2023年度　兵庫県

数学

Km Km

1.

(1) 与式 $= -3+9$

$= \underline{6}$

(2) 与式 $= \underline{-5y}$

(3) 与式 $= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= \underline{2\sqrt{3}}$

(4) 与式 $= \underline{(x-2)(x+4)}$

(5) y は x に反比例するので、$y = \dfrac{a}{x}$ とおく

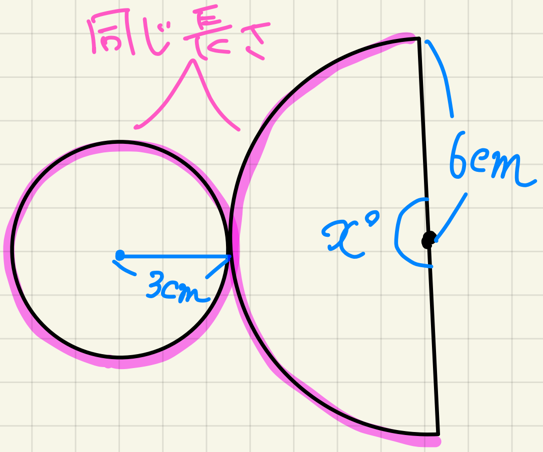
$x=-6$, $y=2$ を代入して、

$$2 = \frac{a}{-6} \Rightarrow a = -12$$

よって、$y = -\dfrac{12}{x}$ で $y=3$ を代入して

$$3 = -\frac{12}{x} \Rightarrow \underline{x = -4}$$

(6) 円すいの展開図は以下の通り



底面の円周の長さと、側面のおうぎ形の周の長さは等しい。おうぎ形の中心角を x とすると、

$$\underbrace{3\times 2}_{\text{直径}}\times\pi = \underbrace{6\times 2}_{\text{直径}}\times\pi\times\frac{x}{360}$$

よって

$$6\pi = 12\pi \times \frac{x}{360}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 180^\circ$$

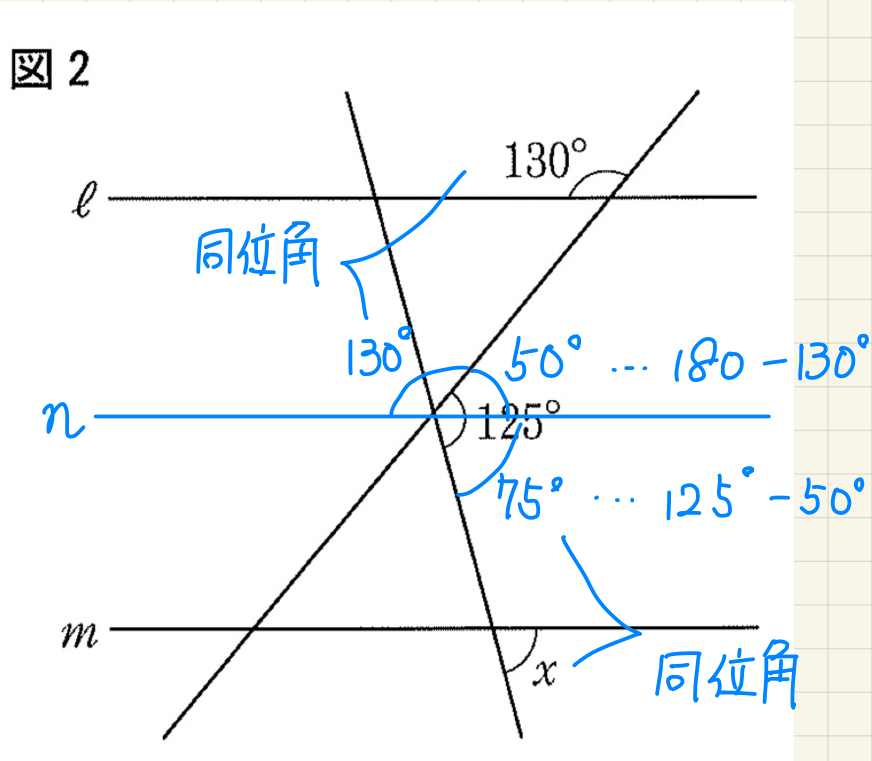
したがって、側面積は.

$$6 \times 6 \times \pi \times \frac{180}{360} = 36\pi \times \frac{1}{2}$$

$$= 18\pi \ \mathrm{cm}^2$$

(7)

図 2



図のようにℓとmに平行な直線nを引く.
各角度は図の通り。
よって

$$\angle x = 75^\circ$$

(8)

10度以上12度未満の度数は4個
12度以上14度未満の度数は11個

よって、10度以上14度未満の累積度数は

$4 + 11 = 15$ 個

50個中15個が10度以上14度未満なので、
割合は

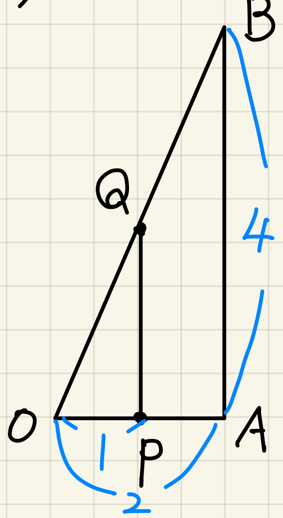
$$\frac{15}{50}$$

よって、1000個の場合は

$$1000 \times \frac{15}{50} = 300$$ ㋐

2.

(1)



△OPQと△OABについて
共通な角は等しいので
∠QOP = ∠BOA ―― ①
仮定より
∠OPQ = ∠OAB = 90° ―― ②
①、②より2組の角がそれぞれ等しいので、△OPQ ∽ △OAB

対応する辺の比は等しいから

$$\underbrace{OP}_{1} : \underbrace{OA}_{2} = PQ : \underbrace{AB}_{4}$$

よって、

$$2PQ = 4 \Rightarrow PQ = 2$$

(2)

(1) より $\triangle OPQ \backsim \triangle OAB$ なので、

$$\underset{x}{OP} : \underset{2}{OA} = PQ : \underset{4}{AB}$$

よって、

$$2PQ = 4x \Rightarrow PQ = 2x$$

したがって、$\triangle OPQ$ の面積 y は、

$$y = \frac{1}{2} \times x \times 2x$$

$$= x^2.$$

よって、$y = x^2$ のグラフは ア

(3)

① $x = 2$ のときの $\triangle OPQ$ の面積を求めれば良い。
$x = 2$ のとき、点 P は点 A と重なり、点 Q は点 B と重なる。したがって、$\triangle OPQ$ の面積は、$\triangle OAB$ の面積と等しいから

$$y = \frac{1}{2} \times 2 \times 4$$

$$= 4.$$

よって、$\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる数は 4

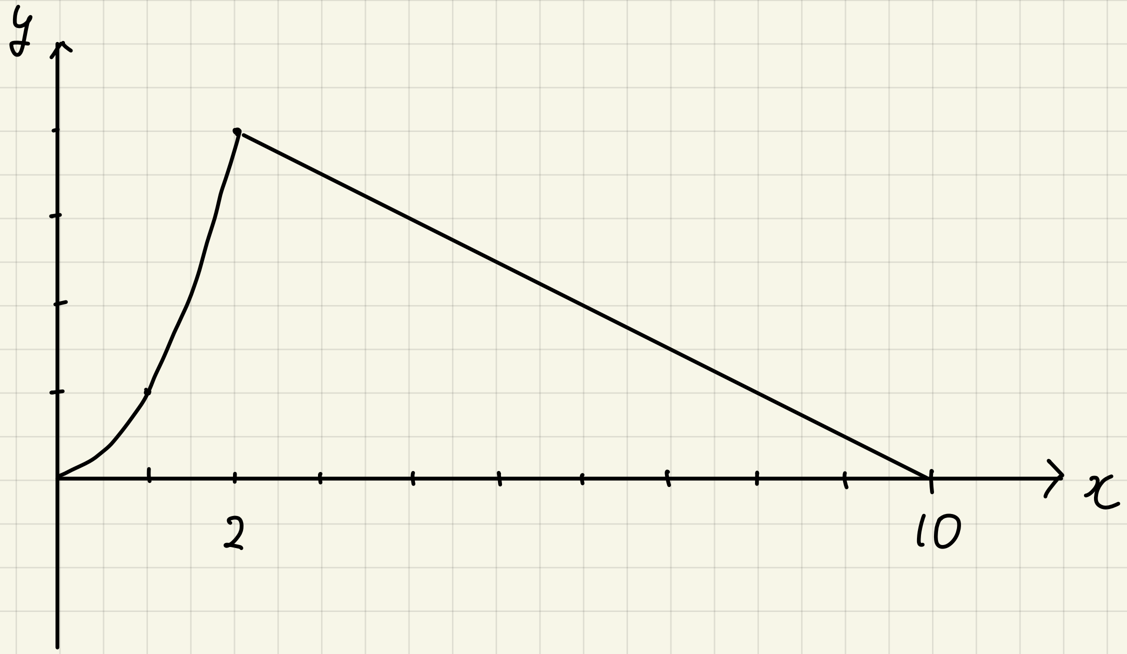
② 図2より，点Pは辺AB上を8秒で移動する。
AB = 4 cm なので，点Pの動く速さは
$$4 \div 8 = \frac{1}{2}$$
よって，秒速 $\frac{1}{2}$ cm

③ $0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$y = x^2$
$2 \leqq x \leqq 10$ のとき，図2より
$x = 2$ のとき $y = 4$
$x = 10$ のとき $y = 0$
直線の式を $y = ax + b$ とおくと，1次関数では，
傾き＝変化の割合なので

$$a = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$
$$= \frac{0-4}{10-2}$$
$$= -\frac{4}{8}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

よって，$y = -\frac{1}{2}x + b$ で，$x = 10$，$y = 0$ を代入して，
$$0 = -\frac{1}{2} \times 10 + b \quad \Rightarrow \quad b = 5$$
よって，$2 \leqq x \leqq 10$ では，$y = -\frac{1}{2}x + 5$ となる。

$0 \leqq x \leqq 10$ のときのグラフは、以下の通り



グラフより

$0 \leqq x \leqq 2$ では、x と y は1対1で対応

$2 \leqq x \leqq 10$ では、x と y は1対1で対応

しているので、$\triangle OPQ$ の面積が等しくなるためには、

$x = t$ のとき $y = x^2$

$x = t + 4$ のとき $y = -\frac{1}{2}x + 5$

のグラフとなる。よって、

$$t^2 = -\frac{1}{2}(t+4) + 5$$

$$t^2 + \frac{1}{2}t - 3 = 0$$

$$2t^2 + t - 6 = 0$$

解の公式より

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{4}$$

よって,

$$t = -2,\ \frac{3}{2}$$

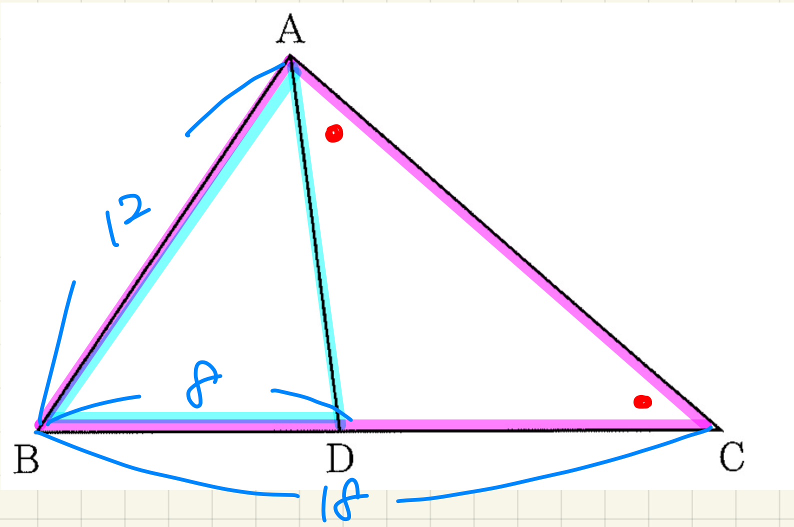
$0 < t < 6$ より $t = \frac{3}{2}$

注 $x = t$ のとき, $y = x^2$ のグラフである。
$y = x^2$ は $0 \leqq x \leqq 2$ なので, t は, $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす必要がある。

$t = \frac{3}{2}$ は これを満たすので, 適する.

3.

(1)



まず $\triangle ABC \backsim \triangle DBA$ であることを証明する.
$\triangle ABC$ と $\triangle DBA$ において,
仮定から

$\underbrace{AB}_{12} : \underbrace{DB}_{8} = 3:2$ —①

$\underbrace{BC}_{18} : \underbrace{BA}_{12}$ ア $= 3:2$ —②

①, ②より

$AB : DB = BC : BA$ ―③

共通な角だから

$\angle ABC = \angle DBA$ ―④

③, ④より2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$

したがって,

$\angle ACB = \angle DAB$ …対応する角は等しい ―⑤

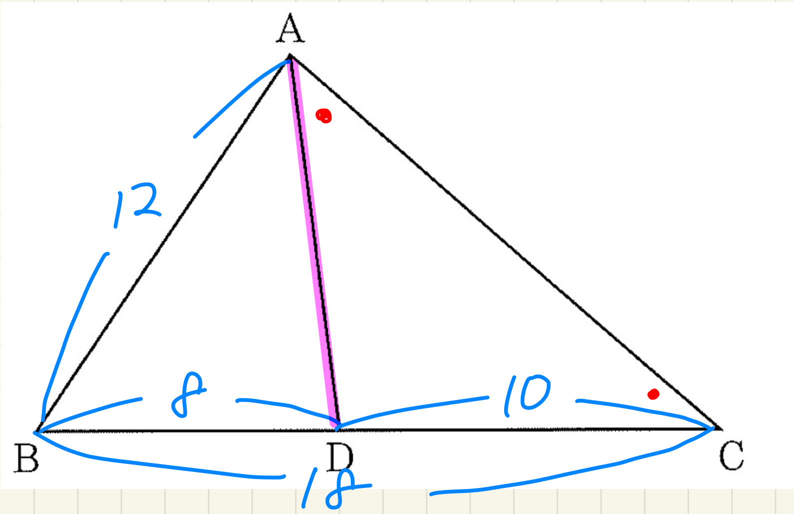
仮定から

$\angle DAB = \angle DAC$ ―⑥

⑤, ⑥より

$\angle ACD = \angle CAD$

(2)



(1)より $\angle ACD = \angle CAD$

なので, $\triangle ADC$ は

$AD = DC$ の二等辺三角形である。

$DC = BC - BD$

$= 18 - 8$

$= 10$ cm

よって,

$AD = 10$ cm

(3) (1)より△ABC ∽ △DBA なので、対応する辺の比は等しいから

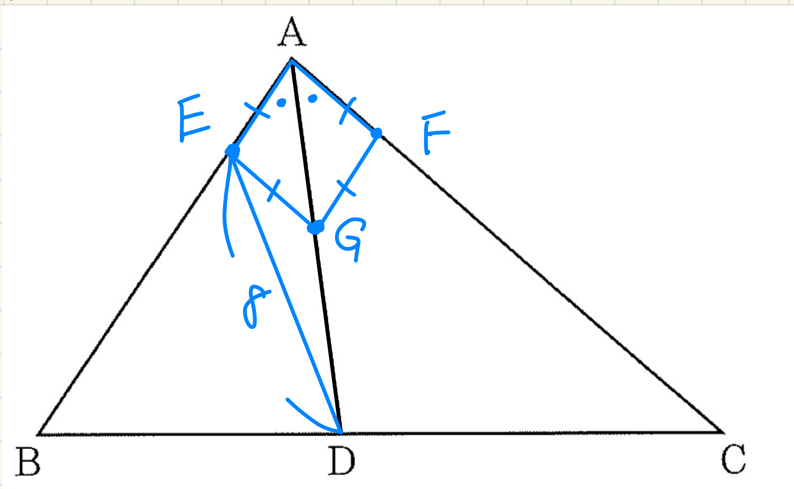
$$\underbrace{AB}_{12} : \underbrace{DB}_{8} = AC : \underbrace{DA}_{10}$$

よって、

$$3 : 2 = AC : 10$$

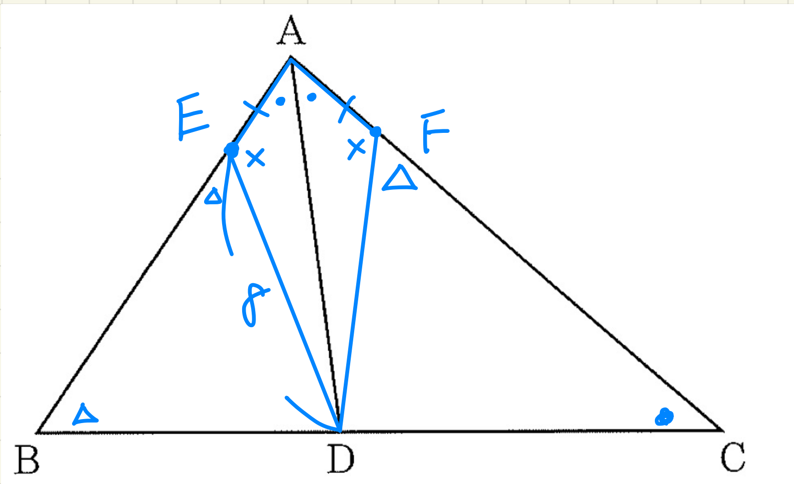
$$2AC = 30 \Rightarrow AC = 15\text{cm}$$

(4)



問題文の条件から、点E、点Fは左図のようになる。
ひし形の残りの点をGとする。

BDは∠BACの二等分線なので、点Gは辺AD上にある。(∠EAG=∠FAGなので、AGはひし形の対角線となる) ∠BAD=∠CAD=・と書くこととする。



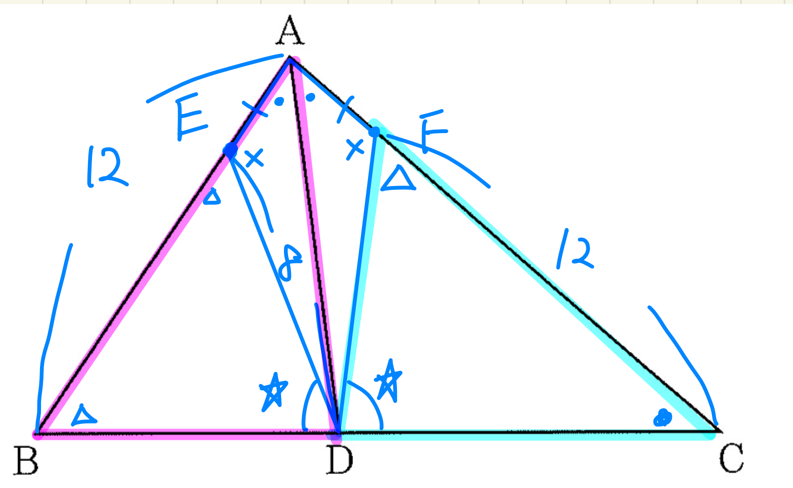
まず、△AEDと△AFDにおいて、仮定より

$\angle EAD = \angle FAD$ —①

AE, AFはひし形の一辺なので

$AE = AF$ —②

共通な辺は等しいから
$AD = AD$ —— ③
①,②,③より2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、$\triangle AED \equiv \triangle AFD$
対応する角は等しいので、
$\angle AED = \angle AFD$
$\angle AED = \angle AFD = x$, $\angle DEA = \triangle$ と書くこととする。
$AD = BD = 8cm$ なので、$\triangle DEB$ は二等辺三角形である。よって、
$\angle DEB = \angle DBE$
$\therefore \angle DBE = \triangle$
また、$\triangle + x = 180°$ より $\triangle = 180° - x$ よって、
$\angle DFC = 180° - x$
$= \triangle$
$AD = 10cm$, $DC = 10cm$ なので、$\triangle ADC$ は二等辺三角形である。よって
$\angle DAC = \angle DCA$
$\therefore \angle DCA = \bullet$



また、
$\angle ADB = 180° - \bullet - \triangle$
$\angle FDC = 180° - \bullet - \triangle$
より、$\angle ADB = \angle FDC$.
$\angle ADB = \angle FDC = ☆$ と書くこととする.

△ABD と △CFD において，

$\angle BAD = \angle FCD = \bullet$ ——④

$\angle ADB = \angle CDF = ☆$ ——⑤

$AD = DC = 10cm$ ——⑥

④，⑤，⑥ より 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△ABD ≡ △CFD

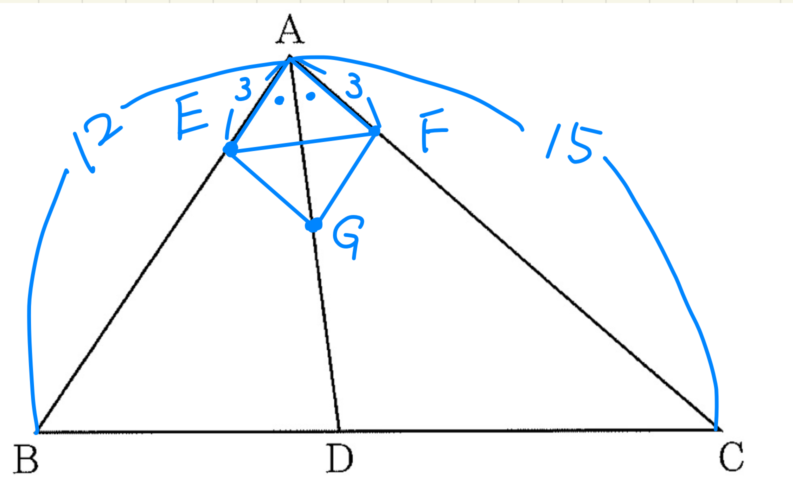
対応する辺の長さは等しいので，

$AB = CF = 12\ cm$

$AC = 15cm$ より

$AF = 15 - 12$

$= 3\ cm$



20 △ABC =

よって，

△AEFの面積 ： △ABCの面積 = 3 × 3 ： 12 × 15

= 1 ： 20

⇒ △ABCの面積 = 20 × △AEFの面積

また，△AEFの面積 = $\frac{1}{2}$ × ひし形AEGFの面積 より

△ABCの面積 = 20 × $\frac{1}{2}$ × ひし形AEGFの面積

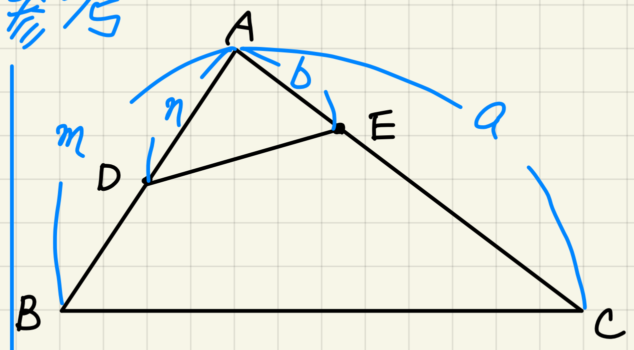
= 10 × ひし形AEGFの面積

よって，

ひし形の面積 $= \dfrac{1}{10} \times$ △ABCの面積

したがって，求める答えは $\dfrac{1}{10}$ 倍

参考



左図において，

$AC : AE = a : b$

$AB : AD = m : n$

とする。

このとき，

△ABCの面積 ： △ADEの面積 $= a \times m : b \times n$

4

(1) 点Bのx座標は2である。

点Aは点Bとy軸について対称なので，

点Aのx座標は -2

(2) 点Cは $y = ax^2$ 上にあり，$x = 2,\ y = -1$ なので，

$-1 = a \times 2^2$

$\therefore 4a = -1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{4}$

(3) 点Aは $y = x^2$ 上にあり，$x = -2$ なので，

$y = (-2)^2$

$= 4 \qquad \therefore A(-2, 4)$

直線ACの式を$y=ax+b$とおくと，1次関数では，傾き＝変化の割合なので，

$$a=\frac{yの増加量}{xの増加量}$$

$$=\frac{-1-4}{2-(-2)}$$ …点A→点Cの増加量

$$=-\frac{5}{4}$$

よって，$y=-\frac{5}{4}x+b$で，A$(-2,4)$を通るので，

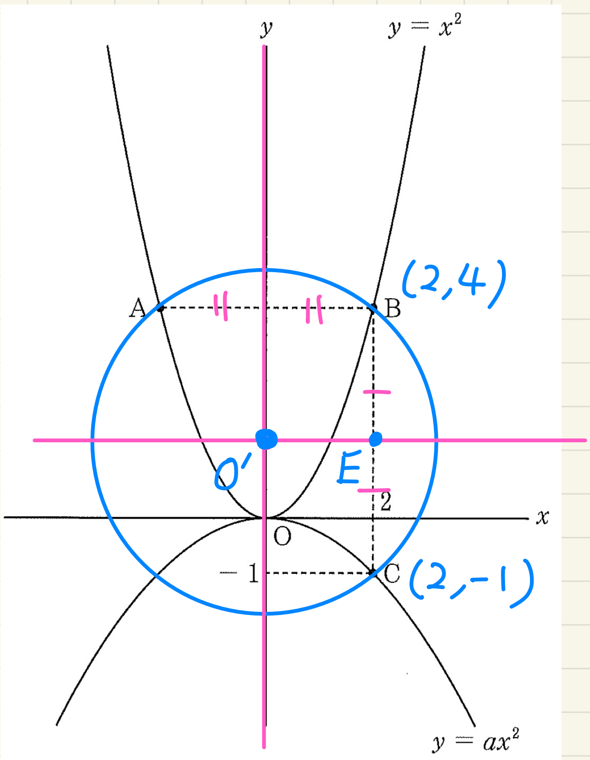
$$4=-\frac{5}{4}\times(-2)+b$$

$$b=4-\frac{5}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

よって，$y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$

(3)
①



A，B，Cを通る円の中心O'は，ABとBCの垂直二等分線の交点である．

左図のように，BCの中点をEとする。

B$(2,4)$，C$(2,-1)$より

$$BC=4-(-1)$$

$$=5\ \mathrm{cm}$$

よって、$BE = \frac{5}{2}$ cm

Eのx座標は2より
$O'E = 2$ cm

したがって、△BO'Eで三平方の定理より

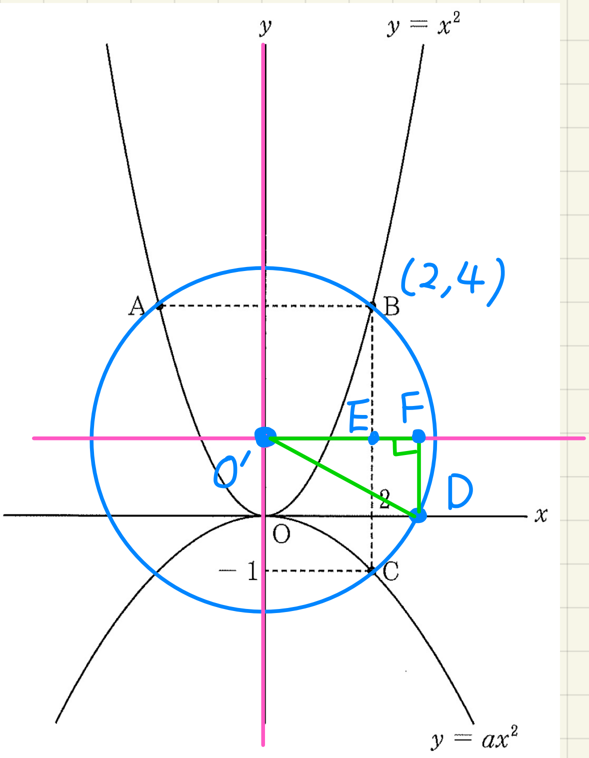
$$O'B = \sqrt{2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{2}$$

O'Bは円O'の半径なので、直径は

$$\frac{\sqrt{41}}{2} \times 2 = \sqrt{41}\ \text{cm}$$

②



左図のような△O'DFを考える。
また、点Dのx座標をtとする。

①から、$BE = \frac{5}{2}$ cmなので、
Eの座標は、
x座標：2
y座標：$4 - \frac{5}{2}$
$= \frac{3}{2}$

$\therefore E\left(2, \frac{3}{2}\right)$

点Fは、$x = t$であり、点Eとy座標が等しいので、
$F\left(t, \frac{3}{2}\right)$

したがって、

$O'F = t$ cm, $FD = \frac{3}{2}$ cm, $O'D = \frac{\sqrt{41}}{2}$ cm

$\triangle O'DF$で三平方の定理より

$$\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 = t^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

式を整理して

$$\frac{41}{4} = t^2 + \frac{9}{4}$$

$$\therefore t^2 = \frac{32}{4}$$

$t > 0$ より

$$t = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

よって、点Dのx座標は $2\sqrt{2}$

5.

(1) 6の約数は、

1, 2, 3, 6

なので、(ii)で箱に入る玉は4個

(2) 操作を2回行うので、さいころを2回投げることとなる。このとき、さいころの目の出方は、全部で

$6 \times 6 = 36$ 通りである。

2回の操作で玉が4個になるのは,

㋐ 1回目の操作で玉を1個, 2回目の操作で玉を3個入れるとき

⇔ 1回目で約数が1個, 2回目で約数が3個の数字がでる.

㋑ 1回目の操作で玉を2個, 2回目の操作で玉を2個入れるとき

⇔ 1回目で約数が2個, 2回目で約数が2個の数字がでる.

㋒ 1回目の操作で玉を3個, 2回目の操作で玉を1個入れるとき

⇔ 1回目で約数が3個, 2回目で約数が1個の数字がでる.

の3パターンがある。

㋐のとき,

1回目で 1 ⇒ 1通り

2回目で 4 ⇒ 1通り

よって, $1 \times 1 =$ 1通り

㋑のとき

1回目で 2, 3, 5 ⇒ 3通り

2回目で 2, 3, 5 ⇒ 3通り

よって, $3 \times 3 =$ 9通り

㋒ のとき，

1回目で $\underline{4}$ ⇒ 1通り

2回目で $\underline{1}$ ⇒ 1通り

よって，$1 \times 1 = \underline{1}$通り

以上より，2回の操作を行ったとき，玉が4個となる場合の数は

$$1 + 9 + 1 = 11\text{通り}$$

したがって，求める確率は $\dfrac{11}{36}$

(3)

① 1，2，3，4，5，6 の約数には必ず1がある。

⇒ 操作を行うたびに，必ず1は1個ずつ追加される。

1が書かれた玉が21個あるので，操作を行った回数は21回。よって，$n = 21$

② $\begin{cases} \text{4の玉は，さいころの目が4のときのみ箱に入れる} \\ \text{6の玉は，さいころの目が6のときのみ箱に入れる.} \end{cases}$

したがって，4と6の玉の個数が等しいことから，4の目と，6の目が出た回数は等しい。

3の目が出た回数を x 回，4の目が出た回数を y 回とすると，5の目が出た回数は x 回，6の目が出た回数は y 回である。

1の目が2回 → 1が2個

2の目が5回 → 1が5個, 2が5個

3の目がx回 → 1がx個, 3がx個

4の目がy回 → 1がy個, 2がy個, 4がy個

5の目がx回 → 1がx個, 5がx個

6の目がy回 → 1がy個, 2がy個, 3がy個, 6がy個

①より, 全部で21回の操作を行ったので.

$$2+5+x+y+x+y=21$$

$$\therefore 2x+2y=14 \quad —— ①$$

また, 1以外の玉の数は. $52-21=31$個なので,

$$\underbrace{5}_{2の目}+\underbrace{x}_{3の目}+\underbrace{y+y}_{4の目}+\underbrace{x}_{5の目}+\underbrace{y+y+y}_{6の目}=31.$$

$$\therefore 2x+5y=26 \quad —— ②$$

① - ② より

$$\begin{array}{rrcl} & 2x+2y & = & 14 \\ -) & 2x+5y & = & 26 \\ \hline & -3y & = & -12 \\ & y & = & 4 \end{array}$$

$y=4$を①に代入して.

$$2x+2\times 4=14.$$

$$2x=6 \quad \Rightarrow x=3$$

よって, 5の目が出た回数は 3回

③ 52個の玉のうち、5の玉だけを取り除いたので、

1が21個

2が $\underbrace{5}_{2の目} + \underbrace{4}_{4の目} + \underbrace{4}_{6の目} = 13$個

3が $\underbrace{3}_{3の目} + \underbrace{4}_{6の目} = 7$個

4が4個

6が4個

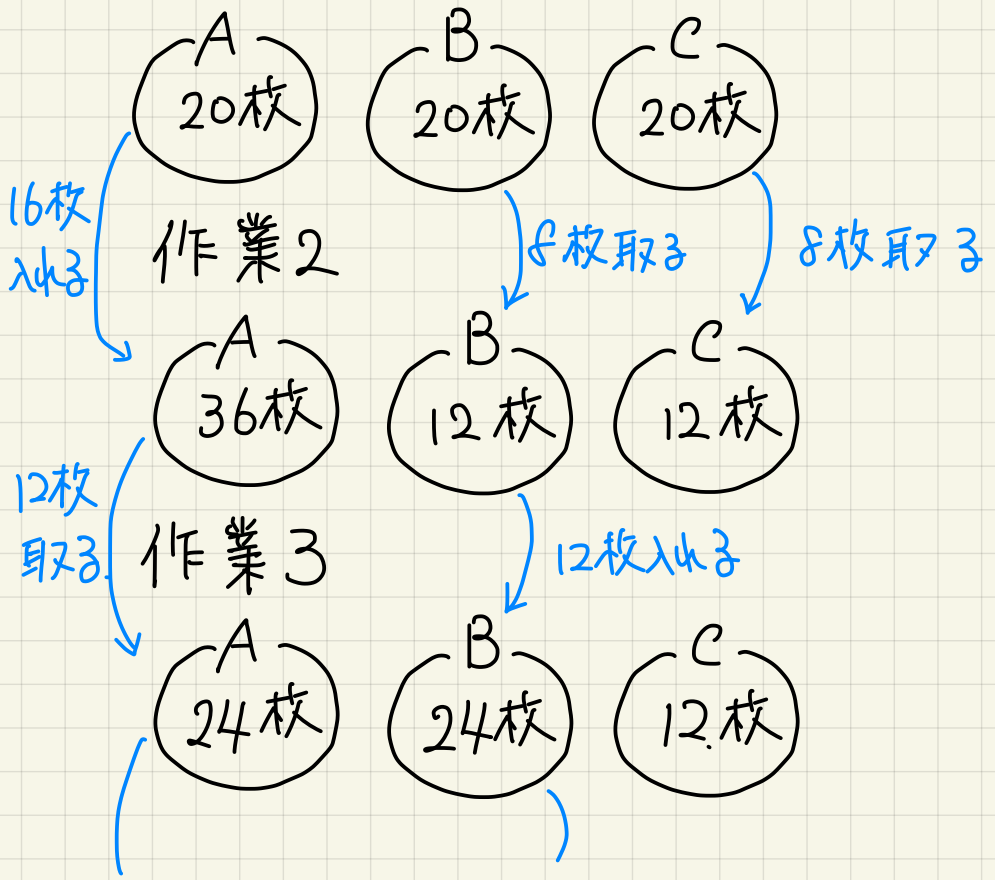
合計で $21 + 13 + 7 + 4 + 4 = 49$個ある。

このうち、6の約数は4以外なので、6の約数となる玉は、$49 - 4 = 45$個ある。

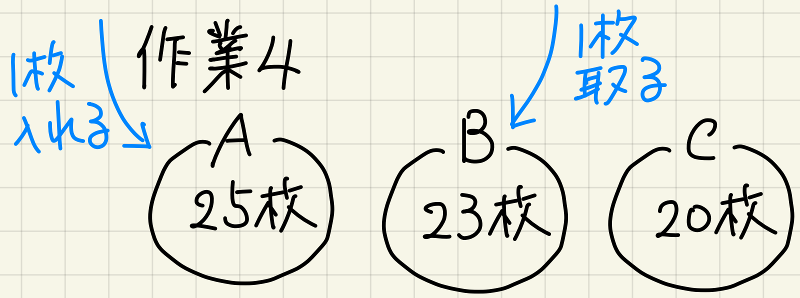
よって、求める確率は $\dfrac{45}{49}$

6.

(1) 作業1



作業4

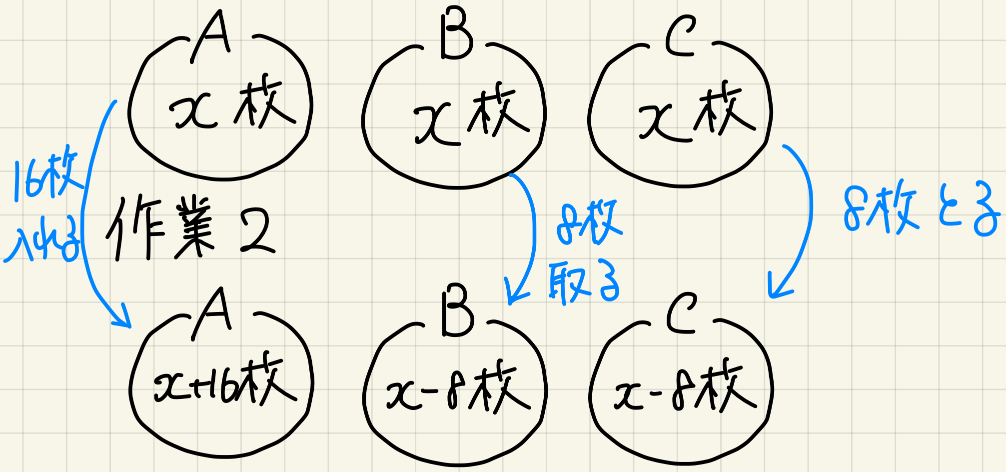


よって，箱Aには25枚ある

(2)

・作業4で箱Bから1枚コインを取り出し，箱Aに1枚入れる。
作業4の後に箱Aが25枚のとき，作業4を行う前(作業3の後)には，箱Aにコインが24枚ある。
(i)

・作業1



作業2の後，箱Aには，$x+16$枚，箱Cには，
(ii)

$x-8$枚ある。
(iii)

作業2

A	B	C
$x+16$枚	$x-8$枚	$x-8$枚
$x-8$枚取る	$x-8$枚入れる	

作業3

A	B	C
24枚	$2x-16$枚	$x+8$枚

作業3で，xに関係なく，箱Aに24枚のコインがある．

(3)

① 作業2で箱B，箱Cから取り出すコインをy枚とする。

作業1

A	B	C
x枚	x枚	x枚
$2y$枚入れる	y枚取る	y枚取る

作業2

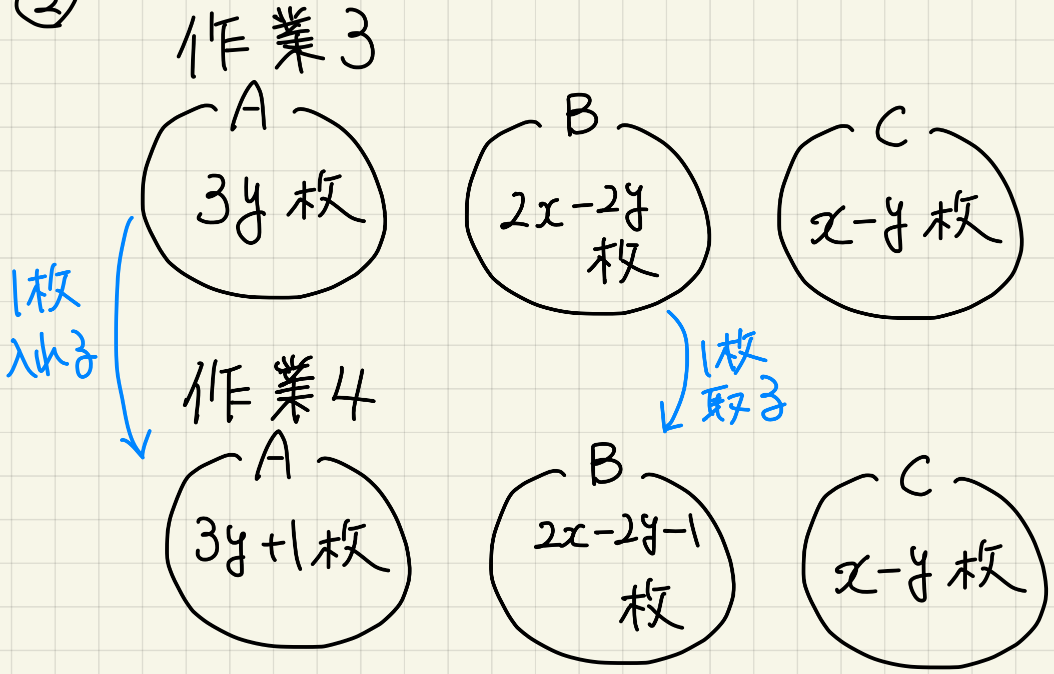
A	B	C
$x+2y$枚	$x-y$枚	$x-y$枚
$x-y$枚取る	$x-y$枚入れる	

作業3

A	B	C
$3y$枚	$2x-2y$枚	$x-y$枚

よって，作業3のあと，箱Aには3の倍数のコインが入っている。∴ $n=3$

②



作業3の後のコインは，作業4の後のコインより1枚少ない。また，作業3の後にコインの枚数は3の倍数となる。

ア：作業3の後は34枚なので誤り
イ：作業3の後は44枚なので誤り
ウ：作業3の後は54枚なので正しい

このとき，$3y=54$ より $y=18$
したがって，作業2で箱B，箱Cから18枚ずつコインを取り出せば良い