2023年度　京都府

数学

Km Km

1.

(1) 与式 $= -36 + 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

$= -36 - 6$

$= -42$

(2) 与式 $= \dfrac{4ab^2 \times 3ab}{6a^2b}$

$= 2b^2$

(3) 与式 $= 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}$

$= 4\sqrt{3} - 6\sqrt{12}$

$= 4\sqrt{3} - 12\sqrt{3}$

$= -8\sqrt{3}$

※ $6\sqrt{12} = 6 \times \sqrt{12}$

$= 6 \times 2\sqrt{3}$

$= 12\sqrt{3}$

(4) $\begin{cases} 4x + 3y = -7 & \text{—— ①} \\ 3x + 4y = -14 & \text{—— ②} \end{cases}$

① × 3 − ② × 4 より

$$\begin{array}{rl} 12x + 9y &= -21 \\ -)\ 12x + 16y &= -56 \\ \hline -7y &= 35 \\ y &= -5 \end{array}$$

$y = -5$ を ① に代入して

$4x + 3 \times (-5) = -7$

$4x = -7 + 15$

$= 8$

∴ $x = 2$

よって

$x = 2,\ y = -5$

(5) $xy^2 - x^2y = xy(y-x)$

$x = \sqrt{5}+3$, $y = \sqrt{5}-3$ を代入して

$xy(y-x) = \underbrace{(\sqrt{5}+3)}_{x}\underbrace{(\sqrt{5}-3)}_{y}\{\underbrace{(\sqrt{5}-3)}_{y}-\underbrace{(\sqrt{5}+3)}_{x}\}$

$= (5-9)(\sqrt{5}-3-\sqrt{5}-3)$

$= -4 \times (-6)$

$= 24$

(6) 16の約数は、1, 2, 4, 8, 16 なので、

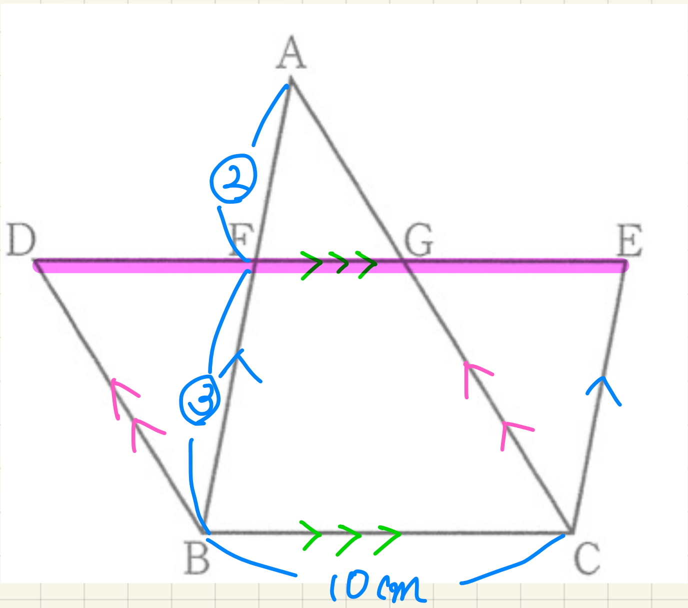
$y = \dfrac{16}{x}$ に $x = 1, 2, 4, 8, 16$ を代入すると、

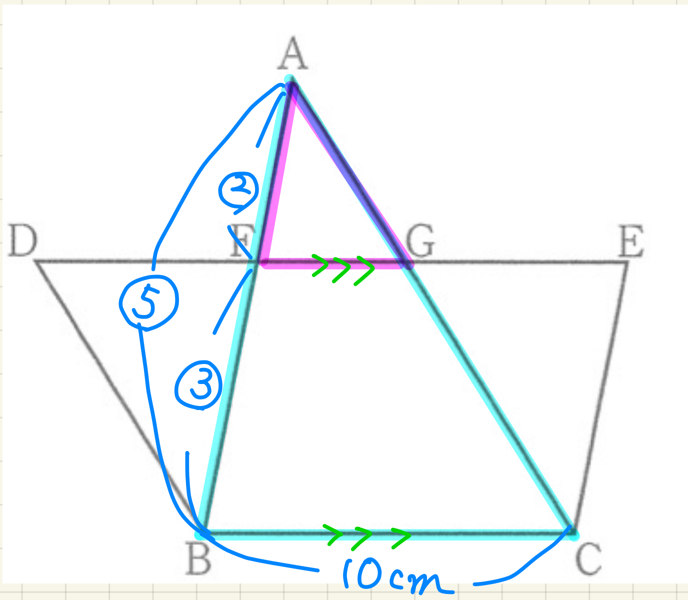
yも整数となる。また、これらの数の負の数

$(-1, -2, -4, -8, -16)$ も yが整数となる。

したがって、10個

(7)





△AFGと△ABCにおいて，
FG∥BCより同位角が等しいので，

$\angle AFG = \angle ABC$ —— ①

$\angle AGF = \angle ACB$ —— ②

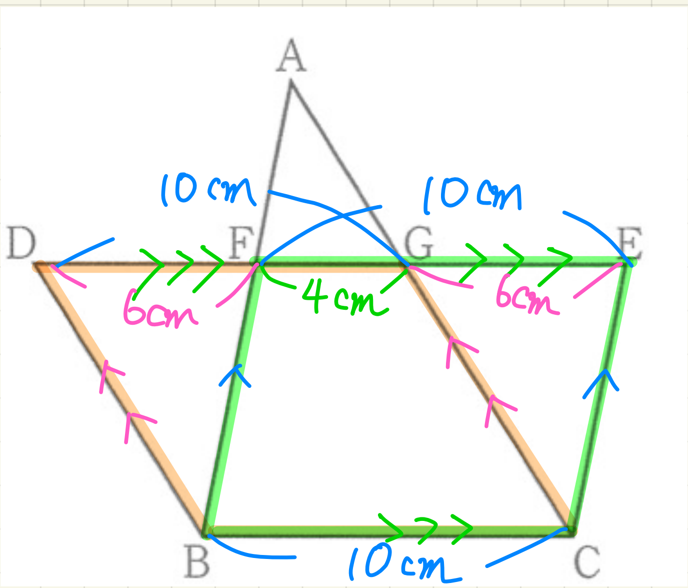
①，②より2組の角がそれぞれ等しいので，

△AFG ∽ △ABC

対応する辺の比は等しいので，

$\underbrace{AF}_{②} : \underbrace{AB}_{⑤} = FG : \underbrace{BC}_{10cm}$

$\therefore 5FG = 20 \Rightarrow FG = 4$ cm



四角形DBCG，FBCEにおいて，それぞれの四角形は向かいあう辺が平行なので，平行四辺形である。

よって，

$DG = BC = 10$ cm

$FE = BC = 10$ cm

よって，

$DF = DG - FG = 10 - 4 = 6$ cm

$GE = FE - FG = 10 - 4 = 6$ cm

以上より

$DE = 6 + 4 + 6$

$= 16$ cm

(8) 3年生のデータを小さい順に並べる.

下位データ　上位データ　最大値

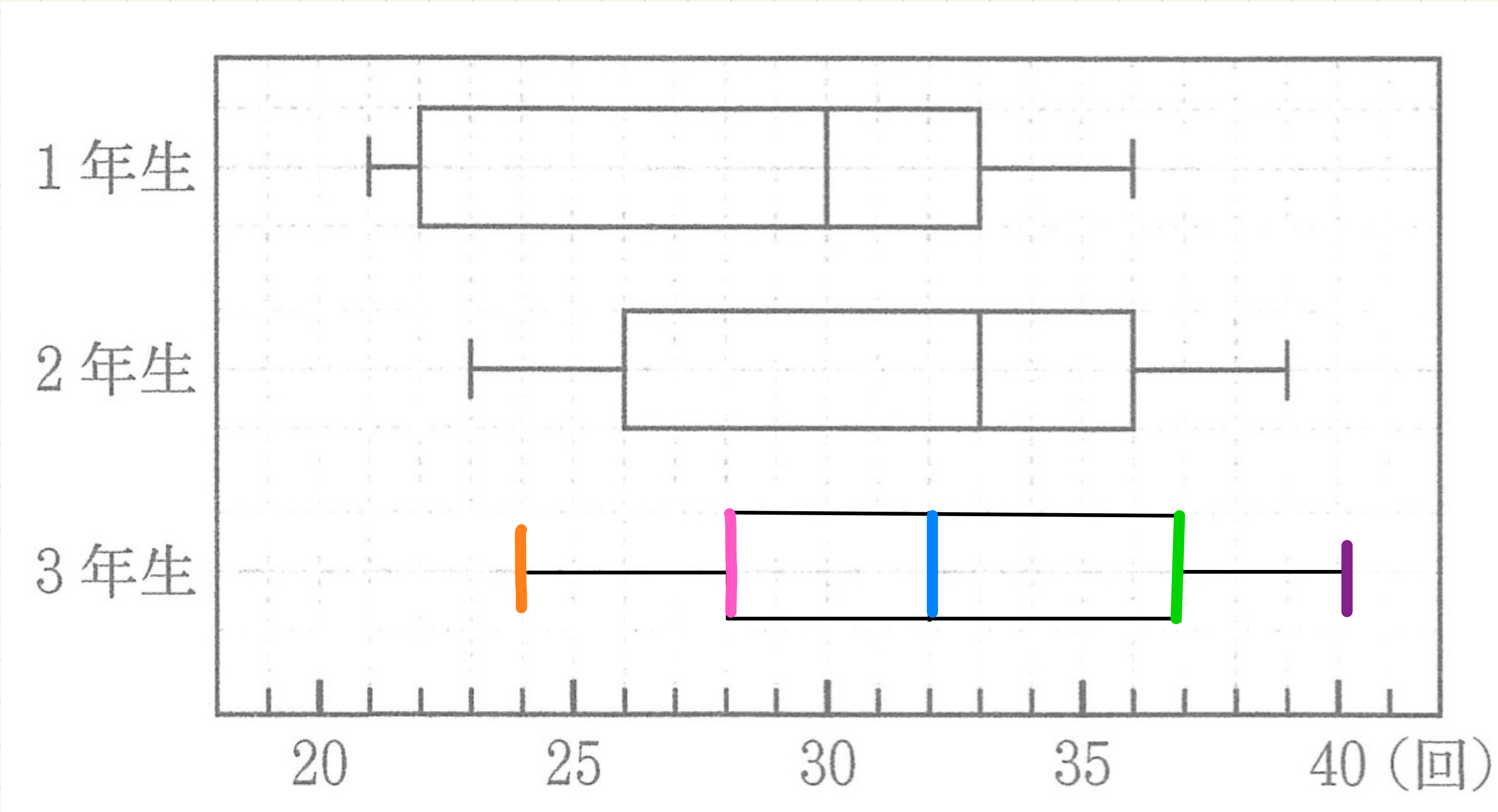
24, 28, 28, 31, 33, 35, 39, 40

最小値

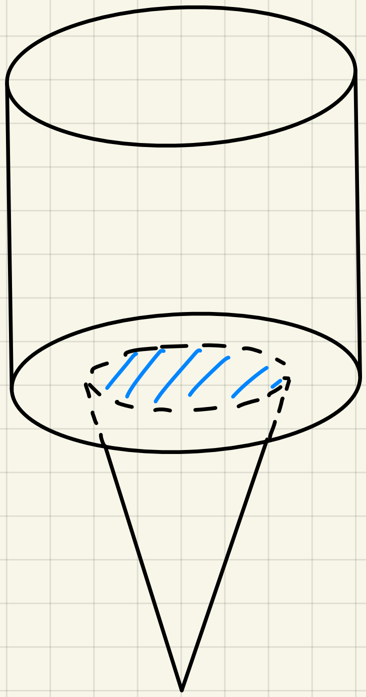
第3四分位数 $= \frac{35+39}{2} = 37$

中央値 $= \frac{31+33}{2} = 32$

第1四分位数 $= \frac{28+28}{2} = 28$



2.



(1)

円柱の体積

$= 5 \times 5 \times \pi \times 3 = 75\pi$

円すいの体積

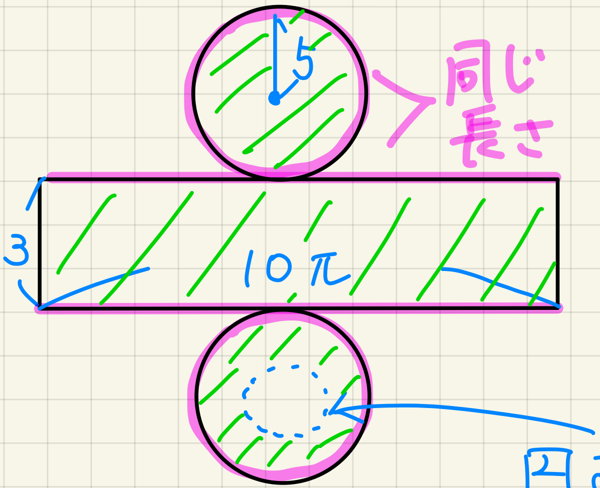
$= 4 \times 4 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3} = 16\pi$

よって、求める体積は

$75\pi + 16\pi = 91\pi\ cm^3$

(2) 円柱の底面と円すいの底面の重なっている部分は、立体Xの表面積に含まれない。

円柱の表面積



側面の一辺の長さは、底面の円周の長さと等しく、もう一辺の長さは、円柱の高さである。

円周の長さ $= \underbrace{5 \times 2}_{\text{直径}} \times \pi = 10\pi$

//// ： 表面積

よって、円柱の表面積（円すいと重なっている部分を除く）は、

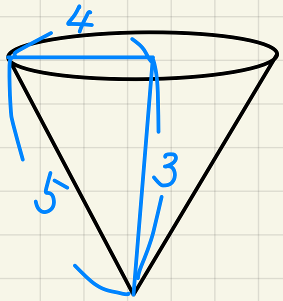
$$\underbrace{5 \times 5 \times \pi}_{\text{円柱の上面}} + \underbrace{5 \times 5 \times \pi - 4 \times 4 \times \pi}_{\text{円柱の下面から円すいの底面を引く}} + \underbrace{3 \times 10\pi}_{\text{側面}}$$

$= 25\pi + 25\pi - 16\pi + 30\pi$

$= 64\pi \ cm^2$.

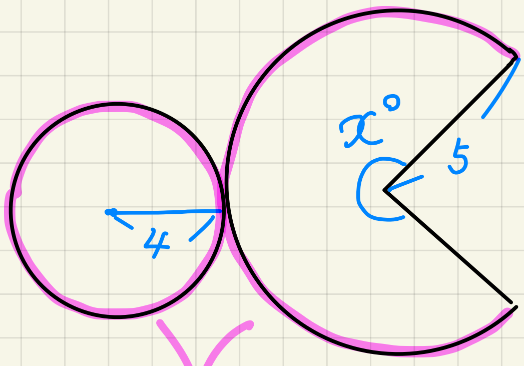
円すいの表面積

円すいの底面は，円柱の下面と重なっているため，側面を求めれば良い。



円すいの母線は，三平方の定理より

$\sqrt{4^2+3^2} = 5cm$



円すいの底面の円周と，側面のおうぎ形の弧の長さは等しいので，おうぎ形の中心角を$x°$とすると，

$$4 \times 2 \times \pi = 5 \times 2 \times \pi \times \frac{x}{360}$$

$$\therefore 8\pi = 10\pi \times \frac{x}{360} \Rightarrow \frac{x}{360} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

よって，側面の面積は

$$5 \times 5 \times \pi \times \underbrace{\boxed{\frac{x}{360}}}_{=\frac{4}{5}} = 5 \times 5 \times \pi \times \frac{4}{5} = 20\pi \ cm^2.$$

以上より，立体Xの表面積は

$$64\pi + 20\pi = 84\pi \ cm^2$$

3.

(1)

袋Xから1枚のカードを取り出す方法は3通り
袋Yから1枚のカードを取り出す方法は3通り
よって、袋X、袋Yからそれぞれ1枚カードを取り出す方法は

$$3 \times 3 = 9 \text{通り}$$

真人さんが勝つためには、

袋Xのカード ＞ 袋Yのカード ―― ①

となれば良い。

袋Xのカード＝1のとき、
袋Yのカードは、3, 6, 11なので、①を満たさない。

袋Xのカード＝9のとき、
袋Yのカードから、3, 6を取り出せば良いので2通り

袋Xのカード＝12のとき、
袋Yのカードから、3, 6, 11を取り出せば良いので、3通り。

よって、①を満たすカードの取り出し方は、

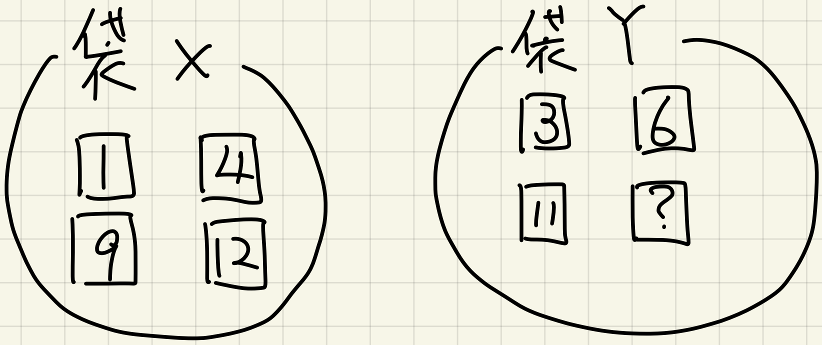
$$2 + 3 = 5 \text{通り}$$

したがって、求める確率は

$$\frac{5}{9}$$

(2)

以下，袋Xのカードを X，袋Yのカードを Y と表す。



$\boxed{?} = 2, 5, 7, 8, 10, 13$

① $X = 1$ のとき，

Y は全て1より大きいので

真人さんの勝ち：0 通り

有里さんの勝ち：4 通り

② $X = 4$ のとき，

(i) $\boxed{?} = 2$ のとき

真人さんの勝ち：2 通り

$(X, Y) = (4, 2), (4, 3)$

有里さんの勝ち：2 通り

$(X, Y) = (4, 6), (4, 11)$

(ii) $\boxed{?} = 5, 7, 8, 10, 13$ のとき

真人さんの勝ち：1 通り

$(X, Y) = (4, 3)$

有里さんの勝ち：3 通り

$(X, Y) = (4, 6), (4, 11), (4, \boxed{?})$

③ $X = 9$ のとき.

(i) $\boxed{?} = 2, 5, 7, 8$ のとき.

真人さんの勝ち：3通り

$(X, Y) = (9, 3), (9, 6), (9, \boxed{?})$

有里さんの勝ち：1通り

$(X, Y) = (9, 11)$

(ii) $\boxed{?} = 10, 13$ のとき

真人さんの勝ち：2通り

$(X, Y) = (9, 3), (9, 6)$

有里さんの勝ち：2通り

$(X, Y) = (9, 11), (9, \boxed{?})$

④ $X = 12$ のとき.

(i) $\boxed{?} = 2, 5, 7, 8, 10$ のとき

真人さんの勝ち：4通り

$(X, Y) = (12, 3), (12, 6), (12, 11), (12, \boxed{?})$

有里さんの勝ち：0通り

(ii) $\boxed{?} = 13$ のとき

真人さんの勝ち：3通り

$(X, Y) = (12, 3), (12, 6), (12, 11)$

有里さんの勝ち：1通り

$(X, Y) = (12, 13)$

2人の勝つ確率が等しい
⇒2人の勝つ場合の数が等しい.
以上を整理すると.

$\boxed{?}=2$ のとき,

真人さんの勝ち：①0＋②2＋③3＋④4＝9通り
有里さんの勝ち：4＋2＋1＋0＝7通り
よって不適

$\boxed{?}=5$ のとき

真人さんの勝ち：①0＋②1＋③3＋④4＝8通り
有里さんの勝ち：4＋3＋1＋0＝8通り
よって適する.

$\boxed{?}=7$ のとき.

真人さんの勝ち：①0＋②1＋③3＋④4＝8通り
有里さんの勝ち：4＋3＋1＋0＝8通り
よって適する

$\boxed{?}=8$ のとき.

真人さんの勝ち：①0＋②1＋③3＋④4＝8通り
有里さんの勝ち：4＋3＋1＋0＝8通り
よって適する

$\boxed{?}=10$ のとき

真人さんの勝ち：①0＋②1＋③2＋④4＝7通り
有里さんの勝ち：4＋3＋2＋0＝9通り
よって不適

$\boxed{?} = 13$ のとき　①　②　③　④

真人さんの勝ち：$0+1+2+3=6$ 通り

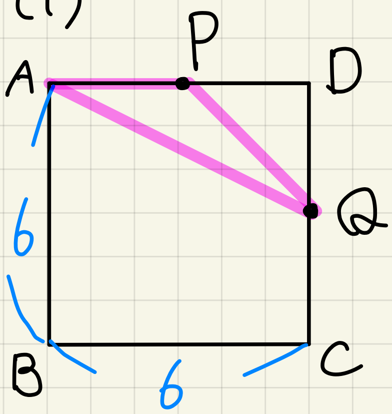
有里さんの勝ち：$4+3+2+1=10$ 通り

よって不適.

以上より答えは，5，7，8　(イ)，(ウ)，(エ)

4.

(1)



$x=1$ のとき，AP $=1$cm，DQ $=1$cm

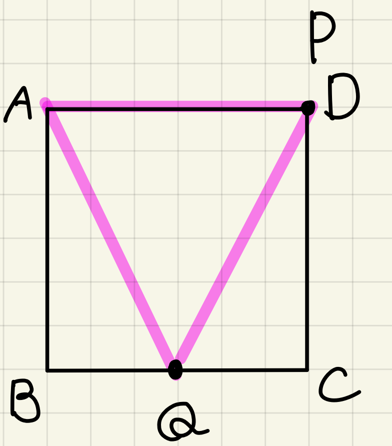
よって，$y=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

① $0\leqq x\leqq 6$ のとき，

点Pは辺AD上，点Qは辺DC上にいる。AD $=x$，DQ $=x$ より

$$y=\frac{1}{2}\times x\times x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\quad(2乗に比例)$$

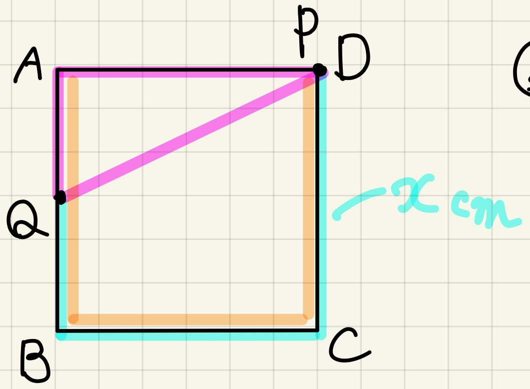


② $6\leqq x\leqq 12$ のとき．

点Pは点Dに，点Qは辺BC上にいる。AP $=6$cm，PC $=6$cm より

$$y=\frac{1}{2}\times6\times6$$

$$=18\quad(一定)$$



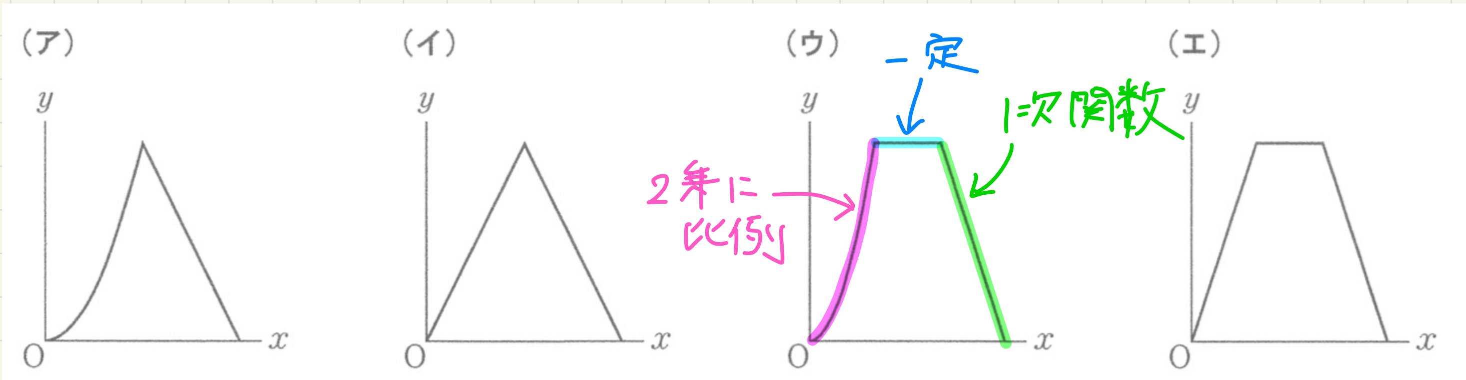
③ $12 \leqq x \leqq 18$ のとき.
点Pは点Dに, 点Qは辺BA上にいる.

$AP = 6cm$

$$AQ = \underbrace{AB + BC + CD}_{} - \underline{x}$$
$$= 6 + 6 + 6 - x$$
$$= 18 - x$$

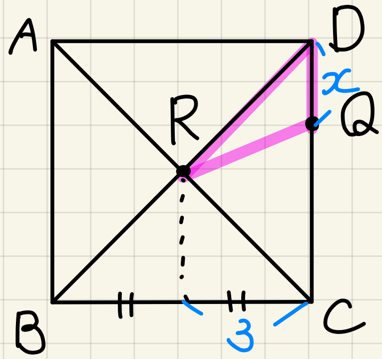
よって,

$$y = \frac{1}{2} \times 6 \times (18 - x)$$
$$= -3x + 54$$ (1次関数)



よって, 答えは(ウ)

(2)



① $0 \leqq x \leqq 6$ のとき

$\triangle RQD = \frac{1}{2} \times x \times 3 = \frac{3}{2}x$

$\triangle AQP = \frac{1}{2}x^2$ ((1)①より)

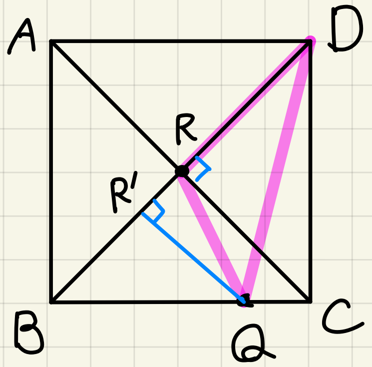
$\therefore \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x > 0$ より $x = 3$

② $6 \leqq x \leqq 12$ のとき



底辺をRDとする。点QからBDに垂線を下ろした足をR'とする。

$\triangle RQD = \frac{1}{2} \times RD \times R'Q$

$6 \leqq x \leqq 12$ では、x が増加すると、RD は一定であり、R'Q は短くなる。

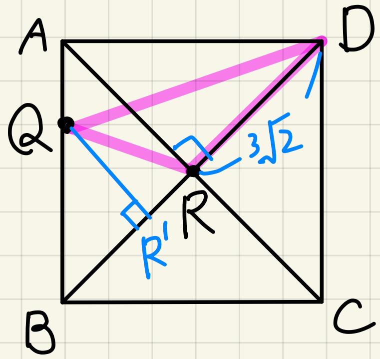
$\Rightarrow$ x が増加すると、$\triangle RQD$ の面積は小さくなる。

$6 \leqq x \leqq 12$ で $\triangle RQD$ の面積が最大となるのは、$x = 6$ のときであり、そのときの面積は、

$\triangle RQD = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$

一方、$\triangle AQP$ は (1)② より 18 (一定) なので、

$6 \leqq x \leqq 12$ では、$\triangle RQD = \triangle APQ$ とならない。



③ $12 \leqq x \leqq 18$ のとき

$\triangle BR'Q$ と $\triangle BRA$ において,

$\angle QR'B = \angle ARB = 90°$ —— ㋐

共通な角は等しいから

$\angle QBR = \angle ABR$ —— ㋑

㋐, ㋑より2組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle BR'Q \backsim \triangle BRA$

(1)より $AQ = 18 - x$ より

$QB = 6 - (18 - x)$

$= x - 12$

また, $\triangle BRA$ は $45° - 45° - 90°$ の直角三角形より

$AR : BR : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$

$\Rightarrow AR : \underbrace{AB}_{6} = 1 : \sqrt{2}$

$\dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}AR = 6 \quad \Rightarrow AR = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$\underbrace{BQ}_{x-12} : \underbrace{BA}_{6} = R'Q : \underbrace{RA}_{3\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 6R'Q = 3\sqrt{2}(x - 12)$

$\therefore R'Q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - 12)$

よって, $\triangle RQD$ の面積は.

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x-12)$$
$$= \frac{3}{2}(x-12)$$

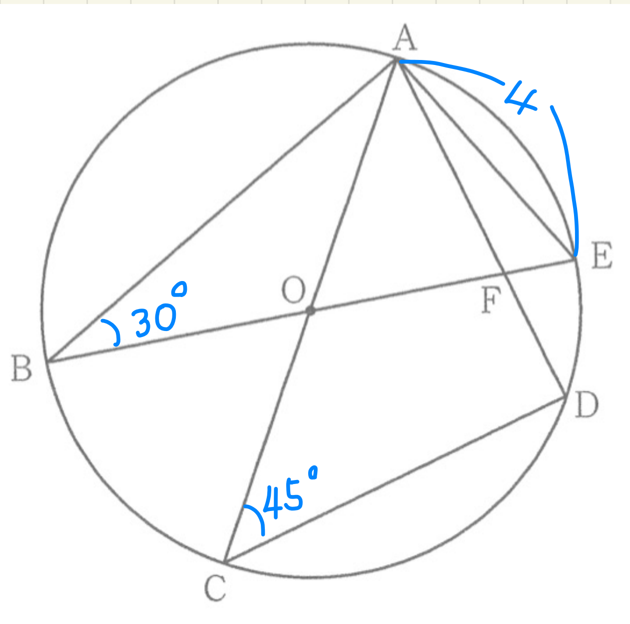
$\triangle AQP = -3x + 54$ ((い)③より)

$$\therefore \frac{3}{2}(x-12) = -3x + 54$$
$$3x - 36 = -6x + 108$$
$$9x = 144$$
$$x = 16$$

よって、$x = 3, 16$

5.

(1)



$\angle BAE$ は直径に対する円周角なので $90°$

よって、$\triangle ABE$ は $30°-60°-90°$ の直角三角形である

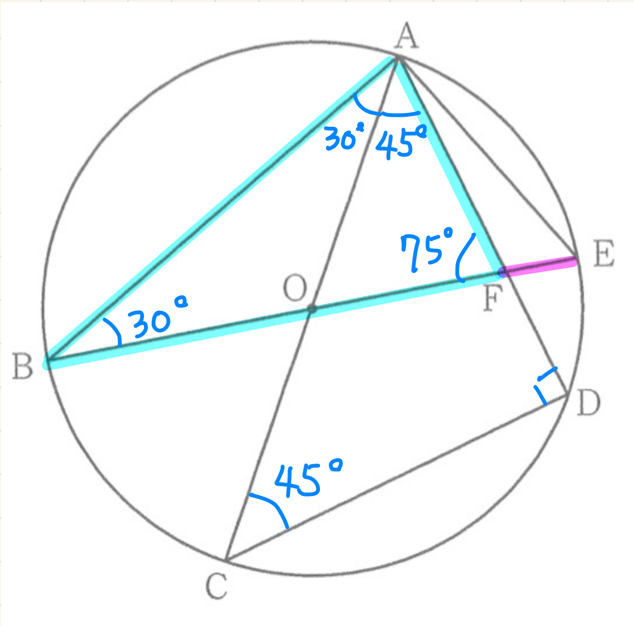
$\therefore AE : BE : AB = 1 : 2 : \sqrt{3}$ ――☆

$\Rightarrow \underbrace{AE}_{4} : BE = 1 : 2$

よって

$BE = 8\text{cm}$

(2)



(1)☆より

$AE : AB = 1 : \sqrt{3}$

$\underset{4}{AE}$

$\therefore AB = 4\sqrt{3}\ cm$

ここで，△OABはOA=OBの二等辺三角形なので，

$\angle OAB = \angle OBA = 30°$

また，△DACにおいて，

$\angle DAC = 180° - 90° - 45°$

$= 45°$

よって，$\angle BAF = 30° + 45° = 75°$

△BAFにおいて，

$\angle BFA = 180° - 30° - 75°$

$= 75°$

よって，三角形の2つの角が等しいから△BAFは，BA=BFの二等辺三角形．したがって，

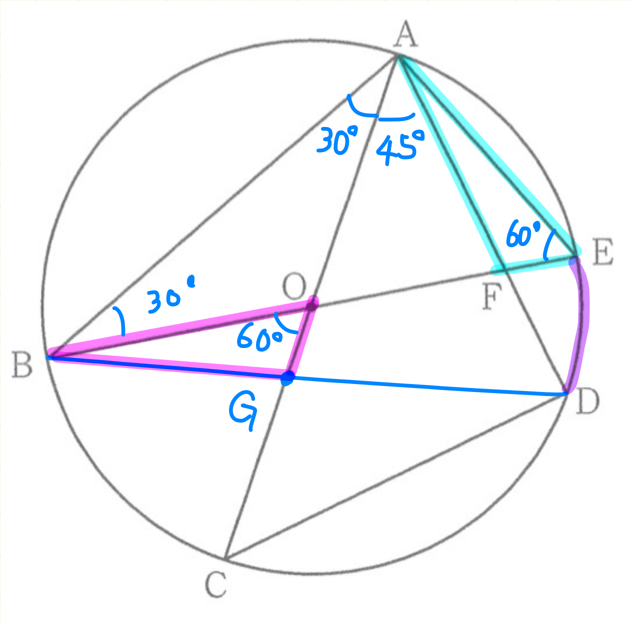
$BF = BA = 4\sqrt{3}$

以上より

$EF = BE - BF$

$= 8 - 4\sqrt{3}\ cm$

(3)



△OBG と △EAF において,

OB = EA = 4cm ── ①

$\overset{\frown}{ED}$ に対する円周角は等しいので,

∠OBG = ∠EAF ── ②

△ABE において,

∠BEA = 180° − 90° − 30°

= 60° ── ③

また, △AOE において,

AO = OE = EA = 4cm

より △AOE は正三角形。ゆえに.

∠AOE = 60°

対頂角は等しいから

∠GOB = ∠AOE

= 60° ── ④

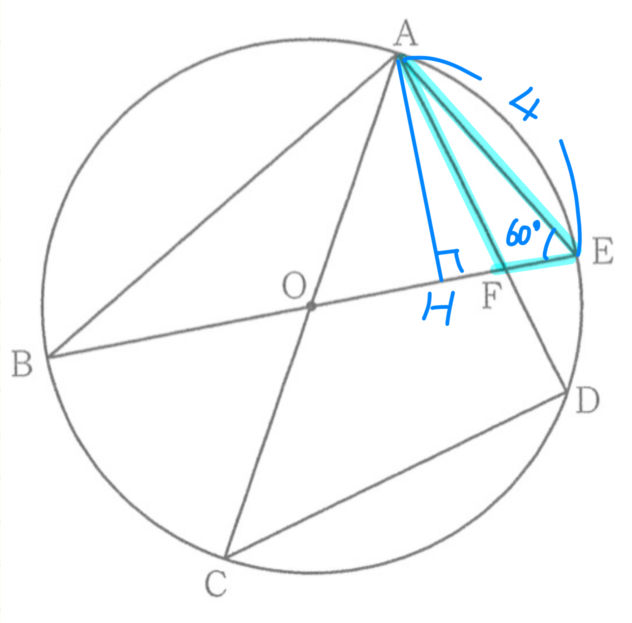
③, ④ より

∠FEA = ∠GOB ── ⑤

①, ②, ⑤ より 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△OBG ≡ △EAF

よって, △OBG と △EAF の面積は等しい。



点AからBEに下ろした垂線の足をHとする.

△AHEは.30°-60°-90°の直角三角形なので,

HE : AE : AH = 1 : 2 : $\sqrt{3}$

⇒ $\underbrace{AE}_{4}$: AH = 2 : $\sqrt{3}$

よって,

$2AH = 4\sqrt{3} \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$

(2) より $EF = 8 - 4\sqrt{3}$ なので, △AFEの面積は.

$$\frac{1}{2} \times (8-4\sqrt{3}) \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(8-4\sqrt{3})$$

$$= 8\sqrt{3} - 12$$

したがって, △OBGの面積は $8\sqrt{3} - 12$ cm²

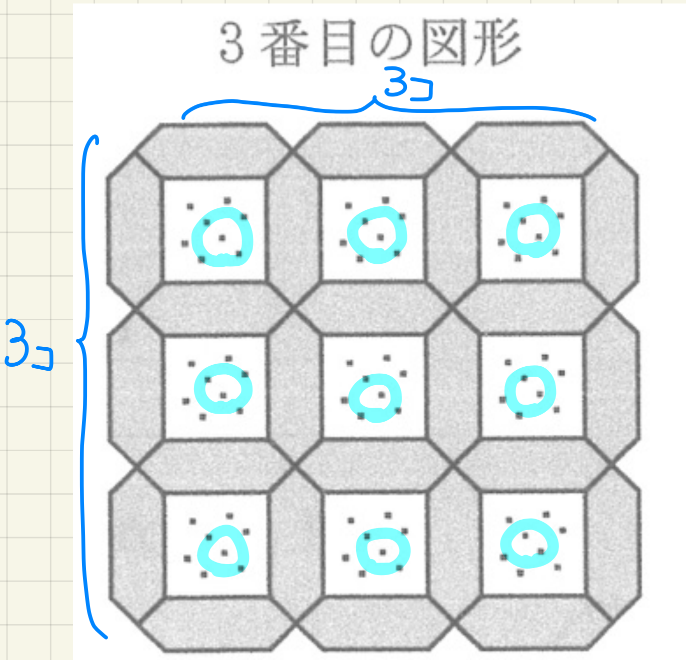
6.

(1) n番目の図形において, タイルAは縦n枚横n枚使用するので,

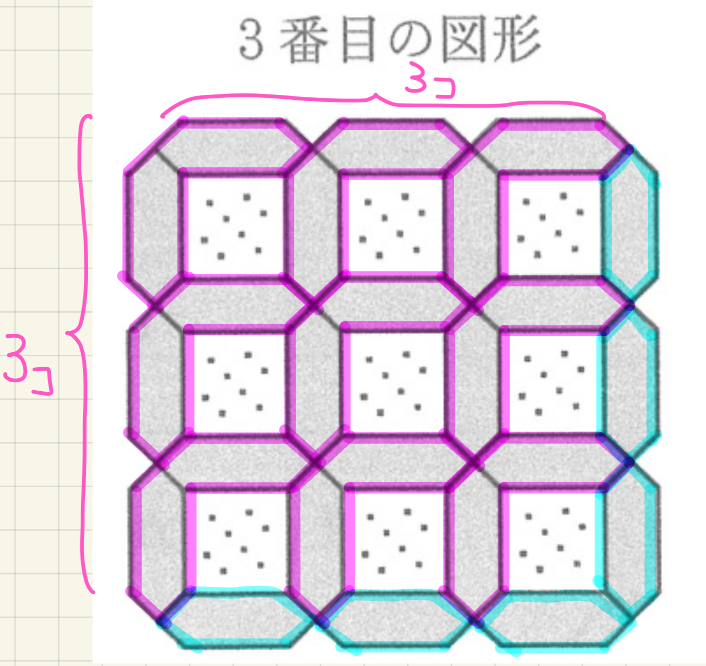
総数はn^2枚

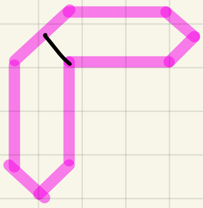
よって, 5番目の図形のタイルAは.

$5^2 = 25$枚



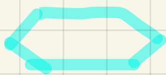
(2) n番目の図形において、タイルBを以下のように分ける。





…この形の組み合わせが $n\times n$ 個

1つの組にタイルBを2枚使っているので、総数は $2n^2$ 個



… $n+n$ 個

よって、n番目の図形において、タイルBの使用枚数は

$$2n^2+2n = 2n(n+1) \text{ 個}$$

したがって、12番目のタイルBの使用枚数は

$$2\times 12\times(12+1) = 24\times 13$$
$$= 312 \text{ 枚}$$

(3) タイルAよりタイルBの方が使用枚数が多いことに注意して、

$$\underbrace{2n^2+2n}_{\text{タイルB}} - \underbrace{n^2}_{\text{タイルA}} = 360$$

$$n^2+2n-360=0$$
$$(n-18)(n+20)=0$$

$n>0$ より $n=18$