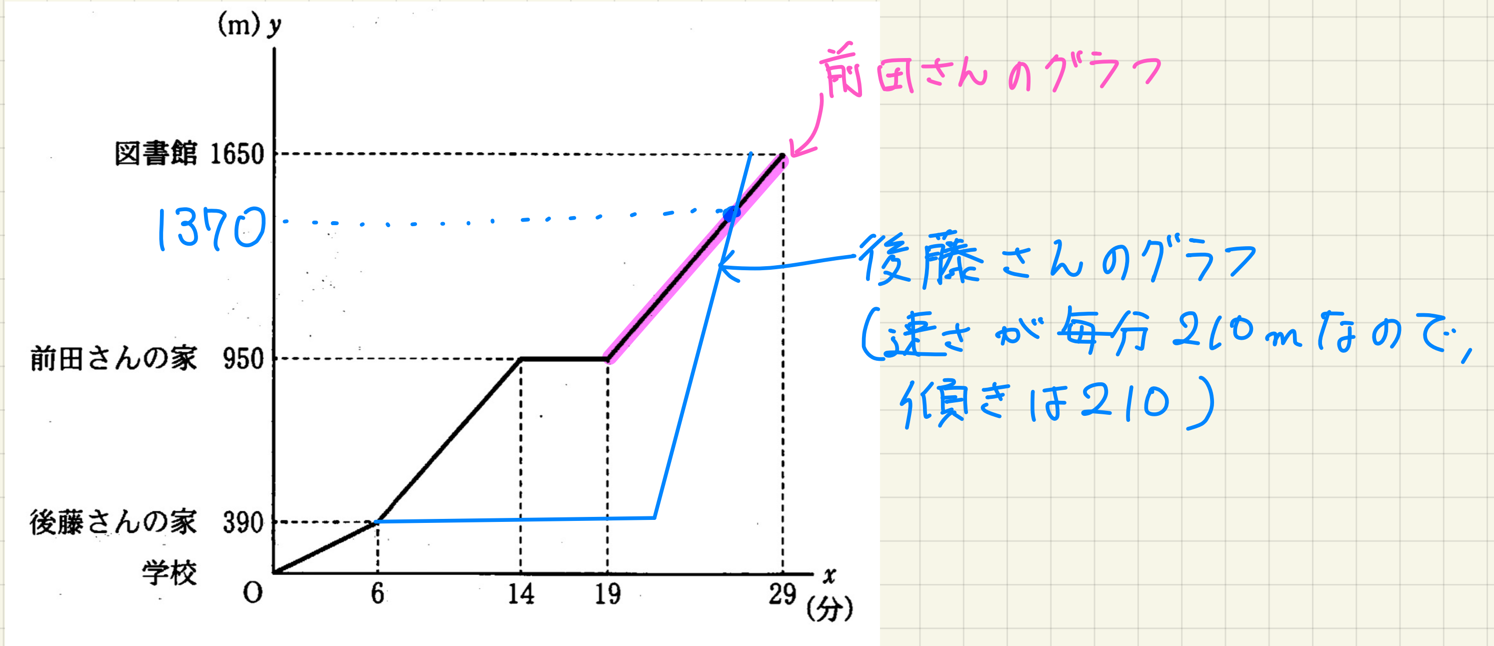
傾きは速さを表している。問題文より毎分70mで進んだので、傾き = 70 としても良い

よって、$y = 70x + b$ で、これが $(6, 390)$ を通るので

$$390 = 70 \times 6 + b \Rightarrow b = -30$$

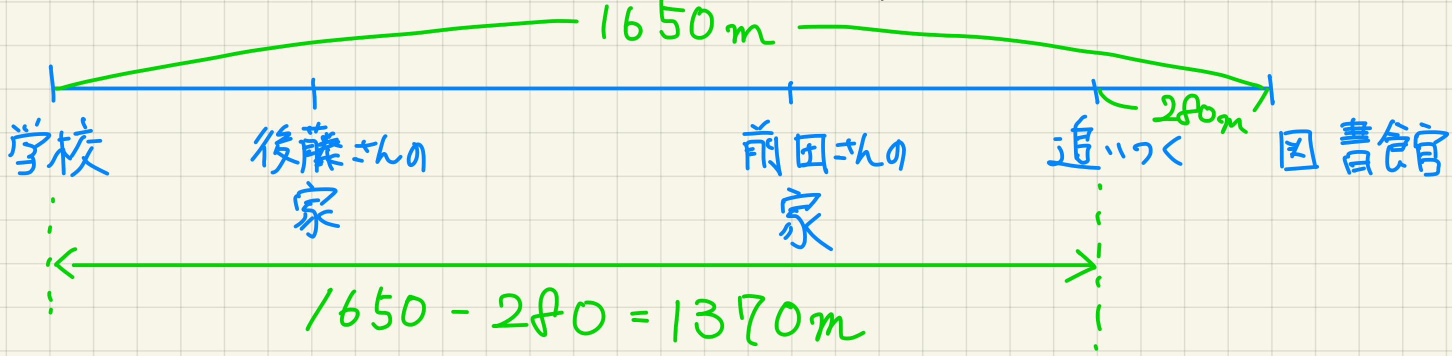
よって、求める式は $y = 70x - 30$

(3)



図書館まで残り280mの地点で追いついたので、
学校から追いついた地点の距離は、

$1650 - 280 = 1370$ m



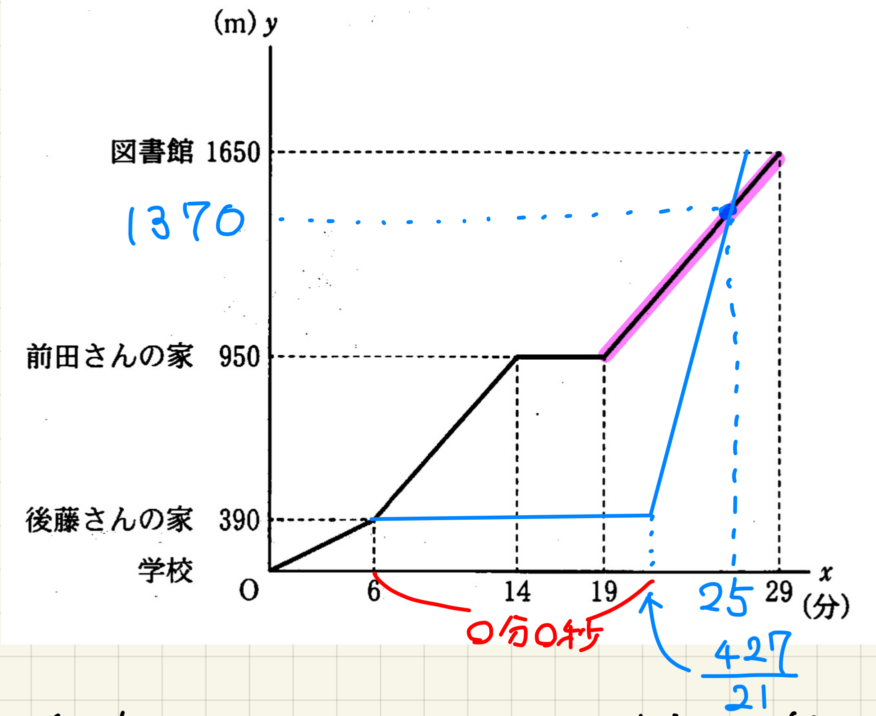
前田さんのグラフの式を $y = ax + b$ とすると、
傾きが速さを表しているので、$a = 70$.
$\therefore$ $y = 70x + b$ で、これが $(19, 950)$ を通るので、

$$950 = 70 \times 19 + b \quad \Rightarrow \quad b = -380$$

よって、前田さんのグラフの式は、$y = 70x - 380$.
学校から追いついた地点まで 1370m なので、

$$1370 = 70x - 380$$

$$70x = 1750 \Rightarrow x = 25$$



後藤さんのグラフの式を $y = ax + b$ とすると、
傾きが速さを表しているので、$a = 210$.
よって、$y = 210x + b$ で、これが $(25, 1370)$ を通るので、

$$1370 = 210 \times 25 + b \Rightarrow b = -3880$$

よって、後藤さんのグラフの式は $y = 210x - 3880$.
後藤さんの家は学校から 390m なので、

$$390 = 210x - 3880$$
$$210x = 4270 \Rightarrow x = \frac{427}{21}$$

よって、後藤さんが家を出たのは家に着いてから

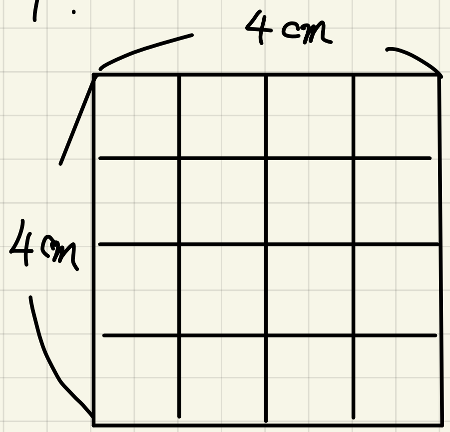
$$\frac{427}{21} - 6 = \frac{427}{21} - \frac{126}{21}$$
$$= \frac{301}{21} = 14\frac{7}{21} = 14\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$分 = 20秒より、14分20秒後

$$\times\frac{1}{3}\left(\begin{array}{l} 1分 = 60秒 \\ \frac{1}{3}分 = ?秒 \end{array}\right)\times\frac{1}{3} \Rightarrow ? = 60\times\frac{1}{3} = 20$$

$\boxed{6}$

1.



4cm × 4cmの正方形の中に、
1cm × 1cmの正方形は16個ある。
1cm × 1cmの正方形1個につき、
白いタイルを4枚使うので、

4cm × 4cmの正方形に使う白いタイルは
$16\times 4 = 64$枚

2. $n = 5$のとき、1cm × 1cmの正方形は25個
できる。黒いタイルをx枚、白いタイルを
y枚使ったとすると

$$\begin{cases} x + y = 49 & \text{——①} \\ x + \frac{1}{4}y = 25 & \text{——②} \end{cases}$$

※
① 黒いタイルx枚、白いタイルy枚で、合計49枚
なので、$x + y = 49$

② 1cm × 1cm の正方形では，黒いタイルは1枚，
白いタイルは4枚使う．
黒いタイルを x 枚使ったので，黒いタイルを
貼った 1cm × 1cm の正方形は x 個
白いタイルを y 枚使ったので，白いタイルを
貼った 1cm × 1cm の正方形は．

$$\frac{y}{4} \text{個}$$

となる。

① − ② × 4 より

$$\begin{array}{rrl} & x + y & = 49 \\ -) & 4x + y & = 100 \\ \hline & -3x & = -51 \\ & x & = 17 \end{array}$$

$x = 17$ を ① に代入して，

$$17 + y = 49 \quad \Rightarrow \quad y = 32$$

よって，黒いタイル17枚，白いタイル32枚

3.

$n=a$ のとき，1cm × 1cm の正方形は a^2 個できる。

黒いタイルを b 枚使ったので，白いタイルを貼った 1cm × 1cm の正方形の個数は

a^2-b 個

である。白いタイルは 1cm × 1cm の正方形 1 個につき 4 枚使うので，使った白いタイルの枚数は

$4(a^2-b)$ ① 枚

である。

次に貼り方Ⅰを貼り方Ⅱに変え

→黒いタイルを b 枚

⇒1cm × 1cm の正方形は

b 個

b 個の正方形に 4 枚の白いタイルを使ったので，使った白いタイルは

$4b$ 個

貼り方Ⅱを貼り方Ⅰに変えた。

→白いタイルを使った

1cm × 1cm の正方形は

a^2-b 個

a^2-b 個の正方形に 1 枚の黒いタイルを使ったので，使った黒いタイルは

a^2-b 枚

よって，貼り方を変えたときのタイルの合計は．

$$\underbrace{a^2-b}_{\text{貼り方を変えたときの黒いタイルの合計}}+\underbrace{4b}_{\text{貼り方を変えたときの白いタイルの合計}}=a^2+3b \text{ 枚}$$

はじめに使ったタイルの合計は．

$$b+4(a^2-b)=4a^2-3b \text{ 枚}.$$

よって，

$$\underbrace{a^2+3b}_{\text{貼り方を変えたタイルの合計}}=\underbrace{4a^2-3b}_{\text{はじめに使ったタイルの合計}}\underbrace{-225}_{\text{225枚少ない}}$$

式を整理すると．

$$-3a^2+6b=-225$$

両辺÷3

$$a^2-2b=75$$

$$a^2=75+2b$$

a は 2以上の整数，b は 1以上の整数より
a^2 は 75より大きい数である。

<u>$a=9$ のとき</u>

$a^2=81$ で a^2 は 75より大きい。

このとき

$$81=75+2b \Rightarrow b=3$$

bは1以上の整数なので適する.

$a=10$のとき

$a^2=100$で、a^2は75より大きい。

このとき

$$100=75+2b \Rightarrow b=\frac{25}{2}$$

bは1以上の整数なので不適

$a=11$のとき

$a^2=121$で a^2は75より大きい。

このとき

$$121=75+2b \Rightarrow b=23$$

bは1以上の整数なので適する。

よって,

最も小さいaの値は9

その次に小さいaの値は11

である.