2023年度　東京都
数学

Km Km

$\boxed{1}$

問1 与式 $= -8 + 36 \div 9$

$= -8 + 4$

$= -4$

問2 与式 $= \dfrac{3(7a+b) - 5(4a-b)}{15}$

$= \dfrac{21a + 3b - 20a + 5b}{15}$

$= \dfrac{a + 8b}{15}$

問3 与式 $= \sqrt{6} \times 2\sqrt{6} + 9\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 9$

$= 12 + 7\sqrt{6} - 9$

$= 3 + 7\sqrt{6}$

問4 $4x + 32 = 7x + 5$

$-3x = -27$

$x = 9$

問5 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \text{—— ①} \\ 8x + 9y = 7 & \text{—— ②} \end{cases}$

①×4 − ② より

$$\begin{array}{rrrl} & 8x + 12y &= 4 \\ -) & 8x + 9y &= 7 \\ \hline & 3y &= -3 \end{array}$$

$\therefore y = -1$

$y=-1$ を①に代入して

$$2x+3\times(-1)=1$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

よって、$x=2$、$y=-1$

問6 解の公式より

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-6)}}{2\times2}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{57}}{4}$$

問7

赤，白，青1，青2，青3，青4 の6個から2個取り出す方法は，

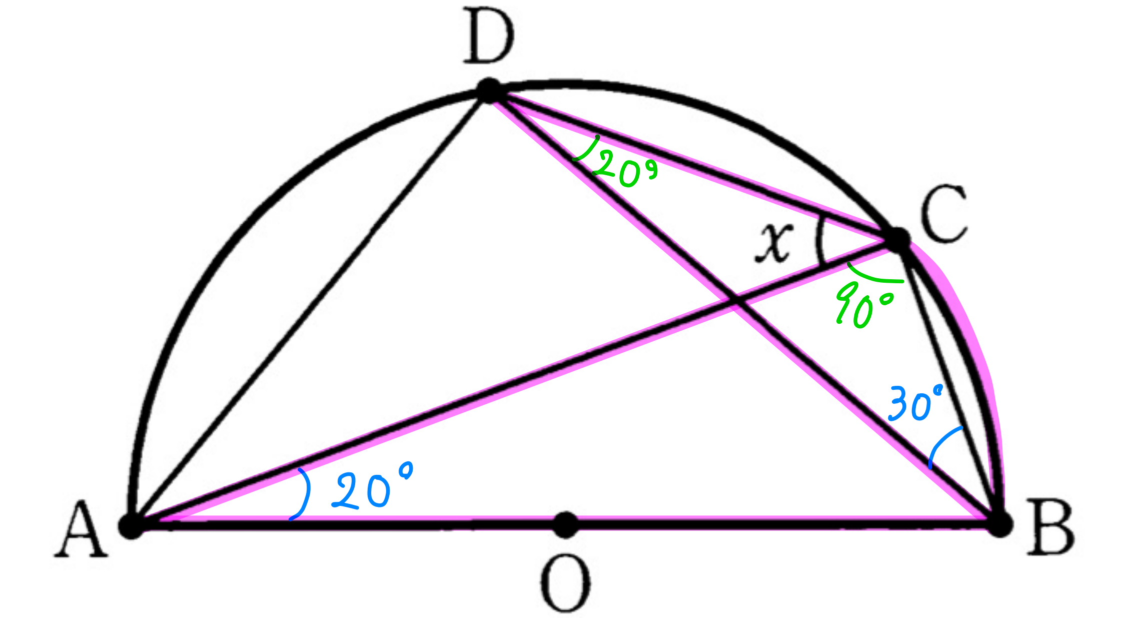
(赤，白)，(赤，青1)，(赤，青2)，(赤，青3)
(赤，青4)
(白，青1)，(白，青2)，(白，青3)，(白，青4)
(青1，青2)，(青1，青3)，(青1，青4)
(青2，青3)，(青2，青4)
(青3，青4)

で15通り。このうち 2つとも青の取り出し方は6通り。よって求める確率は

$$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

問8

図1



$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角は等しいので、

$\angle BAC = \angle BDC = 20°$

$\angle ACB$は直径に対する円周角なので、

$\angle ACB = 90°$

△BCDにおいて、三角形の内角の和は180°なので

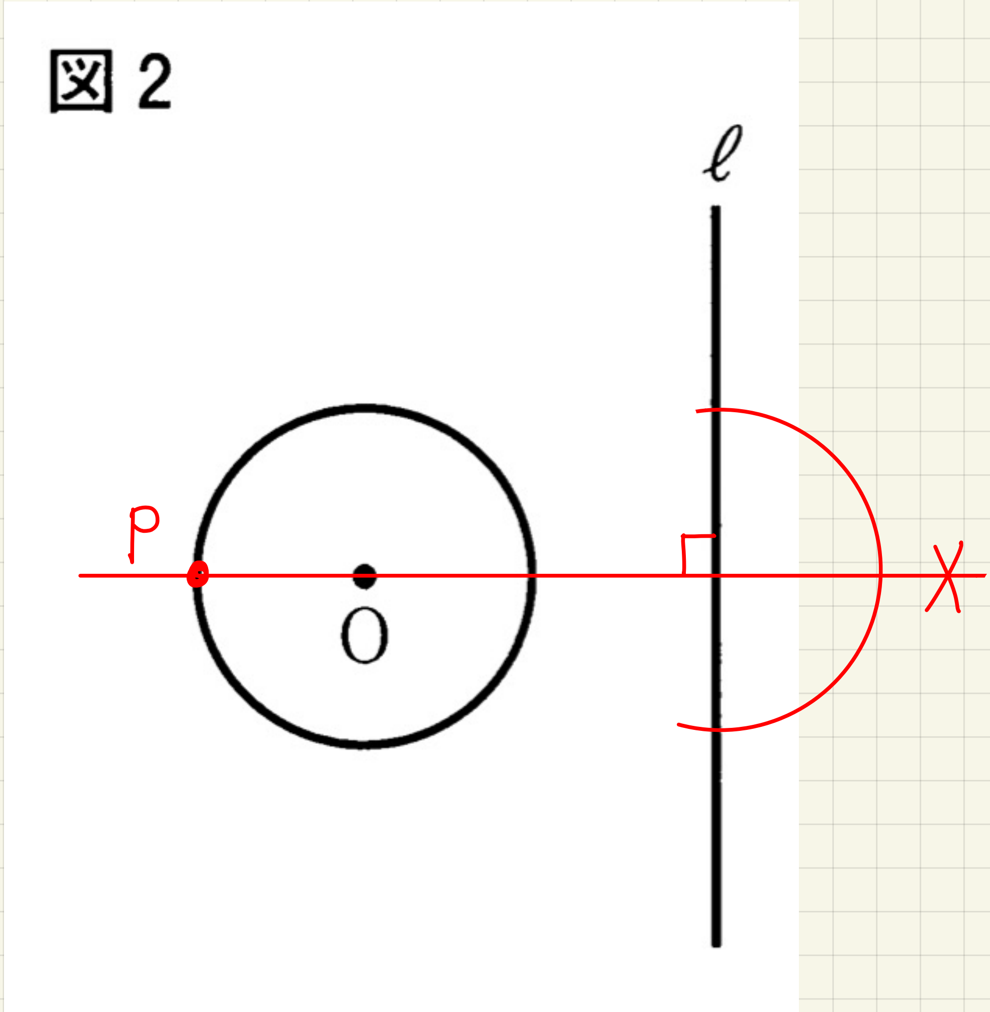
$\underbrace{\angle CBD}_{30°} + \underbrace{\angle BDC}_{20°} + \underbrace{\angle DCB}_{90°+x} = 180°$

よって

$30 + 20 + 90 + x = 180$

$x = 40°$

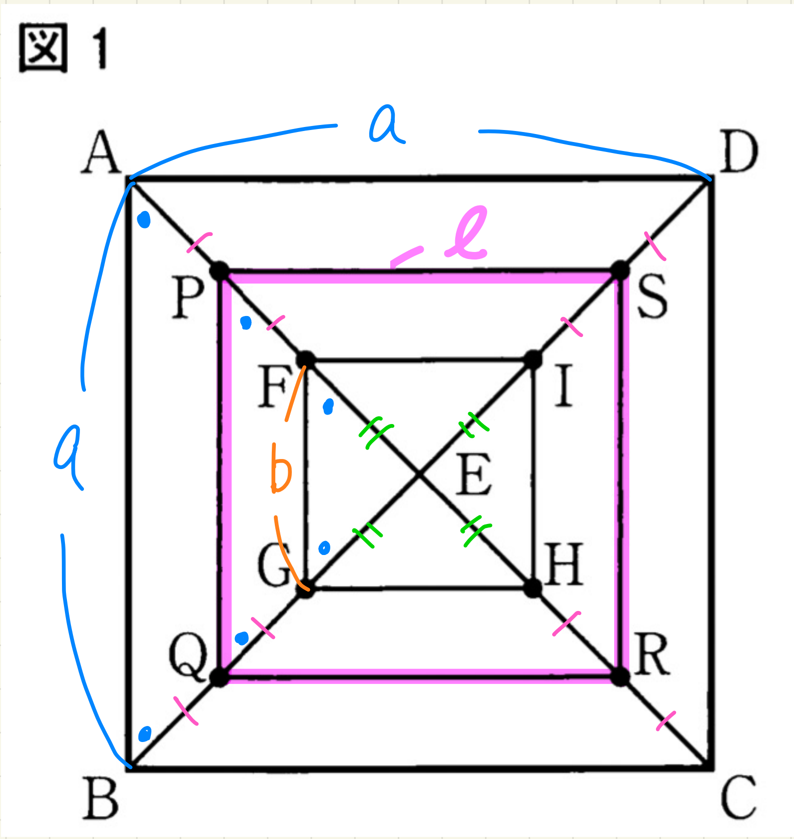
問9

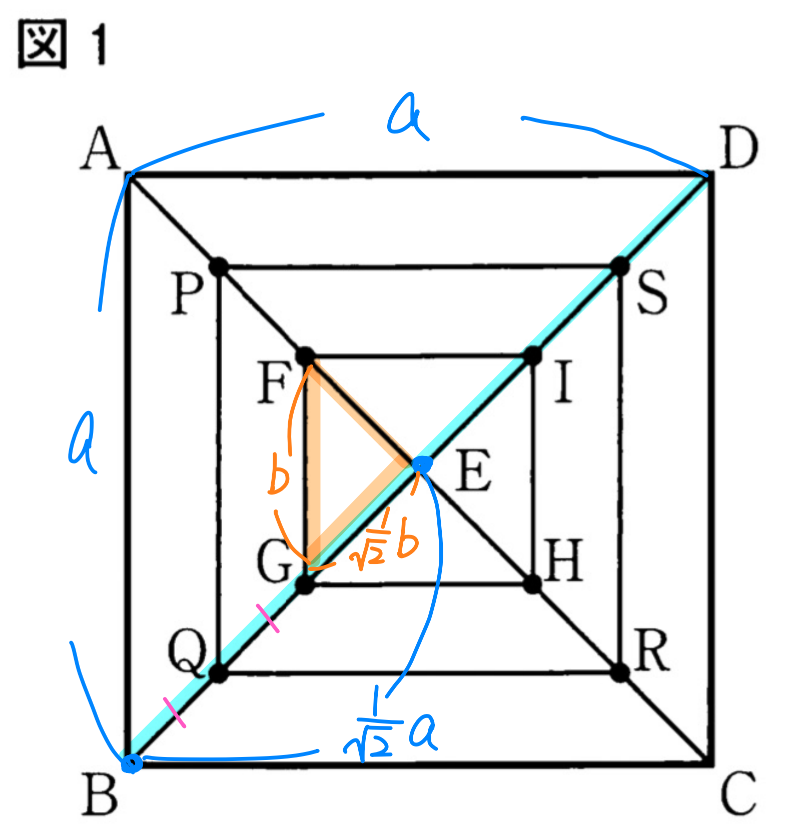


①点Oを通り
直線ℓに垂直
な線を描く

② ①と円Oの交点
のうち, ℓから遠い
方の点がPとなる.

2
問 1





△ABDは直角二等辺三角形なので、

$$DB = \sqrt{2}a$$

点EはDBの中点なので

$$DB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

同様に△EFGは直角二等辺三角形なので、

$$EG = \frac{1}{\sqrt{2}}b$$

※ EF : EG : FG = 1 : 1 : $\sqrt{2}$ より

EG : FG = 1 : $\sqrt{2}$ ⇒ $EG = \frac{1}{\sqrt{2}}FG$

よって、

$$BG = \frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2}}b$$

点QはBGの中点なので、

$$GQ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2}}b\right)$$

よって、

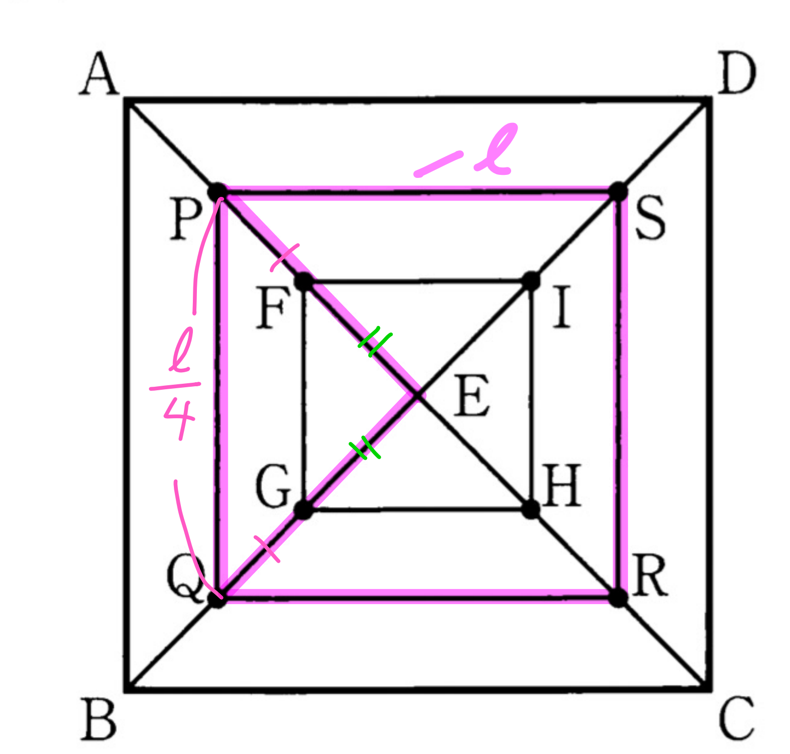
$$EQ = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2}}b\right)}_{GQ} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}b}_{EG}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}a - \frac{1}{2\sqrt{2}}b + \frac{1}{\sqrt{2}}b$$

$$= \frac{a \quad - b + 2b}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a + b}{2\sqrt{2}} \text{ cm} \quad —— ①$$

図 1



一方、□PQRSの周の長さが l cm なので、

$$PQ = \frac{1}{4} l \text{ cm}$$

△EPQは直角二等辺三角形なので、

$$EQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{4} l$$

$$= \frac{l}{4\sqrt{2}} \text{ cm} \quad —— ②$$

①、②より

$$\frac{a + b}{2\sqrt{2}} = \frac{l}{4\sqrt{2}}$$

両辺 × $4\sqrt{2}$

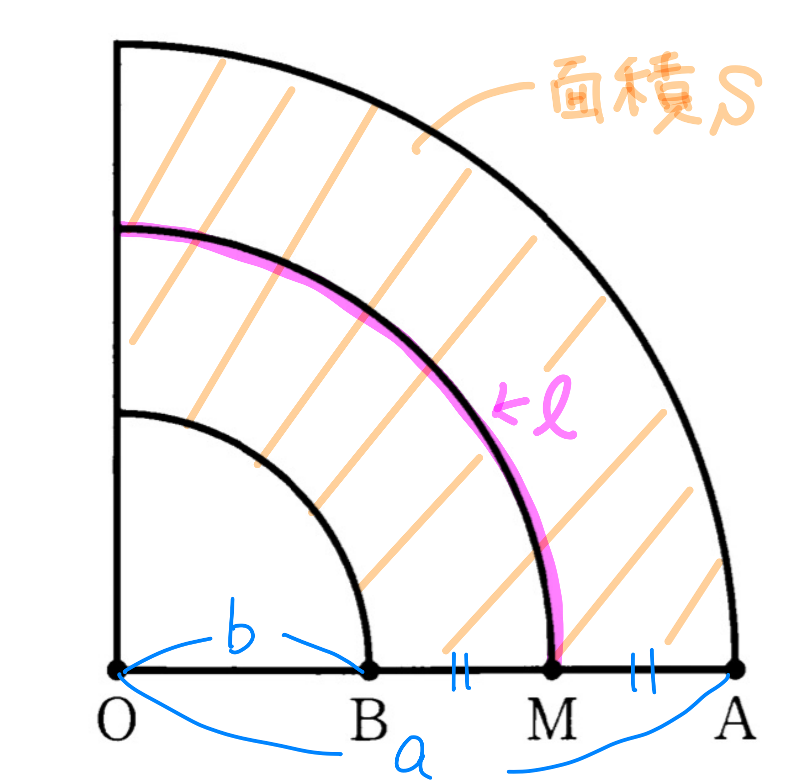
$$2(a + b) = l$$

よって

$$l = 2a + 2b$$

問2

図2



$BA = OA - OB$
$= a - b$

点MはABの中点なので、

$$BM = \frac{1}{2}(a-b)$$

よって、

$$OM = b + \frac{1}{2}(a-b)$$
$$= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$
$$= \frac{a+b}{2}$$

したがって、

$$\ell = \frac{a+b}{2} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(a+b)\pi \quad \text{cm}$$

よって、

$$(a-b)\ell = \frac{1}{4}(a+b)(a-b)\pi \quad \text{—— ①}$$

また、線分OAを半径とする扇形の面積は、

$$a \times a \times \pi \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}a^2\pi \quad \text{cm}^2$$

線分OBを半径とする扇形の面積は

$$b \times b \times \pi \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}b^2\pi \quad cm^2$$

よって

$$S = \frac{1}{4}a^2\pi - \frac{1}{4}b^2\pi$$

$$= \frac{1}{4}\pi(a^2 - b^2)$$

$$= \frac{1}{4}(a+b)(a-b)\pi \quad —— ②$$

①, ②より. $S = (a-b)l$ (証明終わり)

$\boxed{3}$

問1 点Pは $l : y = \frac{1}{2}x + 1$ のグラフ上にあり.

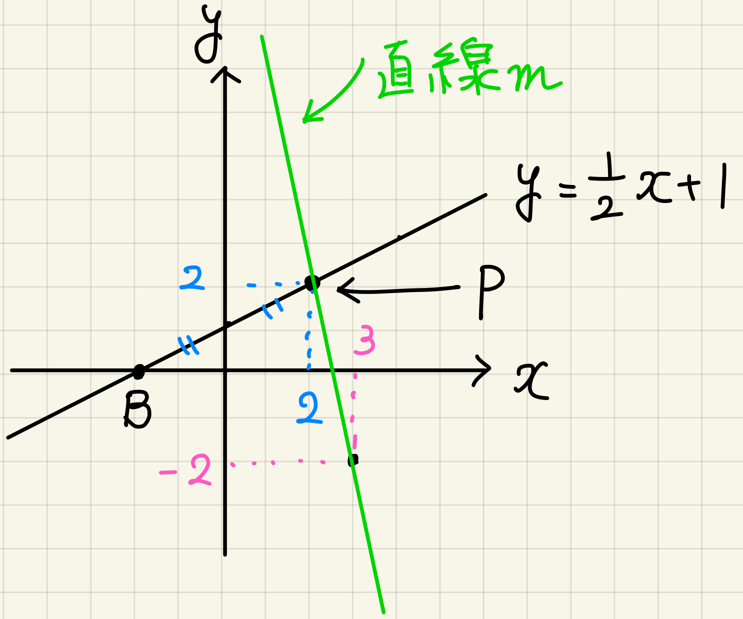
$y = -1$ なので

$$-1 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = -2 \quad \therefore x = -4 \quad エ$$

問2

点Bは $l : y = \frac{1}{2}x + 1$ のグラフ上にあり, $y = 0$ なので

$$0 = \frac{1}{2}x + 1 \quad \therefore x = -2 \quad \therefore B(-2, 0)$$



線分BPがy軸により二等分されるので、点Pの座標は$(2, 2)$である。

また、直線mは$A(3, -2)$を通る。

直線mの式を$y=ax+b$とすると、1次関数では、傾き＝変化の割合なので

$$a = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

$$= \frac{-2-2}{3-2}$$

$$= -4$$

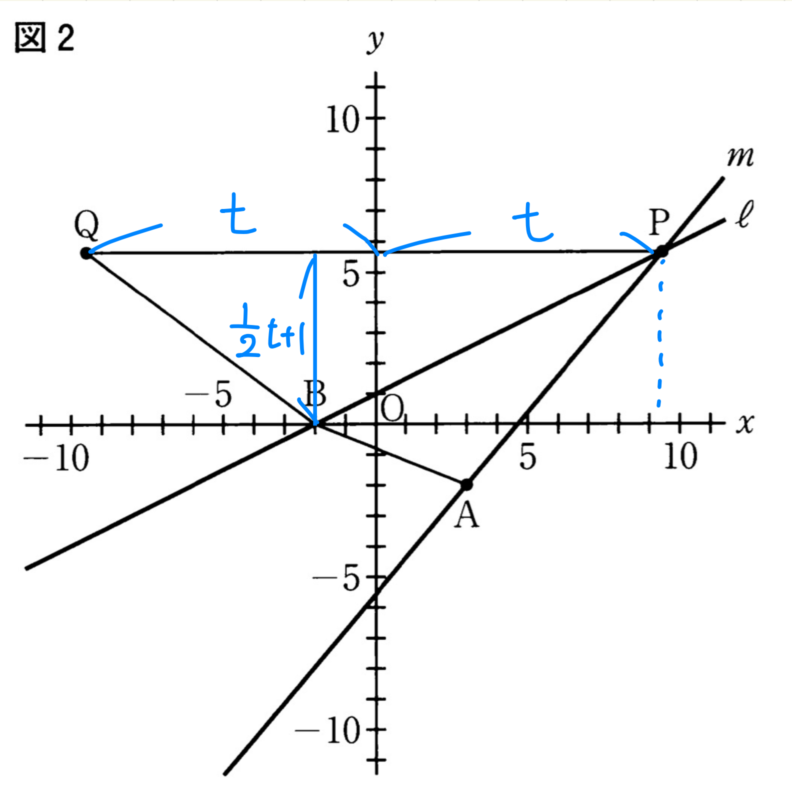
よって、$y=-4x+b$で、P$(2, 2)$を通るので、

$$2 = -4 \times 2 + b \Rightarrow b = 10$$

したがって、直線mの式は、$y = -4x + 10$

①イ　②エ

問3



点Pのx座標をtとする。

点Pは$y=\frac{1}{2}x+1$のグラフ上にあるので、

$y=\frac{1}{2}t+1$

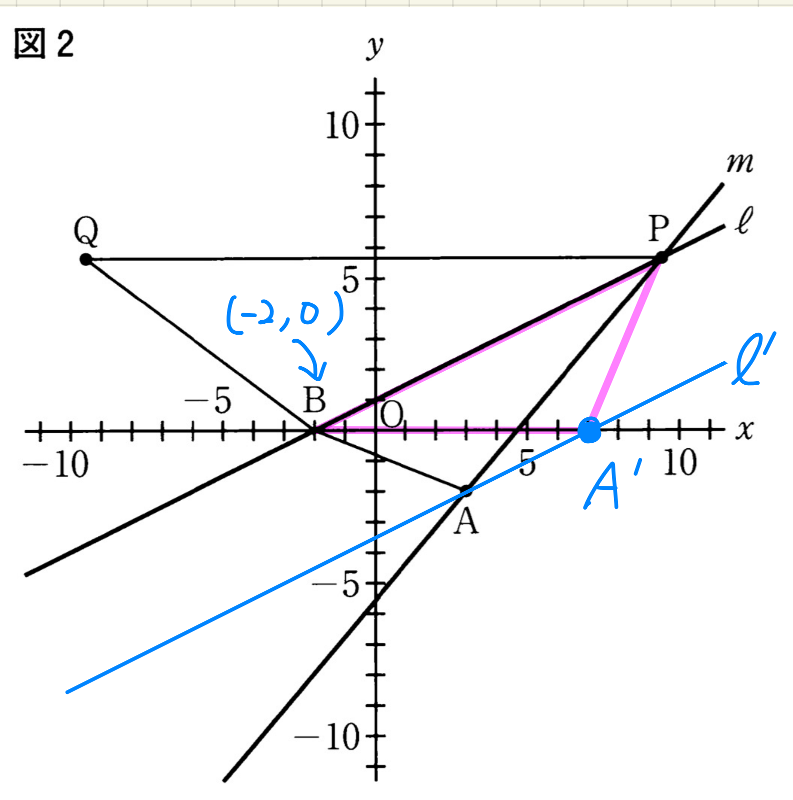
$\therefore P(t, \frac{1}{2}t+1)$

点Qは点Pとy軸について対称なので

$Q(-t, \frac{1}{2}t+1)$

よって、△BPQの面積は

$$\frac{1}{2}\times 2t\times\left(\frac{1}{2}t+1\right)=\frac{1}{2}t^2+t \quad ——① $$



次に、点Aを通りℓに平行な直線ℓ'を引く。

$\ell' : y=ax+b$ とおくと、

$\ell \parallel \ell'$ より $a=\frac{1}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+b$ で $A(3, -2)$ を通るので

$-2=\frac{1}{2}\times 3+b$

$\Rightarrow b=-\frac{7}{2}$

$\therefore \ell' : y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

ℓ'とx軸との交点をA'とすると、A'のy座標は0なので

$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \Rightarrow x = 7 \quad \therefore A'(7, 0)$$

$\triangle APB$と$\triangle A'PB$は、底辺、高さが等しいので面積も等しい。$\triangle A'PB$の面積は

$$\frac{1}{2} \times \underbrace{(2+7)}_{BP} \times \left(\frac{1}{2}t + 1\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}t + 1\right) \quad —②$$

$\triangle BPQ = 2\triangle APB$と①、②より

$$\frac{1}{2}t^2 + t = 2\left\{\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}t + 1\right)\right\}$$

$$\frac{1}{2}t^2 + t = \frac{9}{2}t + 9$$

$$\therefore t^2 + 2t = 9t + 18$$

$$t^2 - 7t - 18 = 0$$

$$(t+2)(t-9) = 0$$

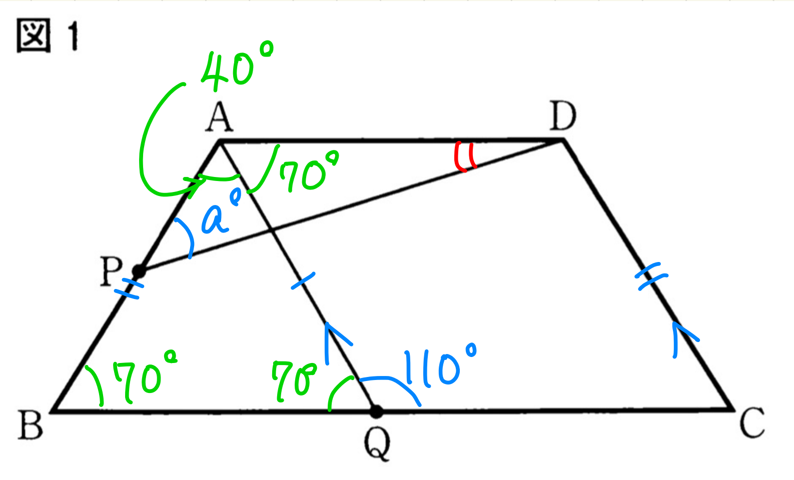
$$t = -2, 9$$

$t > 0$より　$t = 9$

よって、点Pのx座標は9

4

問1



AD // BC, AQ // DC より▱AQCDは平行四辺形である。よって、

AQ = DC

また、仮定よりAB = DC

なので、

AB = AQ ⇒ △ABQは二等辺三角形

∠AQB = 180° − ∠AQC より ∠AQB = 70°

よって、∠ABQ = ∠AQB = 70°

さらに、∠BAQ = 180° − ∠ABQ − ∠AQB = 40°

AD // BCより錯角が等しいので、

∠DAQ = ∠AQB = 70°

以上より、△APDにおいて、三角形の内角の和は180°なので、

$\underbrace{\angle APD}_{a^\circ} + \underbrace{\angle DAP}_{110^\circ} + \angle ADP = 180^\circ$

よって

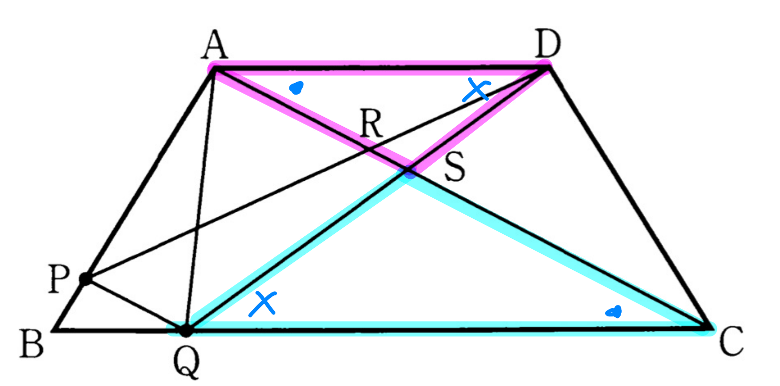
∠ADP = 180° − 110° − a°

= (70 − a)度 ㋐

問2

①

図2



△ASDと△CSQにおいて、
AD//QCより錯角が等しいので、

∠SDA = ∠SQC ―― ①
∠SAD = ∠SCQ ―― ②
①、②より2組の角がそれぞれ等しいので、
△ASD ∽ △CSQ (証明終わり)

② やや難

図2

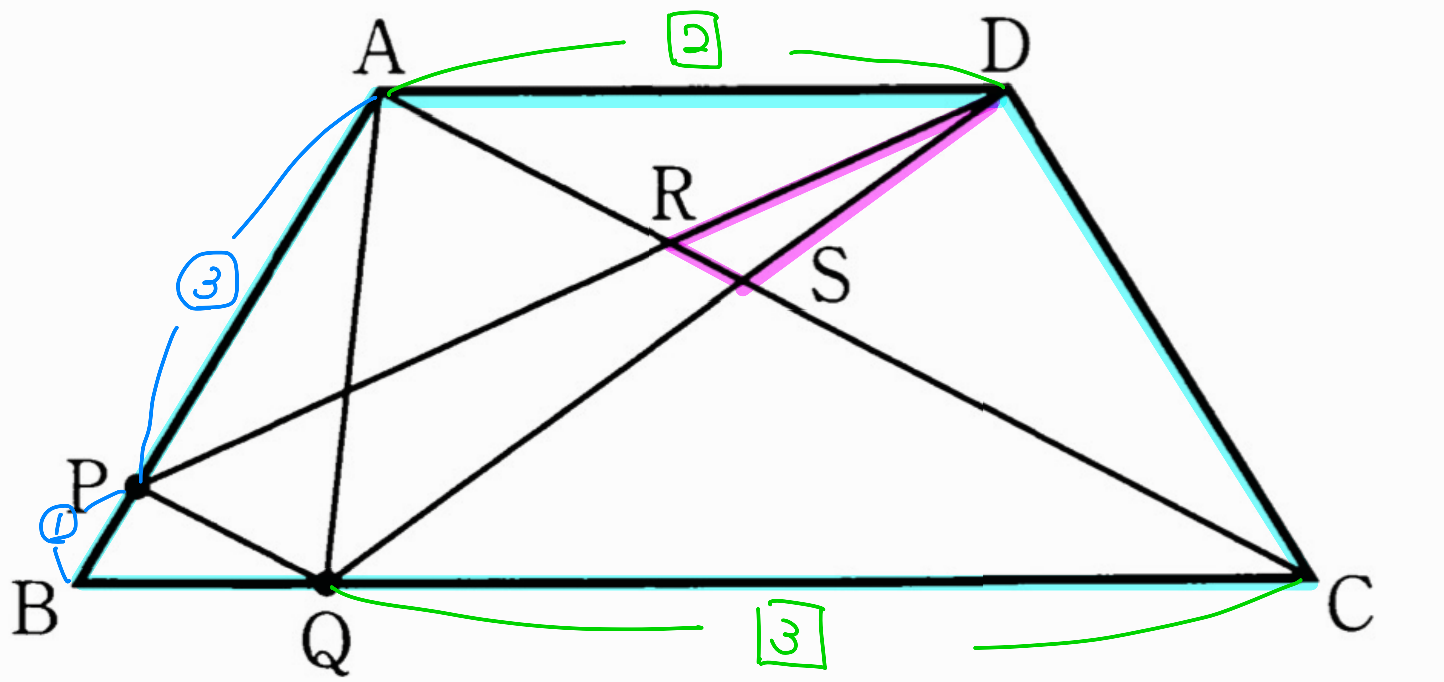
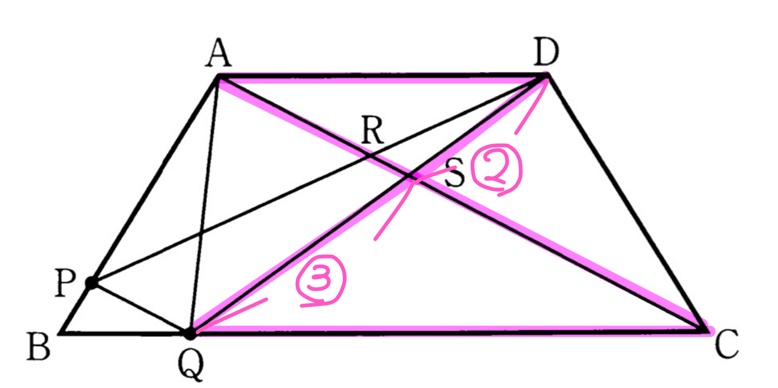


図 2

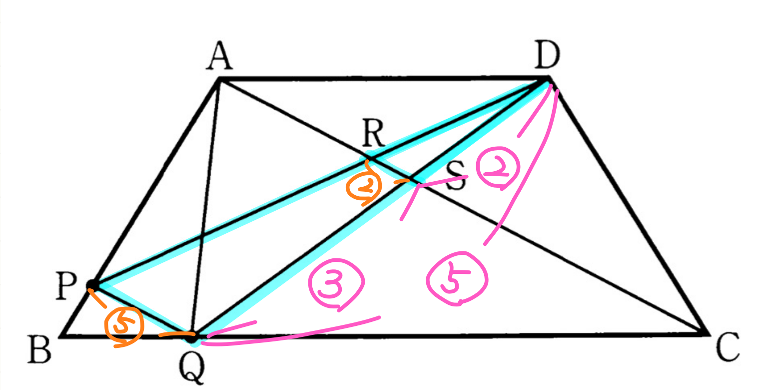


①より△ASD ∽ △CSQなので、対応する辺の比は等しいから、

$DS : SQ = AD : QC$

$= 2 : 3$

図 2



また、△DRSと△DPQにおいて、

RS // PQより同位角が等しいので、

$\angle DRS = \angle DPQ$ ―― ①

$\angle DSR = \angle DQP$ ―― ②

①、②より2組の角がそれぞれ等しいので、

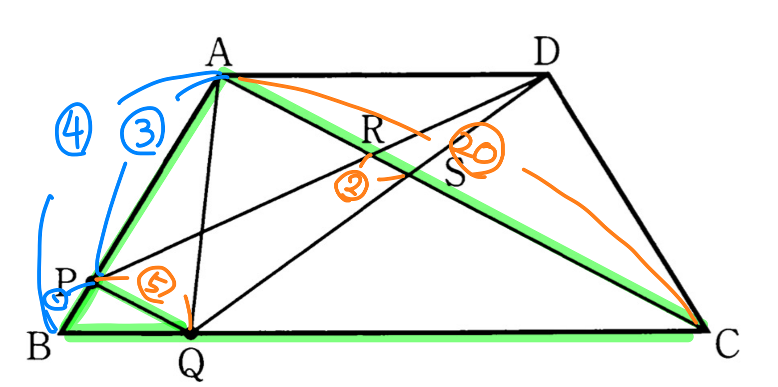
△DRS ∽ △DPQ

対応する辺の比は等しいので、

$RS : PQ = DS : DQ$

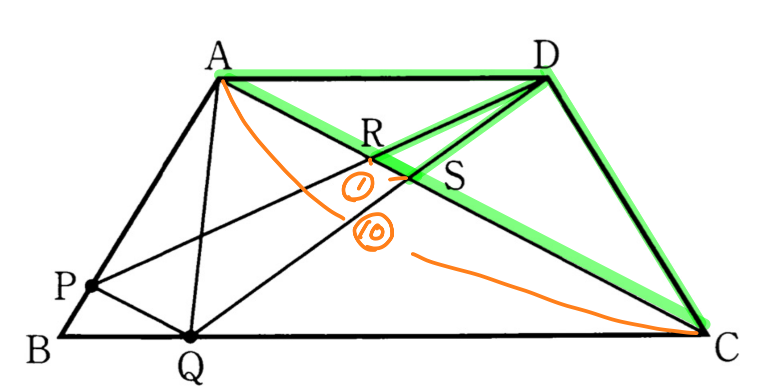
$= 2 : 5$ ⇒ RS = ②, PQ = ⑤ と表す。 ―― ⑦

図 2



△BQPと△BCAにおいて,
PQ//ACより同位角が等しいので.
∠BQP=∠BCA ―― ③
∠BPQ=∠BAC ―― ④
③, ④より2組の角がそれぞれ等しいので.
△BQP∽△BCA ―――― ①
対応する辺の比は等しいので,
PQ : AC = BP : BA
= 1 : 4.
⑦より PQ = ⑤ なので, AC = ⑳
よって, RS : AC = ② : ⑳
= ① : ⑩

図 2

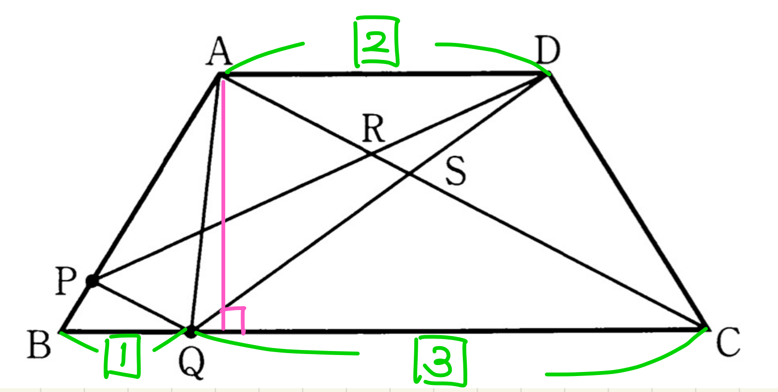


よって△DRSと△DACにおいて, 底辺をそれぞれRS, ACとすると, 高さは等しいので, 面積比は底辺比と等しい。

ゆえに, △DRS : △DAC = 1 : 10.

⇒△DRSの面積を①とすると，△DACの面積は⑩

図 2



① より

BP：BA ＝ BQ：BC
(BP = 1, BA = 4)

∴ 4BQ ＝ BC

BC ＝ BQ ＋ QC より

4BQ ＝ BQ ＋ QC ⇒ 3BQ ＝ QC

よって，BQ：QC ＝ 1：3.

⇒ AD：BC ＝ $\boxed{2}$：$\boxed{4}$

△DAC と台形ABCDにおいて.

△DACの底辺 → DA

台形ABCDの上底，下底 → AD，BC

とすると．高さが等しいので △DAC と台形ABCD の面積比は．底辺 と 上底＋下底 の比に等しい．

注

△DAC ＝ $\frac{1}{2}$ × AD × 高さ

台形ABCD ＝ $\frac{(AD + BC) \times 高さ}{2}$

等しい

⇒面積比は．$\underbrace{AD}_{②}$：$\underbrace{AD + BC}_{② + ④}$

よって，

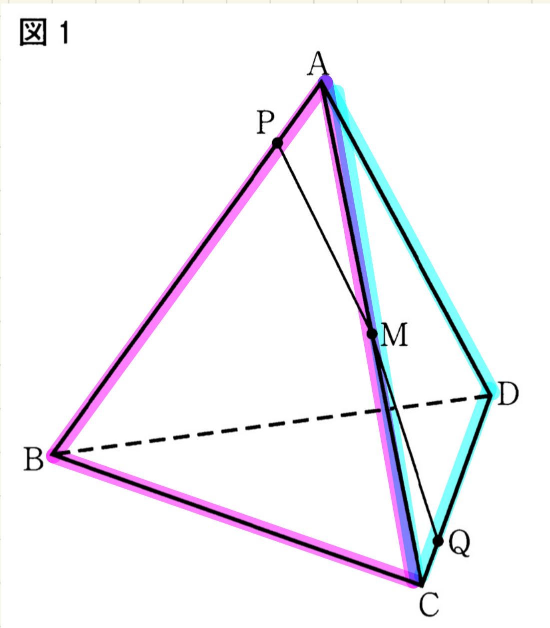
$\underbrace{△DAC}_{⑩}$：台形ABCD ＝ 1：3

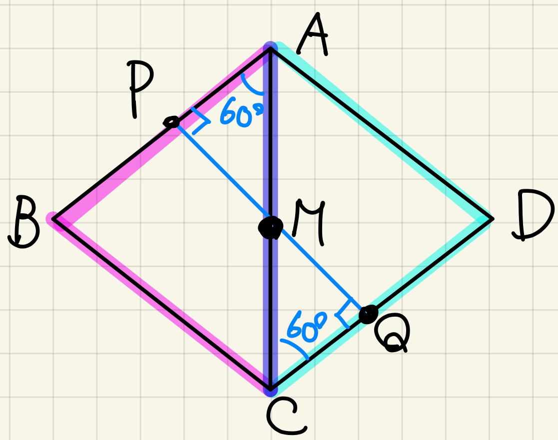
∴ 台形ABCD $= 3 \times 10$
$= 30$

よって、
△DRS : 台形ABCD = 1 : 30

したがって、
△DRS は 台形ABCDの面積の $\frac{1}{30}$ 倍

$\boxed{5}$
問1
点P, 点Q, 点Mを含む面で考える





MP＋MQが最短となるのは, PQが AB⊥PQ, CD⊥PQ となるときである。

△ABCは正三角形なので
∠PAM = 60°
よって, △APMは 30°−60°−90°の直角三角形である。 ⇒ AP : AM : PM = 1 : 2 : $\sqrt{3}$

点MはACの中点であり、AC = 6cm なので、

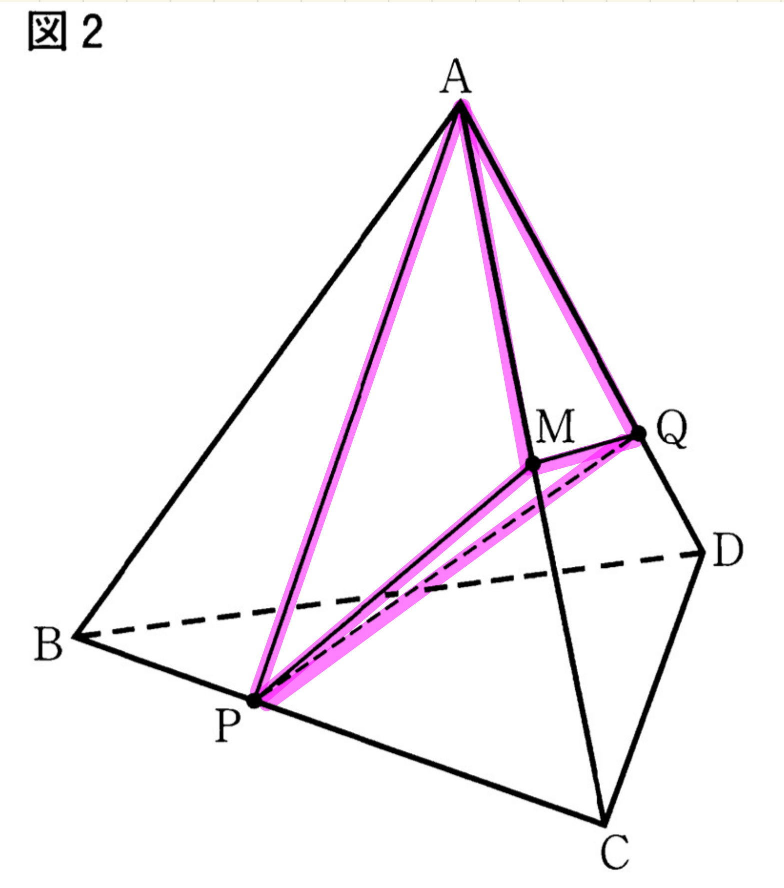
$AM = 3\text{cm}$

よって、

$AP : \underbrace{AM}_{3\text{cm}} = 1 : 2 \Rightarrow AP = \frac{3}{2}\text{cm}$

点Pは毎秒1cmで進むので、MP + MQ = ℓ が最短となるのは、点Pが点Aを出発して $\frac{3}{2}$秒後である。

問2. 難問



方針

立体A-BCDの底面を△ACD

⇒ 立体B-ACD

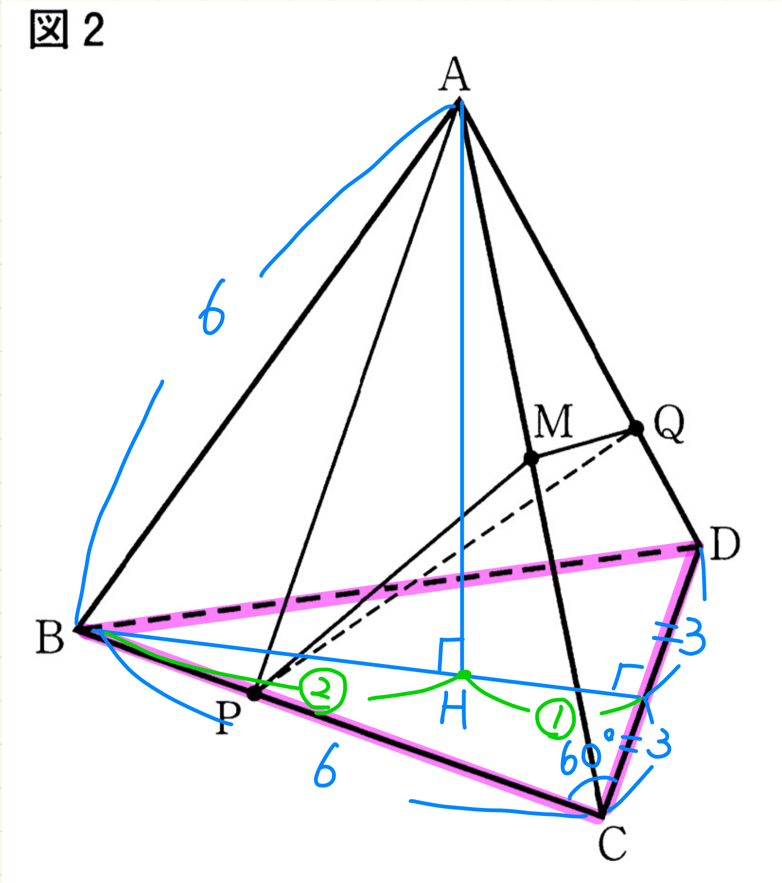
立体Q-APMの底面を△AMQと考える。

⇒ 立体P-AMQ

△ACD, △AMQは同一平面上にあるので、2つの立体の高さの比は、BC : PCとなる。

⇒ 立体B-ACDの体積から、底面積比と高さ比を使って求める。

立体B-ACDの体積について.



△BCDについて,
底辺をCDとすると,
高さは $3\sqrt{3}$ cm

※ 30°-60°-90°の直角三角形より

また,点Aから下ろした垂線の足であるHは,
△BCDの重心であり,
中線を②:①に分ける

よって, $BH = 3\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{3}$ cm

△ABHで三平方の定理より

$$AH = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36-12} = \sqrt{24}$$
$$= 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

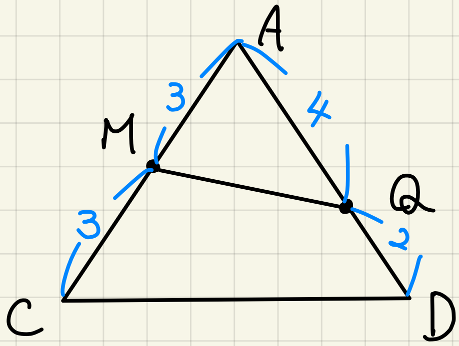
よって,立体A-BCDの体積は.

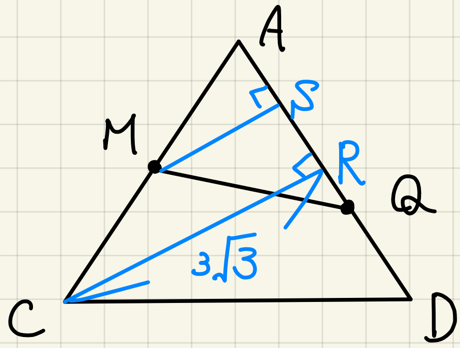
$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} \times \frac{1}{3} = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

(参考) 一辺が a cmの正四面体の体積は.

$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ で求めることができる

次に，$\triangle AMQ$ と $\triangle ACD$ の面積比を考える.





点Mから AD に垂線を下ろした点を S
点Cから AD に垂線を下ろした点を R とする.

点Mは AC の中点であり，$MS \parallel CR$ なので，
中点連結定理から.

$$MS = \frac{1}{2}CR$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}$$

よって

$$\triangle AMQ : \triangle ACD = \frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2}\sqrt{3} : \frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3} : 9\sqrt{3}$$

$$= 1 : 3$$

$\Rightarrow \triangle AMQ = \frac{1}{3}\triangle ACD$

また，立体 B-ACD と立体 P-AMQ の高さの比は.
$BC : PC = 6 : 4$ なので，$PC = \frac{2}{3}BC$。
よって，求める体積は.

$$18\sqrt{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}^3$$