2023年度　三重県

数学

KmKm

$\boxed{1}$

(1) 与式 $= 4 + 3$

$= 7$

(2) 与式 $= 12x - 30y$

(3) 与式 $= \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5}$

※ $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5}$

$= \sqrt{5}$

(4) 与式 $= (x-1)(x-4)$

(5) 解の公式より

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

(6) 40を素因数分解すると

$40 = 2^3 \times 5$

また、$\sqrt{40n}$ が整数となるには、

$40n = \bigcirc^2$

となれば良い。したがって、

$40n = 2^3 \times 5 \times n = \bigcirc^2$

である。

$n=2\times5$ のとき,

$$40n = 2^3\times5\times2\times5$$
$$= 2^4\times5^2$$
$$= (2^2\times5)^2$$

$a^4\times b^2=(a^2\times b)^2$

$\therefore\ 40n=20^2$ なので, $\sqrt{40n}=20$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{40n}}{3}=\dfrac{20}{3}$ であり, 整数でないため不適

$n=2\times3^2\times5$ のとき

$$40n = 2^3\times5\times2\times3^2\times5$$
$$= 2^4\times3^2\times5^2$$
$$= (2^2\times3\times5)^2$$

$\therefore\ 40n=60^2$ なので $\sqrt{40n}=60$

$\therefore\ \dfrac{60}{3}=20$ であり, 整数なので適する。

よって, $n=2\times3^2\times5=90$

〈参考〉

$$40n = 2^3\times5\times n$$
$$= 2^3\times3^0\times5^1\times n$$

注 $x^0=1$

$\sqrt{40n}$ が整数となるのは, 指数が偶数となれば良い。⇒ $(\quad)^2$ と表せるため.

$2^{3} \rightarrow$ 4, 6, 8, … 3より大きい偶数

$3^{0} \rightarrow$ 2, 4, 6, … 0より大きい偶数

$5^{1} \rightarrow$ 2, 4, 6, … 1より大きい偶数.

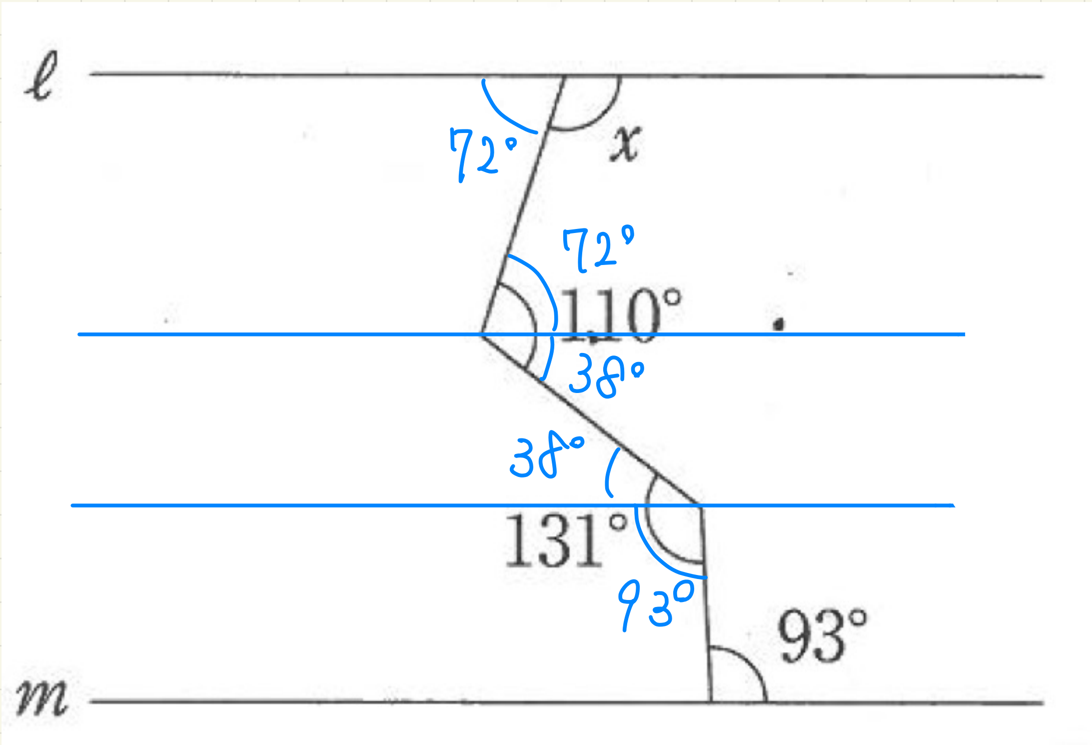
(7) y は x に比例するので、$y=ax$ とおく。
$x=10$ のとき $y=-2$ なので、

$$-2=10a \Rightarrow a=-\frac{1}{5}$$

よって、$y=-\frac{1}{5}x$。$y=\frac{2}{3}$ のとき、x の値は

$$\frac{2}{3}=-\frac{1}{5}x \Rightarrow x=-\frac{10}{3}$$

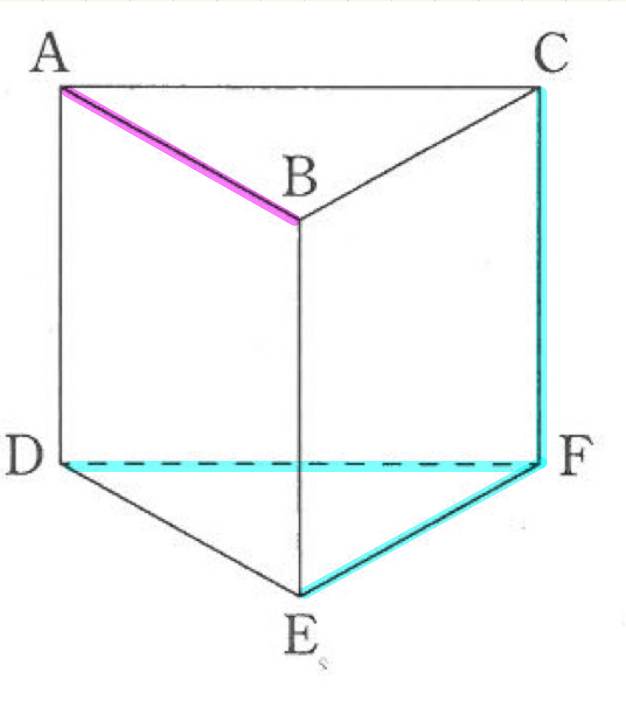
(8)



上図のように、ℓ と m に平行な補助線を引く。
平行線の錯角は等しいことを利用し、各角度を求める。

$$\angle x = 180° - 72°$$
$$= 108°$$

(9)



ねじれの位置
- 交わっていない
- 平行でない。

よって、辺ABとねじれの位置にある辺は、

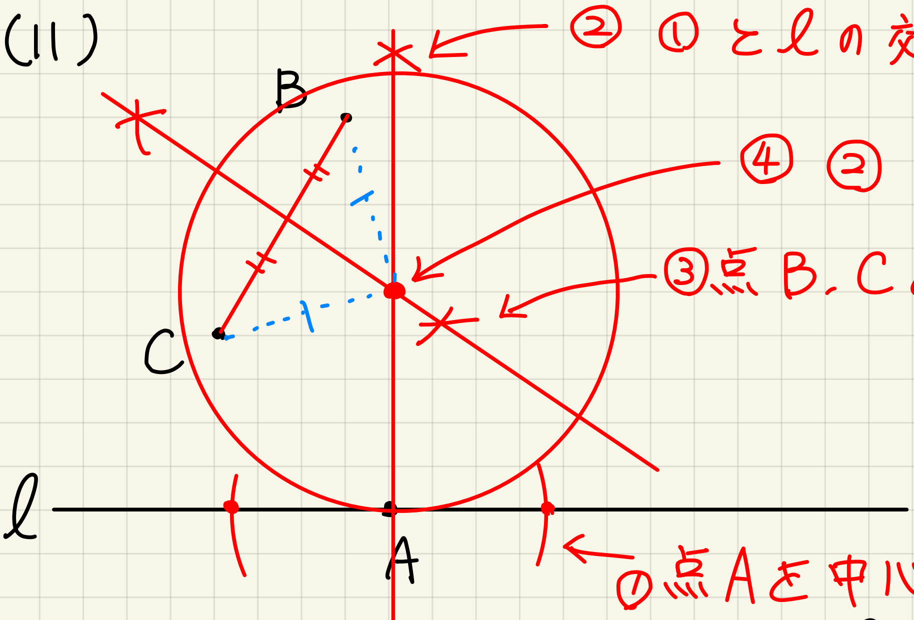
辺CF、辺EF、辺FD
オ　キ　ク

(10) 最頻値：もっとも度数が大きい階級値
階級値：その階級の平均値

もっとも度数が大きい階級は、4〜6秒
よって、そのときの階級値は、

$$\frac{4+6}{2} = 5\text{秒}$$

(11)



点Aを通りℓに垂線な線 ⇒ 接線は90°
線分BCの二等分線 ⇒ 二等分線上は距離が等しい

2

(1)

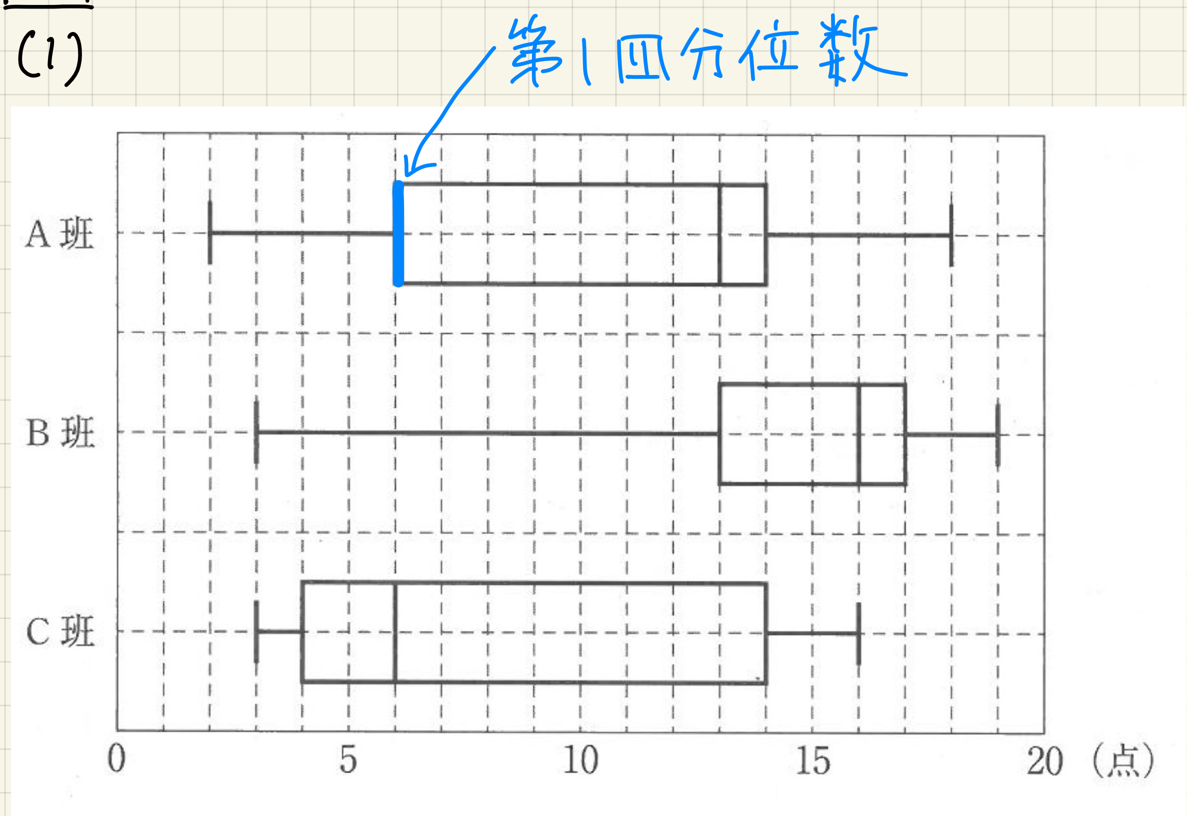


図1よりA組の第1四分位数は6点

(2) 図2より, m, n を除いたデータを小さい順に並べると,

12, 14, 15, 17, 17, 19

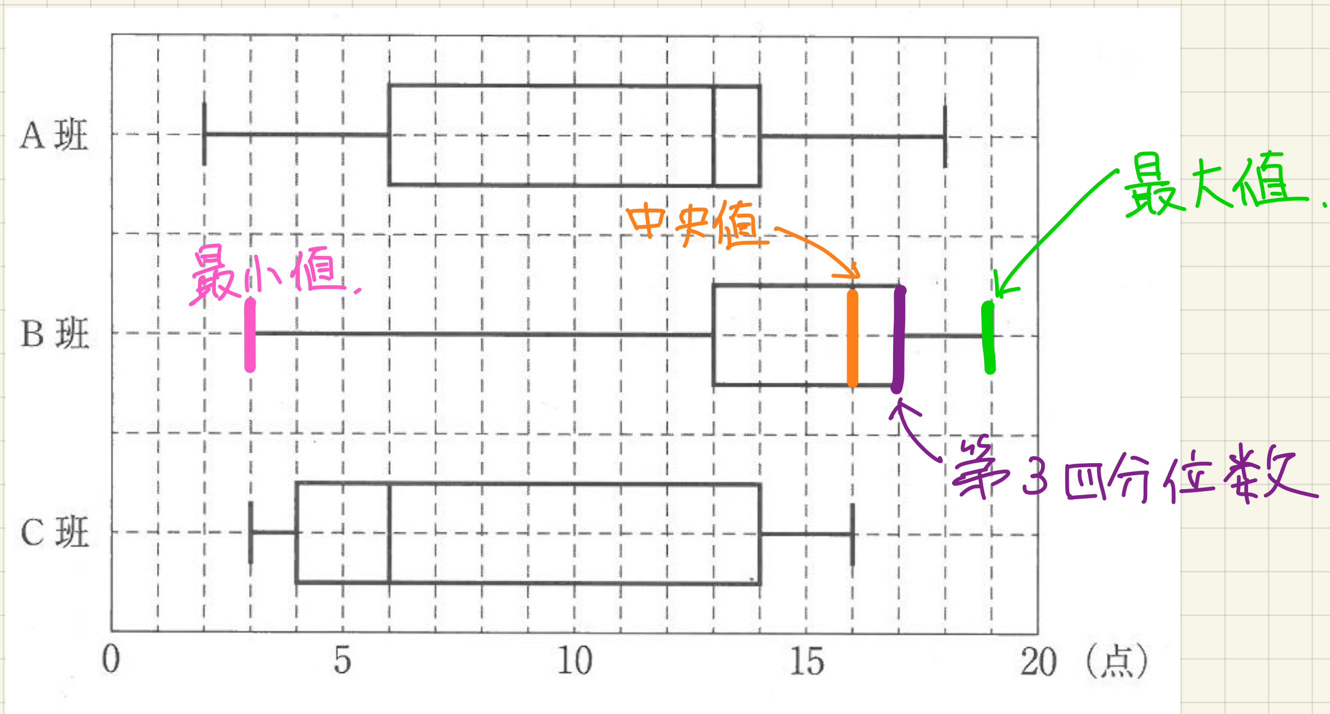


図1より B組の最小値は3点であるが，図2には含まれていない。$m < n$ より $m = 3$

nを除いたデータを小さい順に並べると，

3，12，14，15，17，17，19

中央値　第3四分位数

このときの中央値は15であるが，図1のB組の中央値は16。したがって，nは15より大きい値となる。

また，nを除いたデータの第3四分位数は17で，図1のB組の第3四分位数も17である。

㋐ $n = 16$ のとき

3，12，14，15，16，17，17，19

中央値 $= \dfrac{15+16}{2} = 15.5$

中央値は15.5なので不適

㋑ $n = 17$ のとき

3，12，14，15，17，17，17，19

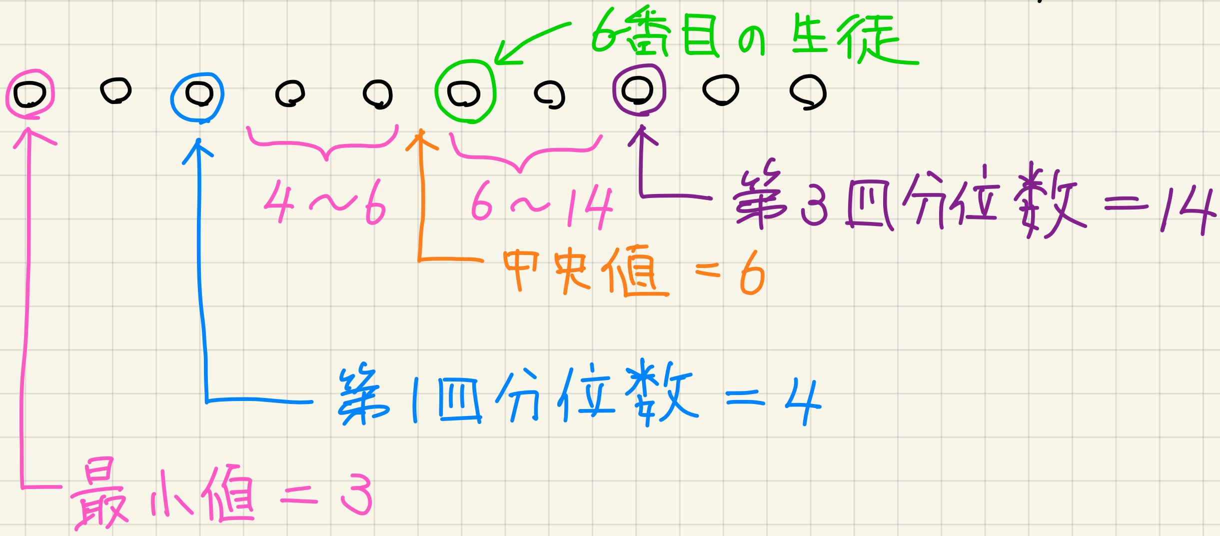
第3四分位数 $= \dfrac{17+17}{2} = 17$

中央値 $= \dfrac{15+17}{2} = 16$

中央値16，第3四分位数17より適する。

よって，$n = 17$

(3) 図1より C組のデータは、以下の通り



6番目の生徒の点数を x 点とする
中央値と第3四分位数から、$6 \leqq x \leqq 14$
5番目の生徒は4点以上，6点以下である。

㋐ 5番目の生徒が4点のとき，

$$中央値\ 6 = \frac{4+x}{2} \quad \therefore x = 8$$

㋑ 5番目の生徒が5点のとき

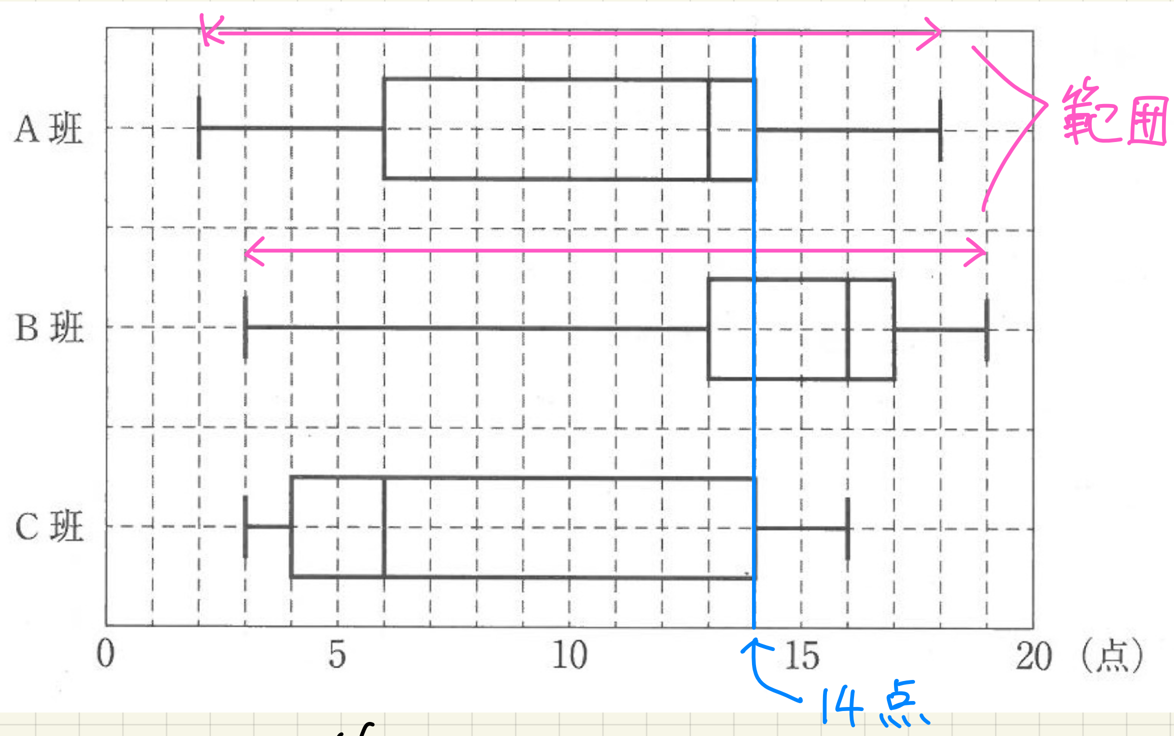
$$中央値\ 6 = \frac{5+x}{2} \Rightarrow x = 7$$

㋒ 5番目の生徒が6点のとき，

$$中央値\ 6 = \frac{6+x}{2} \Rightarrow x = 6$$

$x = 6, 7, 8$ は $6 \leqq x \leqq 14$ を満たす。よって
6番目の生徒の点数として考えられるのは，
6点，7点，8点

(4)



① A組の範囲 ＝ 18 − 2 ＝ 16

B組の範囲 ＝ 19 − 3 ＝ 16

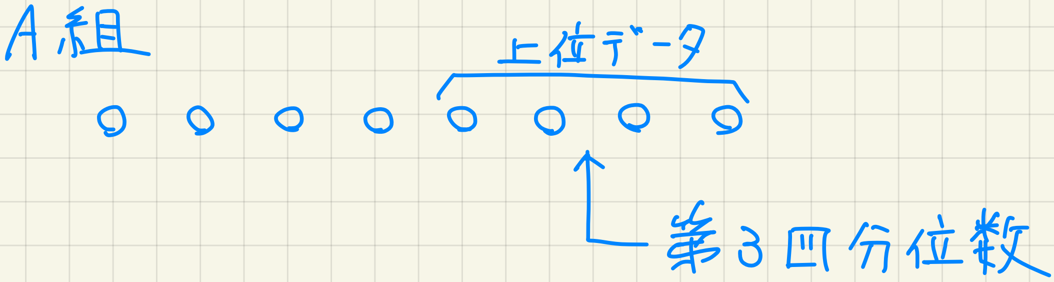
よって，A組とB組の範囲は同じである。

正しい ⇒ ア

② (2)より C組には14点の生徒はいるが，

A組，B組は箱ひげ図から分からない．

⇒ ウ



A組の第3四分位数は14点であるが，データの個数が8個のため，6番目の生徒が13点，7番目の生徒が15点とすると，$\frac{13+15}{2}=14$ となるため，14点の生徒はいない。

第3四分位数

一方，6番目の生徒，7番目の生徒が14点のとき，

$\frac{14+14}{2}=14$ なので，14点の生徒はいる。

第3四分位数

箱ひげ図から具体的な点数が不明なので，14点の生徒がいるかどうかは分からない。

$\boxed{3}$

(1) 小学校と中学生あわせて120人なので，

$$x+y=120 \quad \text{——} \quad ①$$

①

小学生の人数の35%と，中学生の人数の20%が100m走に参加し，その人数は，小学生と中学生あわせて30人なので，

$$\frac{35}{100}x+\frac{20}{100}y=30 \quad \text{——} \quad ②$$

②

(2) ②式を整理すると，

$$7x+4y=600 \quad \text{——} \quad ③$$

①×4−③より

$$\begin{array}{rrl} & 4x+4y & =480 \\ -) & 7x+4y & =600 \\ \hline & -3x & =-120 \\ & x & =40 \end{array}$$

$x=40$ を①に代入して，

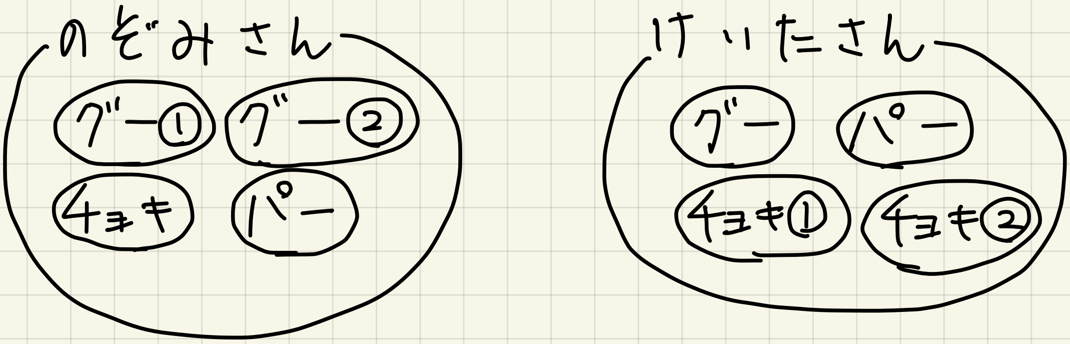
$$40+y=120$$

$$\therefore y=80$$

よって，小学生40人，中学生80人

4

(1)



のぞみさんのカードの取り出し方は4通り

けいたさんのカードの取り出し方は4通り

よって、2人のカードの取り出し方は、$4 \times 4 = 16$ 通り

(けいたさんのカード、のぞみさんのカード)と表すと、

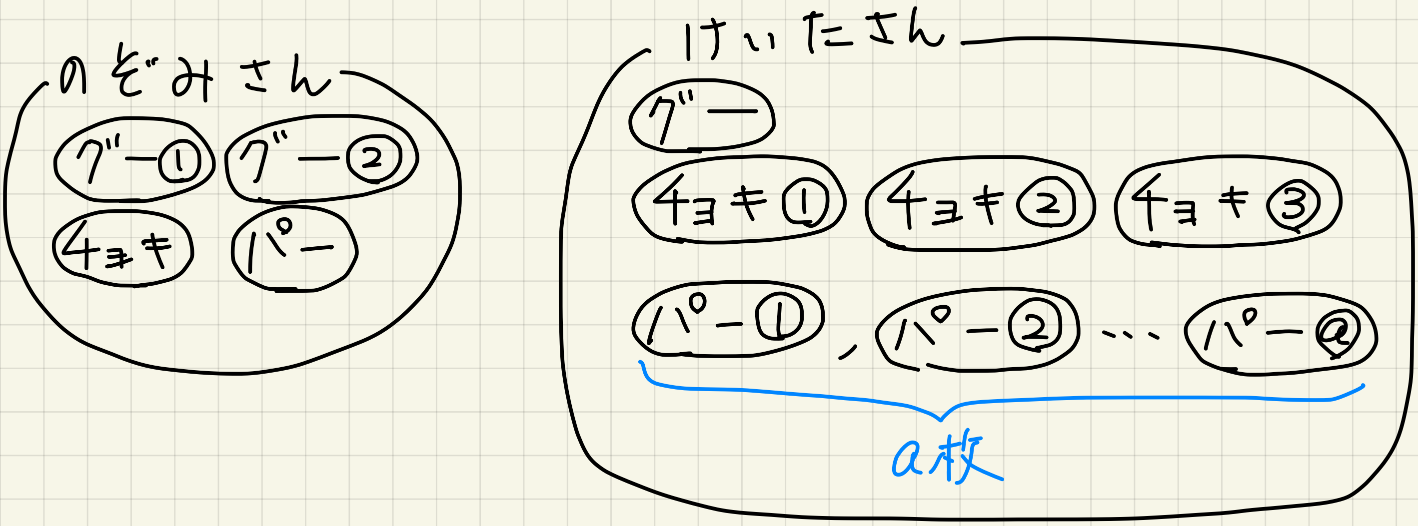
けいたさんが勝つときは、

(グー, チョキ), (パー, グー①), (パー, グー②)

(チョキ①, パー), (チョキ②, パー) の5通り。

よって、求める確率は $\dfrac{5}{16}$

(2)



(のぞみさんのカード, けいたさんのカード)と表す.

・のぞみさんが勝つとき，

(のぞみさんのカード，けいたさんのカード)と表す．

(グー①，チョキ①)，(グー①，チョキ②)，(グー①，チョキ③)

(グー②，チョキ①)，(グー②，チョキ②)，(グー②，チョキ③)

$\underbrace{\text{(チョキ，パー①)，(チョキ，パー②)} \cdots \text{(チョキ，パー} ⓐ \text{)}}_{a\text{ 通り}}$

(パー，グー)

よって，のぞみさんが勝つ場合の数は $a+7$ 通り

・けいたさんが勝つとき

(けいたさんのカード，のぞみさんのカード)と表す

(グー，チョキ)

(チョキ①，パー)，(チョキ②，パー)，(チョキ③，パー)

$$\left.\begin{array}{l}\text{(パー①，グー①)，(パー①，グー②)} \\ \text{(パー②，グー①)，(パー②，グー②)} \\ \vdots \\ \text{(パー}ⓐ\text{，グー①)，(パー}ⓐ\text{，グー②)}\end{array}\right\} \begin{array}{l} a \times 2 \\ = 2a\text{ 通り}\end{array}$$

よって，けいたさんが勝つ場合の数は $2a+4$ 通り

2人の勝つ確率が等しいので，

$$a+7=2a+4$$

$$\therefore a=3$$

$\boxed{5}$

(1) 点Bは $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあり $x=2$ なので、

$$y=\frac{1}{4}\times 2^2$$
$$=1 \qquad \therefore B(2,1)$$

(2) 点Aは $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあり $x=-6$ なので、

$$y=\frac{1}{4}\times(-6)^2$$
$$=9 \qquad \therefore A(-6,9)$$

$y=ax+b$ において、傾き = 変化の割合なので、

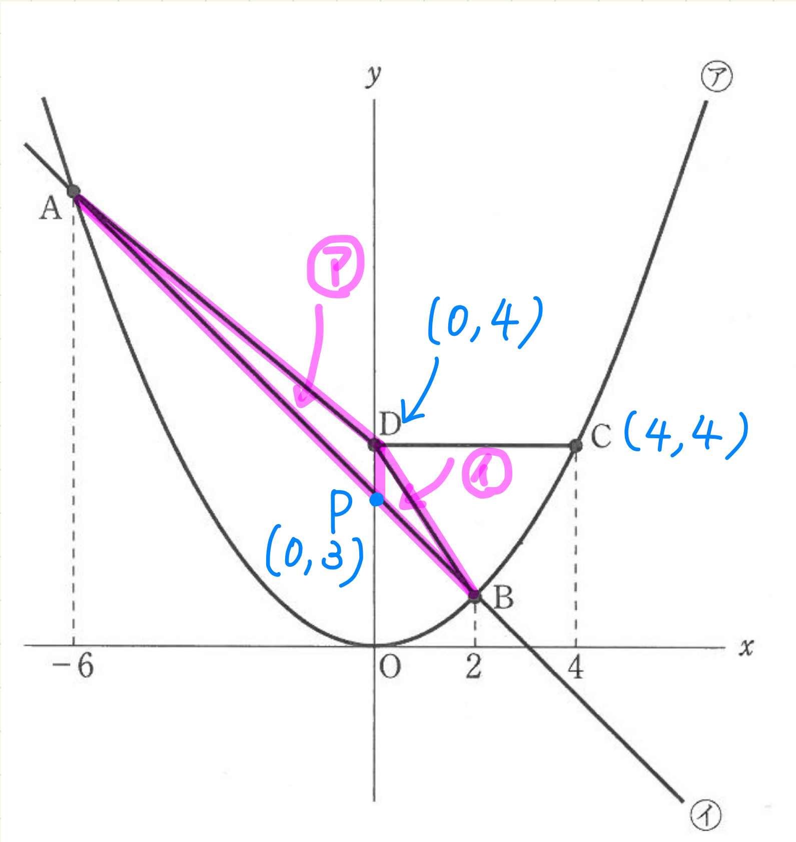
$$a=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$
$$=\frac{1-9}{2-(-6)}$$
$$=-1$$

$\therefore y=-x+b$ において、B(2, 1) を通るので、

$$1=-2+b \Rightarrow b=3$$

よって、$a=-1$、$b=3$

(3)



△ABDを㋐,㋑に分ける。

点Cは $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあり, $x=4$ なので,

$$y=\frac{1}{4}\times 4^2$$
$$=4 \quad \therefore C(4,4)$$

点Dは, 点Cを通りx軸と平行で, y軸との交点なので, D(0,4)

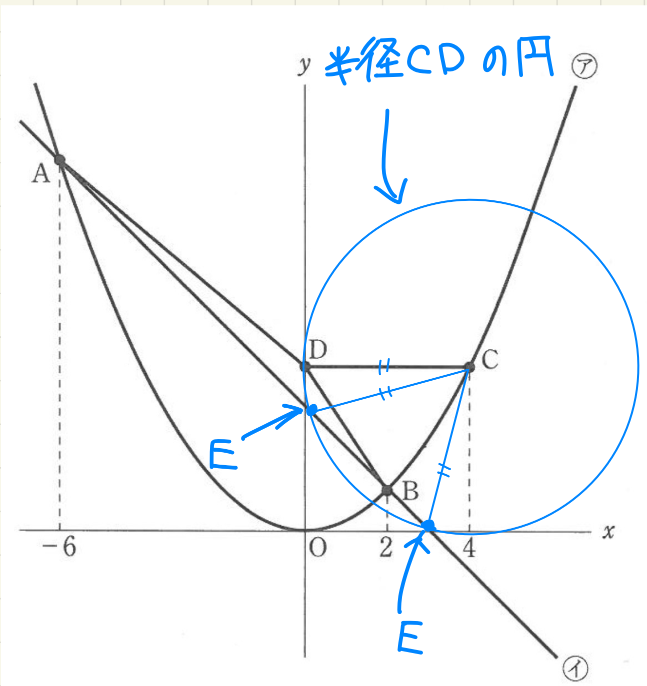
直線ABの切片の点をPとすると, (2)よりP(0,3)

$\therefore$ DP = 4 − 3 = 1 cm

よって, △ABDの面積は,

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times 1\times 6}_{㋐}+\underbrace{\frac{1}{2}\times 1\times 2}_{㋑}=3+1=4\ \text{cm}^2$$

(4)

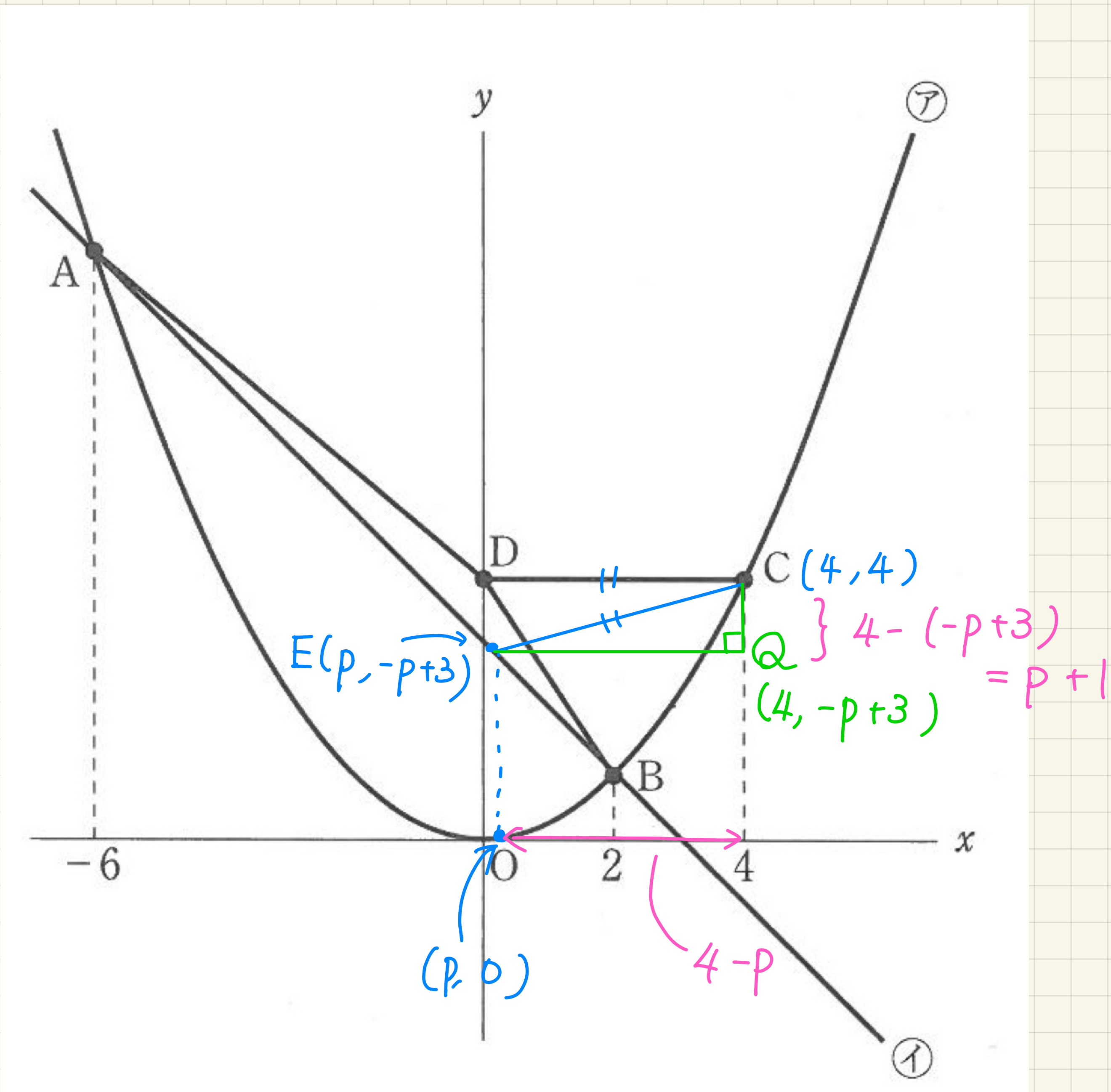


左図のように, 点Cを中心として, 半径CDの円を描く。この円と直線㋑との交点Eが CD = CE となる。

(左図のように, 交点は2つある)

点Eのx座標をpとすると，点Eは，$y=-x+3$ のグラフ上にあるので，

$y=-p+3$　　$\therefore E(p, -p+3)$



上図のように点Qをとる。

$EQ=4-p$

$CQ=4-(-p+3)$
$=p+1$

$CD=4$ cm で，$CD=CE$ より $CE=4$ cm

したがって、△CEQで三平方の定理より

$$4^2 = (4-p)^2 + (p+1)^2$$

式を整理すると、

$$p^2 - 8p + 16 + p^2 + 2p + 1 = 16$$

$$2p^2 - 6p + 1 = 0$$

$$p = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$$

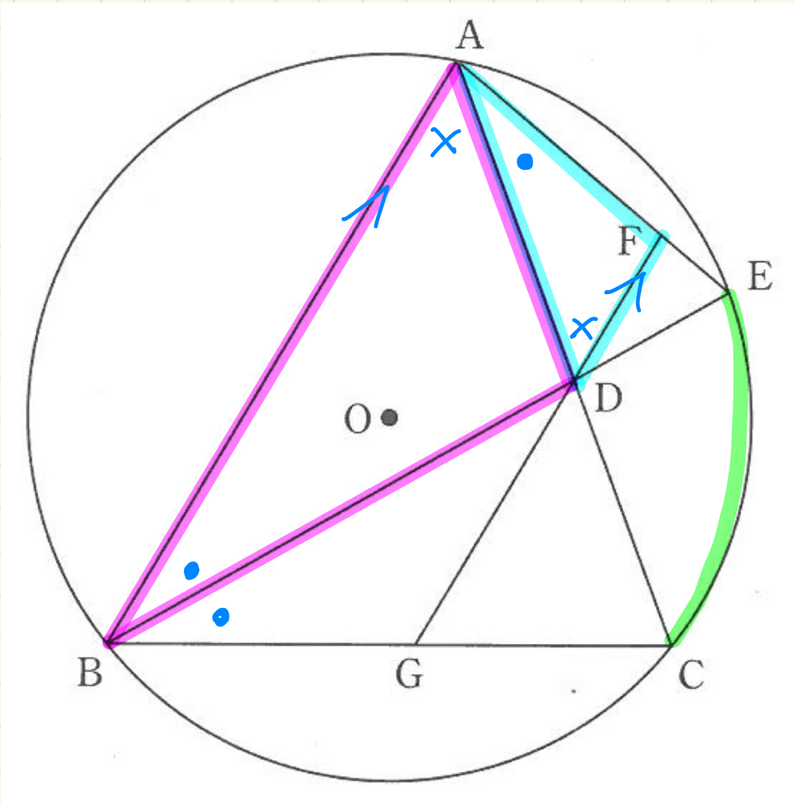
$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

したがって、点Eのx座標は $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$，$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

$\boxed{6}$

(1)



△ABDと△DAFにおいて、

仮定より

∠ABD = ∠EBC ―①

$\overset{\frown}{EC}$に対する円周角は等しいから

∠EBC = ∠DAF ―②

①, ② より

$\angle ABD = \angle DAF$ — ③

また, $AB \parallel DF$ より錯角が等しいので,

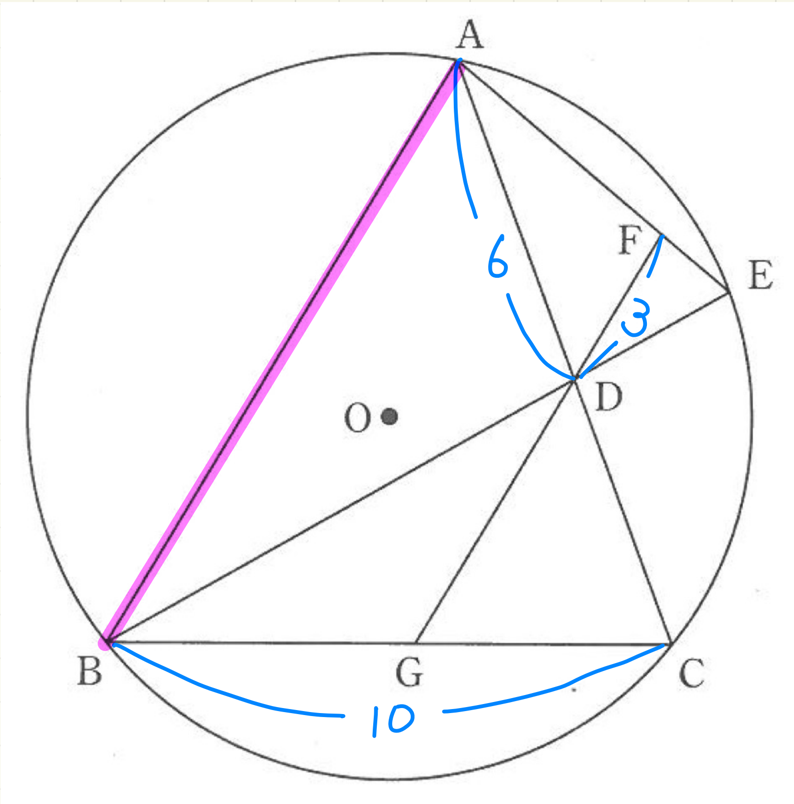
$\angle DAB = FDA$ — ④

③, ④ より 2組の角がそれぞれ等しいので.

$\triangle ABD \backsim \triangle DAF$ (証明終わり)

(2)

①

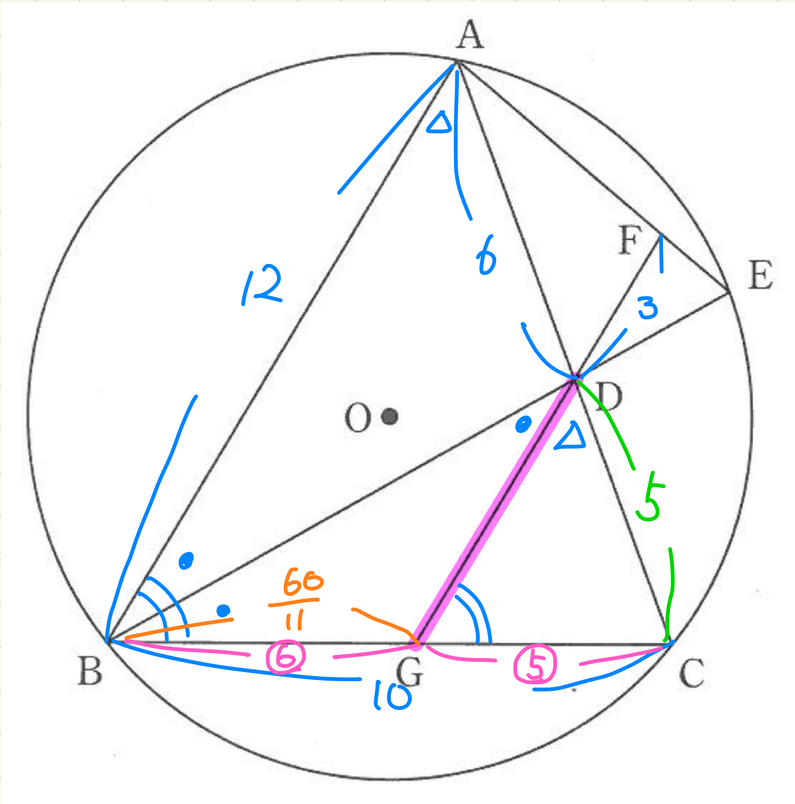


(1) より $\triangle ABD \backsim \triangle DAF$ なので, 対応する辺の比は等しいから

$AB : \underset{6}{DA} = \underset{6}{AD} : \underset{3}{DF}$

$\therefore\ 3AB = 36 \Rightarrow AB = 12cm$

②



△ABCにおいて、
角の二等分線の性質
より

$\underset{12}{AB} : \underset{10}{BC} = \underset{6}{AD} : DC$

$\Rightarrow 12 : 10 = 6 : DC$

$6 : 5 = 6 : DC$

$\therefore DC = 5\text{cm}$

△CDGと△CABにおいて、
AB//DGより同位角が等しいので、

$\angle CDG = \angle CAB$ —— ①

$\angle CGD = \angle CBA$ —— ②

①,②より 2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle CDG \backsim \triangle CAB$

対応する辺の比は等しいから、

$\underset{5}{CD} : \underset{11}{CA} = CG : CB$

$\therefore CG : CB = 5 : 11 \Rightarrow CG : GB = 5 : 6$.

よって、

$BG = 10 \times \frac{6}{11} = \frac{60}{11}\text{cm}$.

また、AB//DGより錯角が等しいので、

$\angle ABD = \angle GDB$ ―― ③

ADは$\angle ABC$の二等分線なので、

$\angle ABD = \angle DBG$ ―― ④

③、④より

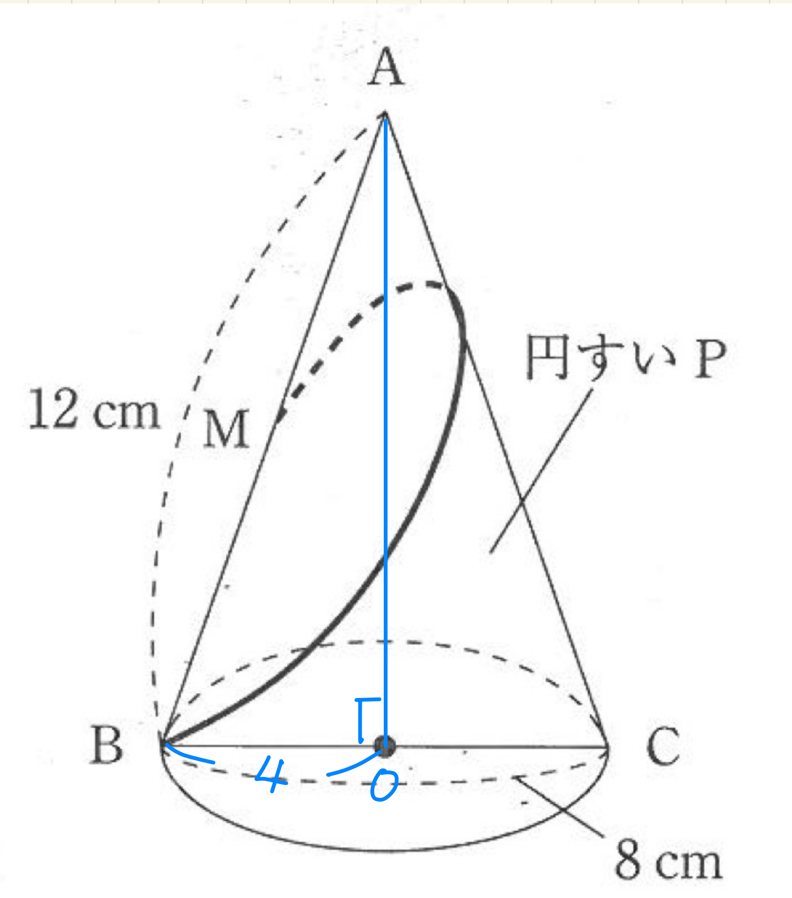
$\angle GDB = \angle DBG$

よって、$\triangle GBD$は2つの角が等しいので、二等辺三角形である。ゆえに、

$DG = BG = \dfrac{60}{11}$ cm

7

(1)



底面の中心をOとする。

$\triangle ABO$で三平方の定理より

$AO = \sqrt{12^2 - 4^2}$

$= 8\sqrt{2}$ cm

よって、円すいPの体積は、

$4 \times 4 \times \pi \times 8\sqrt{2} \times \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{128\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3

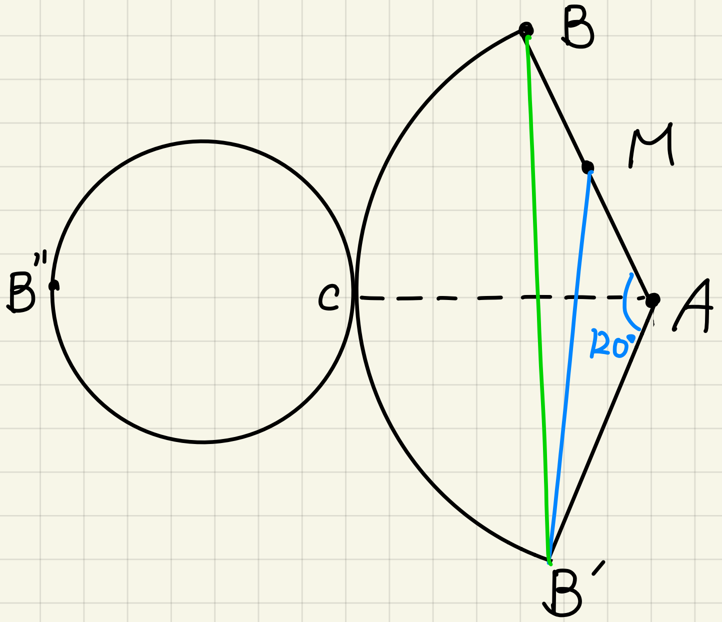
(2) 円すいPを展開図で表したとき，側面のおうぎ形の中心角を$x°$とする。
底面の円周の長さと，おうぎ形の弧の長さは等しいので，

$$8\pi = \underbrace{12\times 2}_{\text{おうぎ形の直径}}\times\pi\times\frac{x}{360}$$

$$\therefore \frac{x}{360} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

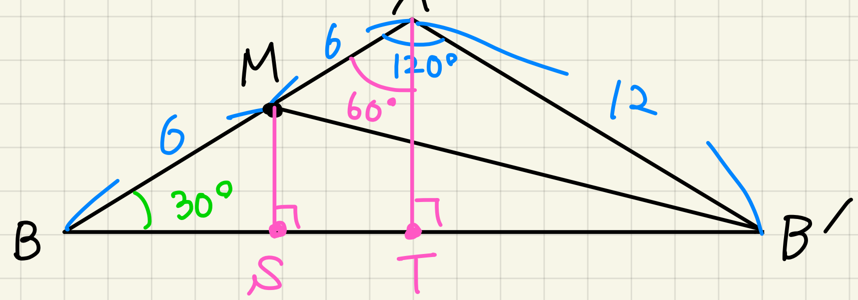
$$\therefore x = 120°$$

展開図は，以下の通り



点MからACを通り点Bまでひもをかける。最短となるのは，B'Mが直線となるときである。

△ABB'と△AMB'を抜き出して考える。



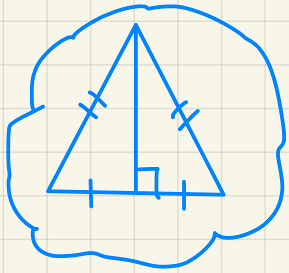
$\triangle ABB'$ は、$AB = AB'$ の二等辺三角形なので、

$$\angle ABB' = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= 30^\circ$$

点MからBB'，点AからBB'に垂線を下ろした足をそれぞれS，Tとする.

二等辺三角形の性質より $BT = B'T$.



また，$\triangle ABT$ は $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ の直角三角形より

$$AT : AB : BT = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{AB}_{12} : BT = 2 : \sqrt{3}$$

$$\therefore\ 2BT = 12\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad BT = 6\sqrt{3}$$

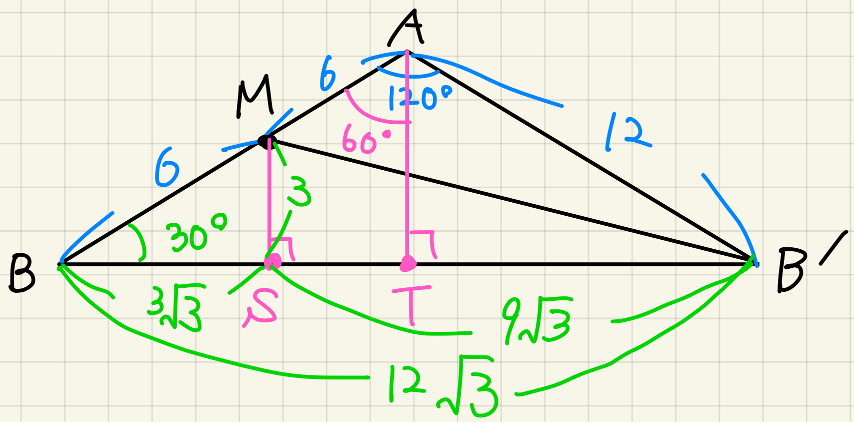
$$\therefore\ BB' = 2BT = 12\sqrt{3}\ \text{cm}$$

$\triangle MBS$ は $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ の直角三角形より

$$MS : MB : BS = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

$$MS : \underbrace{MB}_{6} = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad MS = 3\ \text{cm}$$

$$\underbrace{MS}_{3} : BS = 1 : \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad BS = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$$



よって,

$$SB' = 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$
$$= 9\sqrt{3}$$

$\triangle MSB'$で三平方の定理より

$$MB' = \sqrt{3^2 + (9\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{9 + 243}$$
$$= \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$$
$$= 6\sqrt{7}\ \text{cm}$$

よって, ひもの最短の長さは $6\sqrt{7}$ cm