2023年度　長野県

数学

kmkm

問1

(1) 与式 $= 1$

(2)

ア：n が -5 より小さいとき、$5+n$ は負の数となる。例：$n=-6$ のとき $5+(-6)=-1$
よって誤り

イ：n が負の数のとき、$5-n$ は正の数となる。
例：$n=-1$ のとき $5-(-1)=6$.
よって正しい

ウ：n が負の数のとき、$5\times n$ は負の数となる。
例：$n=-1$ のとき、$5\times(-1)=-5$
よって誤り

エ：n が負の数のとき、$5\div n$ は負の数となる。
例：$n=-1$ のとき、$5\div(-1)=-5$
よって誤り

(3) 与式 $= \dfrac{2(3x-5y)-(2x-y)}{4}$

$= \dfrac{6x-10y-2x+y}{4}$

$= \dfrac{4x-9y}{4}$

(4) 与式 $= x^2-6x+9+2x-6-15$

$= x^2-4x-12$

$= \underline{(x+2)(x-6)}$

(別解)

$A = x-3$ とおくと、

与式 $= A^2+2A-15$

$= (A+5)(A-3)$

$= (x-3+5)(x-3-3)$

$= \underline{(x+2)(x-6)}$

(5) 解の公式より

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \underline{-1 \pm \sqrt{2}}$$

(6) 12m のロープを x 等分

⇒ 1本分のロープの長さは $12 \div x = \frac{12}{x}$

よって $y = \frac{12}{x}$。 ⇒ x と y は反比例である。

また、$y = \frac{12}{x}$ ⇒ $xy = 12$ であり、x と y の積は一定である。よって、答えは、イ, ウ

(7)

30.5 を四捨五入すると 31
⇒ 30.5 以上である

31.5 を四捨五入すると 32
⇒ 31.5 未満である

よって、$30.5 \leqq a < 31.5$ ウ

(8) 袋の中の玉を赤1, 赤2, 青1, 青2, 青3とする

- 赤1
  - 赤2 ×
  - 青1 ○
  - 青2 ○
  - 青3 ○
- 赤2
  - 赤1 ×
  - 青1 ○
  - 青2 ○
  - 青3 ○
- 青1
  - 赤1 ○
  - 赤2 ○
  - 青2 ×
  - 青3 ×
- 青2
  - 赤1 ○
  - 赤2 ○
  - 青1 ×
  - 青3 ×
- 青3
  - 赤1 ○
  - 赤2 ○
  - 青1 ×
  - 青2 ×

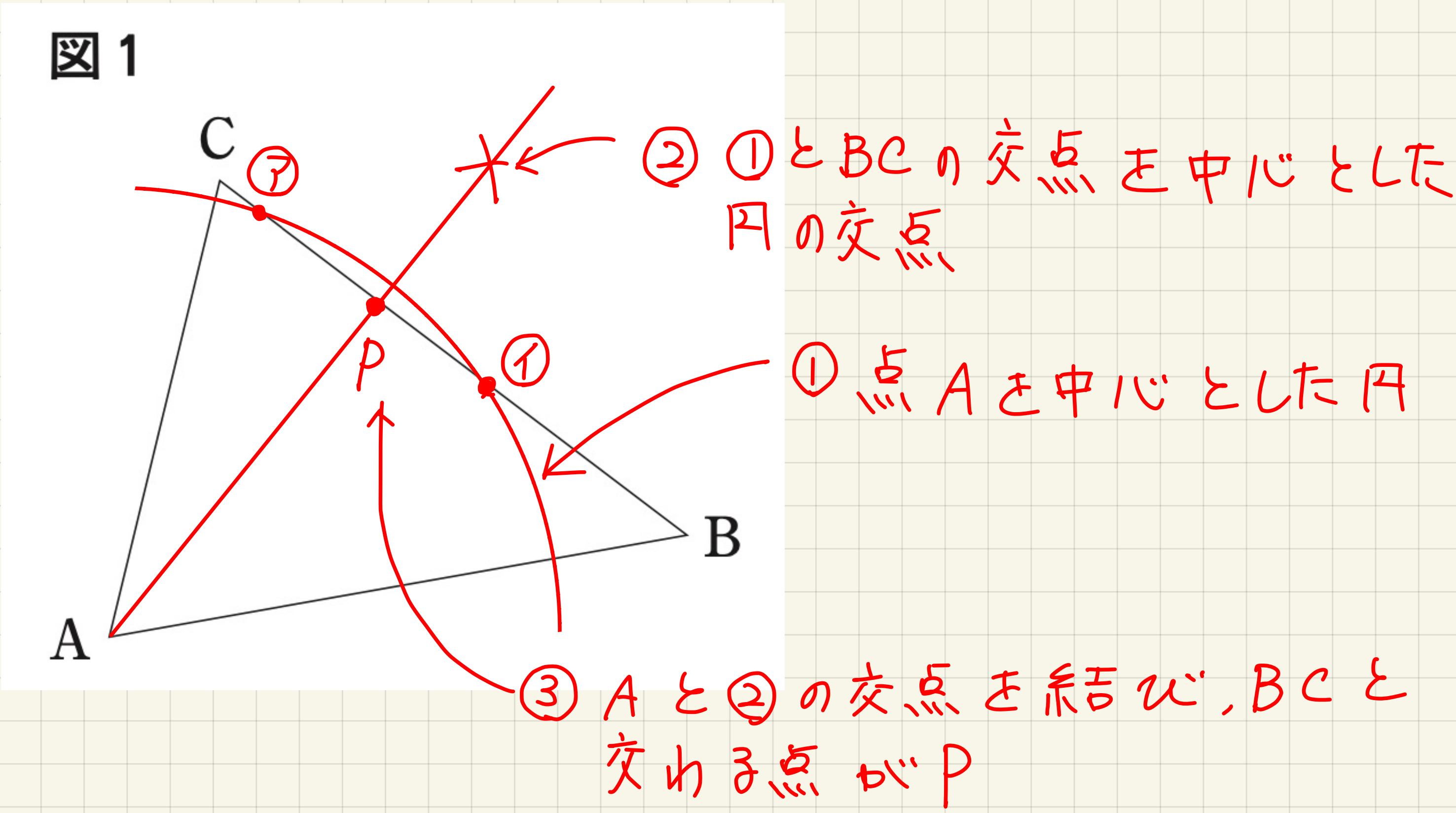
玉の取り出し方は、全部で 20 通りあり、そのうち
異なる色の玉の取り出し方は 12 通りなので、
求める確率は

$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

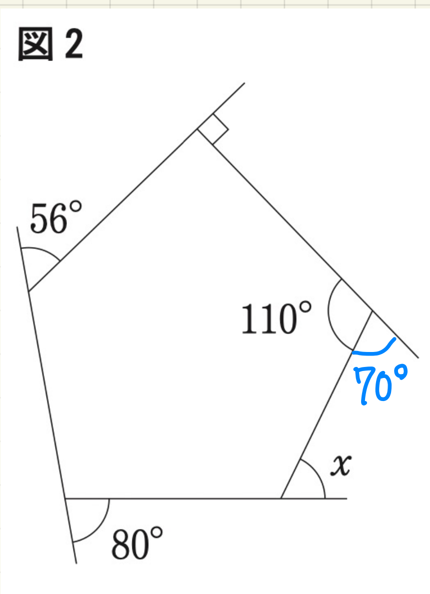
(9) $x+y=-1$ で $x=2$ より
$2+y=-1 \Rightarrow y=-3$

ア： $x-y=2-(-3)=5$ より 不適
イ： $3x-2y=3\times2-2\times(-3)=12$ より 不適
ウ： $x+4y=2+4\times(-3)=-10$ より 不適
エ： $x-3y=2-3\times(-3)=11$ より 適する。

(10)



(11)



多角形の外角の和は360°なので，
$90^\circ+56^\circ+80^\circ+x^\circ+70^\circ=360$

よって
$x=64^\circ$

(12)

半径が 3cm の球Aの体積は

$$\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$$ ※球の体積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$

円柱Bの高さを x cm とすると, 円柱Bの体積は

$$2 \times 2 \times \pi \times x = 4\pi x \text{ cm}^3$$

球Aの体積 = 円柱Bの体積より

$$36\pi = 4\pi x \Rightarrow x = 9$$

よって, 円柱Bの高さは 9 cm

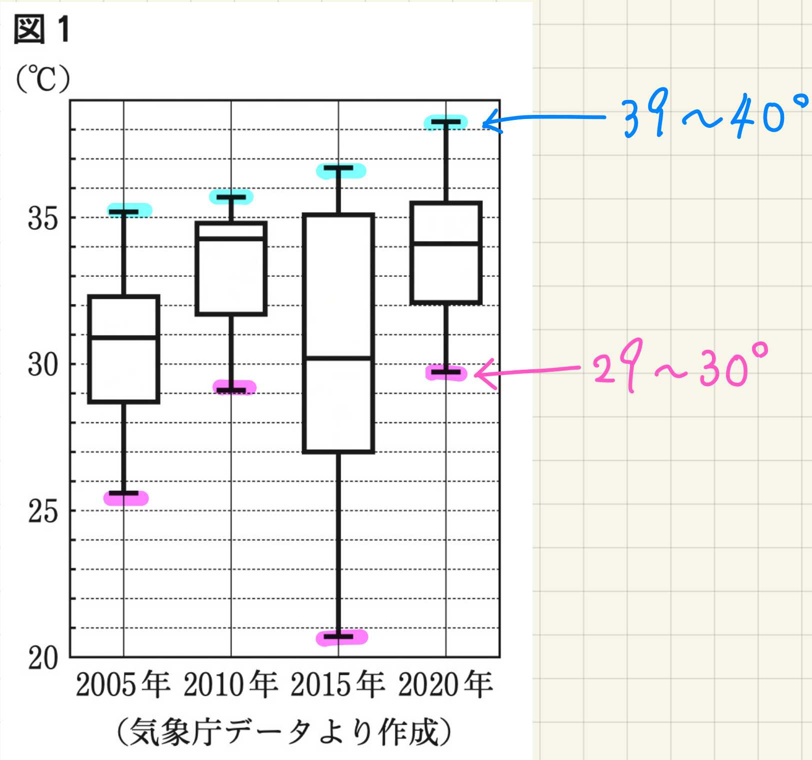
問2

I

(1) 図2より

最小値 : 28〜30°C

最大値 : 38〜40°C



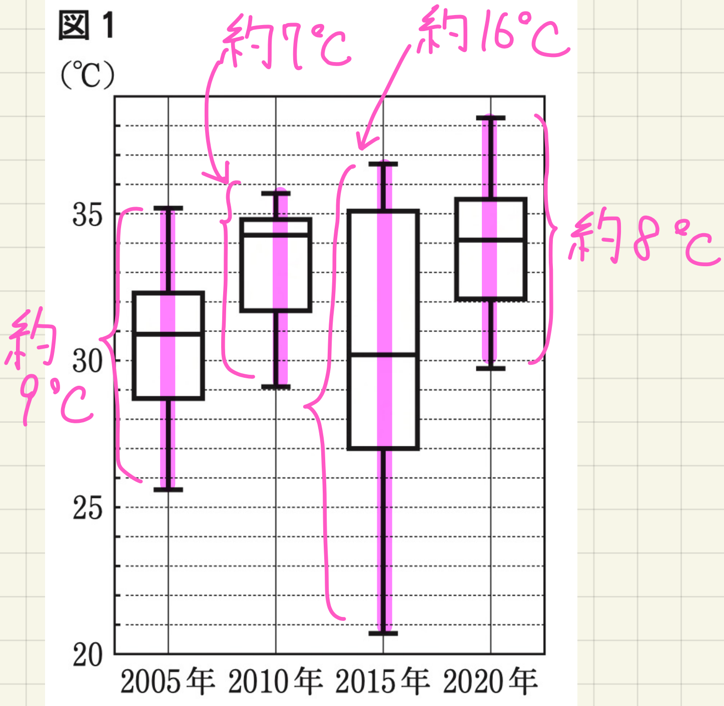
よって, 2020年

(2)

① データの散らばり具合 = データの範囲

= 最大値 − 最小値

図 1



(気象庁データより作成)

よって、データの散らばりが小さい順は、

2010年度、2020年度、

2005年度、2015年度

よって正しい ㋐

② 2005年度の最大値は35°Cを超えているが、

35°Cを超えた日にちは箱ひげ図からは不明。

よって、図1からはわからない ㋒

(3) 図1より、2015年度の中央値は30°C以上である。

よって、全体の50%以上の日が30°Cを超えていた。

あ ㋑

図1より 2015年度の第1四分位数は27°C

第1四分位数は、データを小さい順に並べたとき、

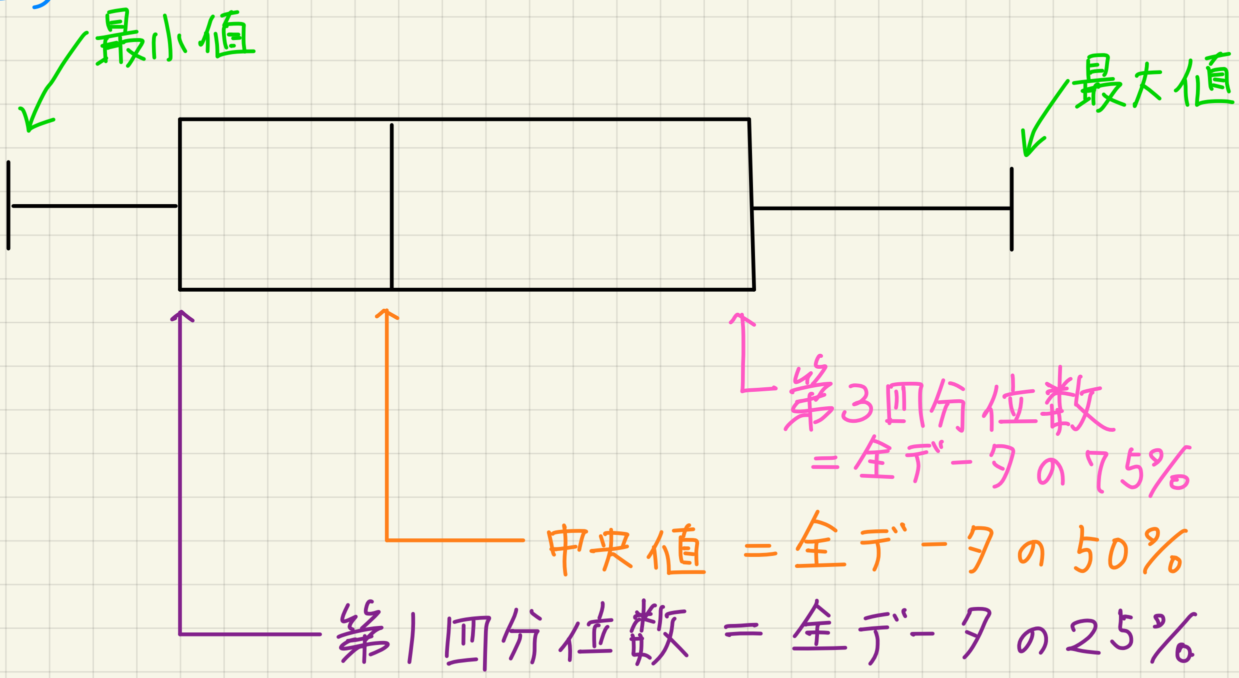
下位データの中央値である。下位データの中央値は

全体の25%である。よって、2015年度は全体の

25%の日が27°C以下である。

い ㋐

(参考)



II

(1) $a=mn$, $b=m(n+1)$, $c=m(n+2)$ より

$$\begin{aligned} a+b+c &= mn+m(n+1)+m(n+2) \\ &= mn+mn+m+mn+2m \\ &= 3mn+3m \\ &= 3m(n+1) \end{aligned}$$

また, $b=m(n+1)$ より

$$\begin{aligned} 3b &= 3\times m(n+1) \\ &= 3m(n+1) \end{aligned}$$

(2)

	⋯	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	⋯
⋮							
m		a	b	c	d	e	
⋮							

$a=mn$, $b=m(n+1)$, $c=m(n+2)$, $d=m(n+3)$
$e=m(n+4)$ と表されるので.

$$a+b+c+d+e$$
$$=mn+m(n+1)+m(n+2)+m(n+3)+m(n+4)$$
$$=mn+mn+m+mn+2m+mn+3m+mn+4m$$
$$=5mn+10m$$
$$=5m(n+2)$$

よって 5つの数 a, b, c, d, e を 5 でわると.

ラ

$$5m(n+2)\div 5=m(n+2)$$

c に等しい

なので、c が分かる.

また、$605\div 5=121$ なので、11行目の c の値は 121 である。11行目は 11 の倍数がならんでいるので、c の1つ前である b は

$$b=121-11=110$$

b の1つ前である a は

$$a=110-11=99$$

よって、最初に選んだ数 a は 99 である.

問3

Ⅰ

(1) ①

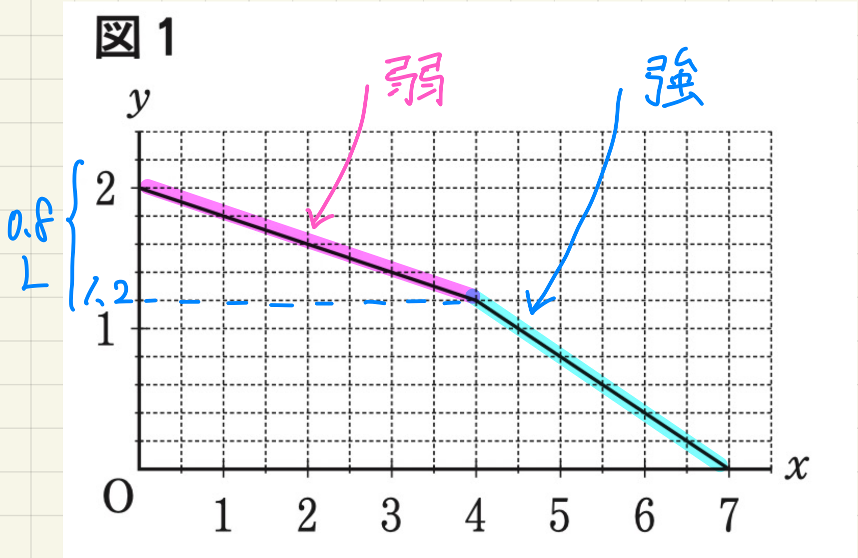


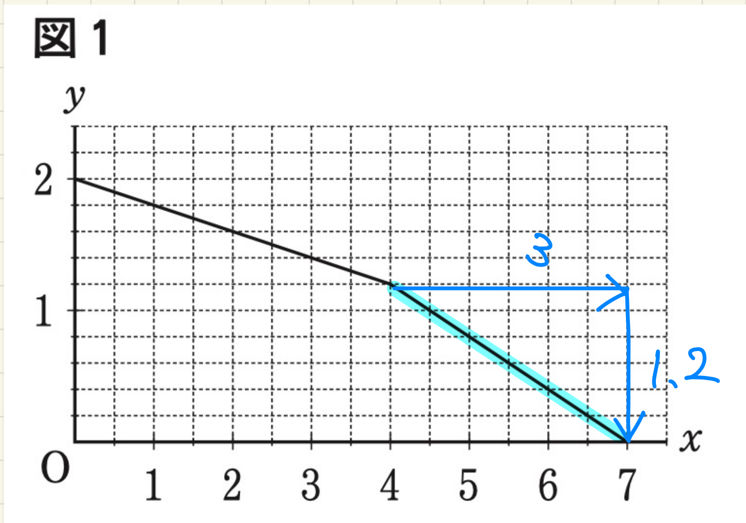
図1より弱のとき、
4時間で水の量が
0.8L減っているので
$0.8 \div 4 = 0.2$
よって1時間あたり
0.2Lの水が放出
されている。

② $4 \leqq x \leqq 7$（強）のときの式を $y = ax + b$ とおく。1次関数では、傾き＝変化の割合なので、

$$a = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

$$= \frac{0 - 1.2}{7 - 4}$$

$$= -\frac{1.2}{3} = -0.4$$



よって $y = -0.4x + b$ で $(7, 0)$ を通るので

$0 = -0.4 \times 7 + b \Rightarrow b = 2.8$

したがって、求める直線の式は $y = -0.4x + 2.8$

(2)

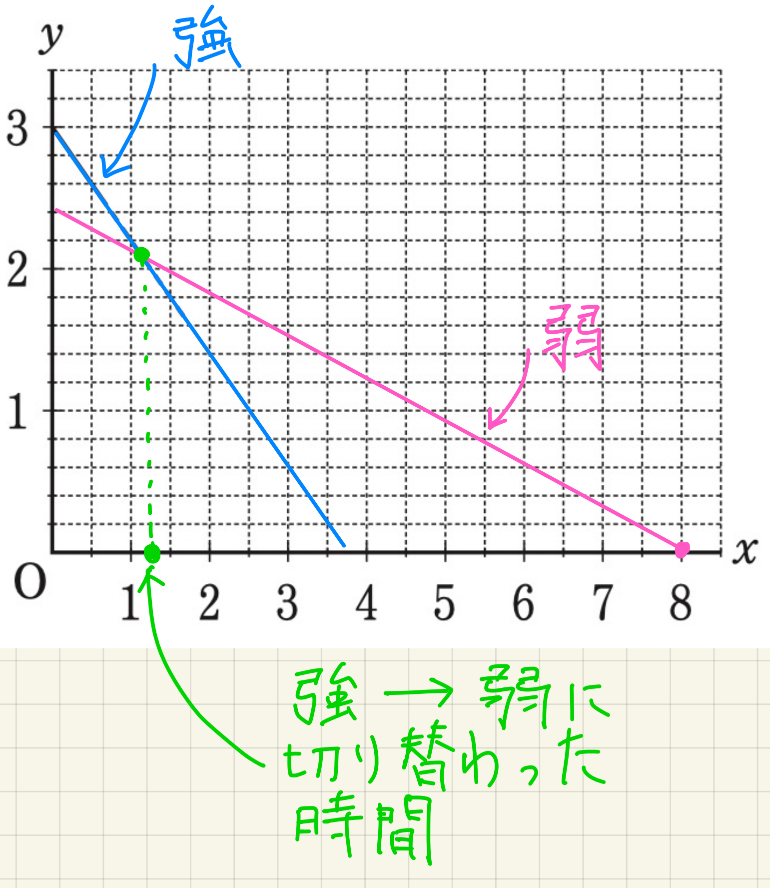
① 8時間後に水の量が0になったので、
点(8, 0)を通る。
また、Bの弱は、1時間あたり0.3Lの水が放出されるので、傾きは−0.3
よって、
㋑ 点(8, 0)を通り、傾き−0.3 の直線をひく

このとき、2本の直線の交点 ㋒ のx ㋓ 座標は、

強から弱の設定に切り替わった時間を表している。

②

図2



強のグラフ

$y = -0.8x + 3$ ——①

傾き −0.8　　(0, 3)を通る。

弱のグラフ

$y = -0.3x + b$ で
(8, 0)を通るので
$0 = -0.3 \times 8 + b$
$\Rightarrow b = 2.4$

$\therefore y = -0.3x + 2.4$ —②

交点は①、②を連立して解く。①を②に代入して、

$$-0.8x+3=-0.3x+2.4$$
$$-0.5x=-0.6$$
$$x=1.2$$

×0.2　1時間 = 60分　×0.2
0.2時間 = ?分
? = 60 × 0.2 = 12

0.2時間 = 12分より、強から弱に切り替わった時間は、1時間12分後

II

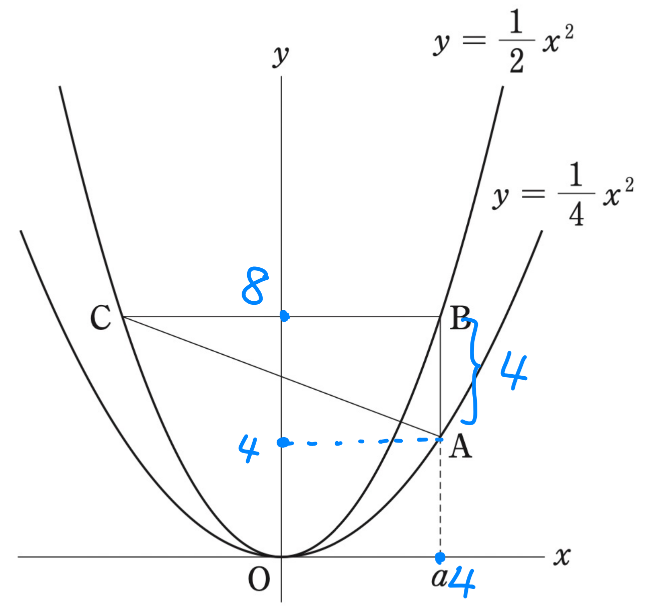
(1) 点Aは $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあり、$x=4$ なので、

$$y=\frac{1}{4}\times 4^2=4 \qquad \therefore A(4,4)$$

点Bは、$y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり、$x=4$ なので

$$y=\frac{1}{2}\times 4^2=8 \qquad \therefore B(4,8)$$

図3



よって、ABの長さは4

(2) 点Aは $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあり、$x=a$ なので、

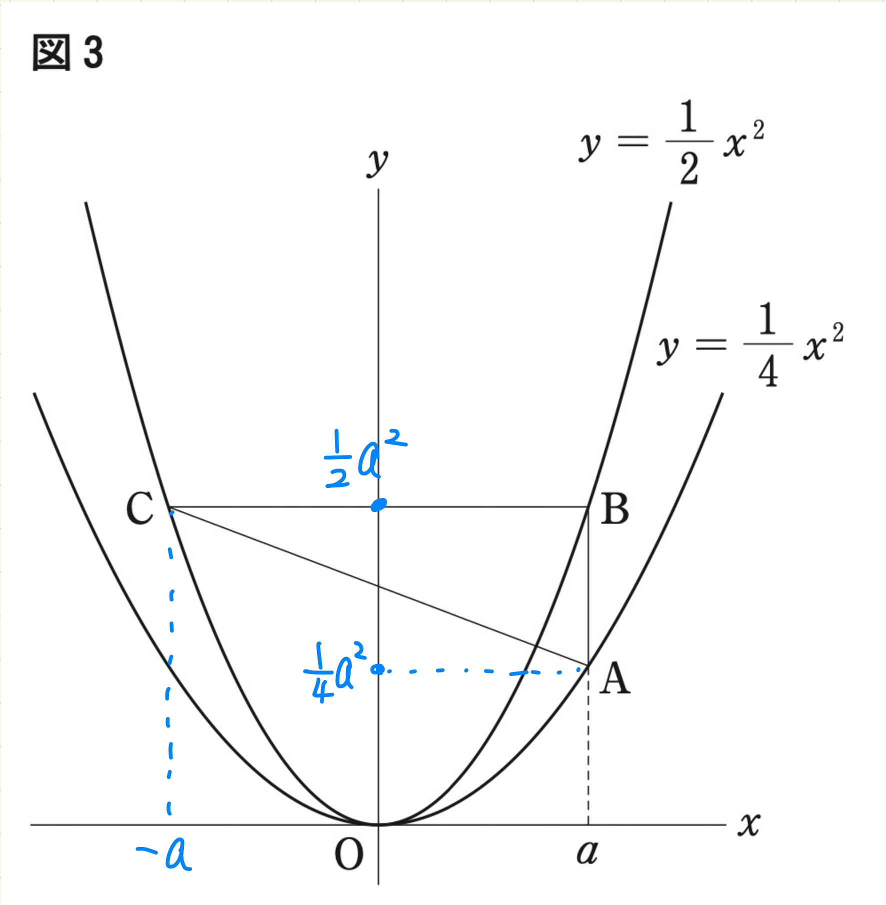
$y=\frac{1}{4}a^2 \Rightarrow A\left(a,\frac{1}{4}a^2\right)$

点Bは $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり、$x=a$ なので、

$y=\frac{1}{2}a^2 \Rightarrow B\left(a,\frac{1}{2}a^2\right)$

点Cは点Bとy軸について対称なので、

$C\left(-a,\frac{1}{2}a^2\right)$



よって、

$AB=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^2$

$=\frac{1}{4}a^2$

$BC=a+a$

$=2a$

$AB=BC$ より

$\frac{1}{4}a^2=2a$

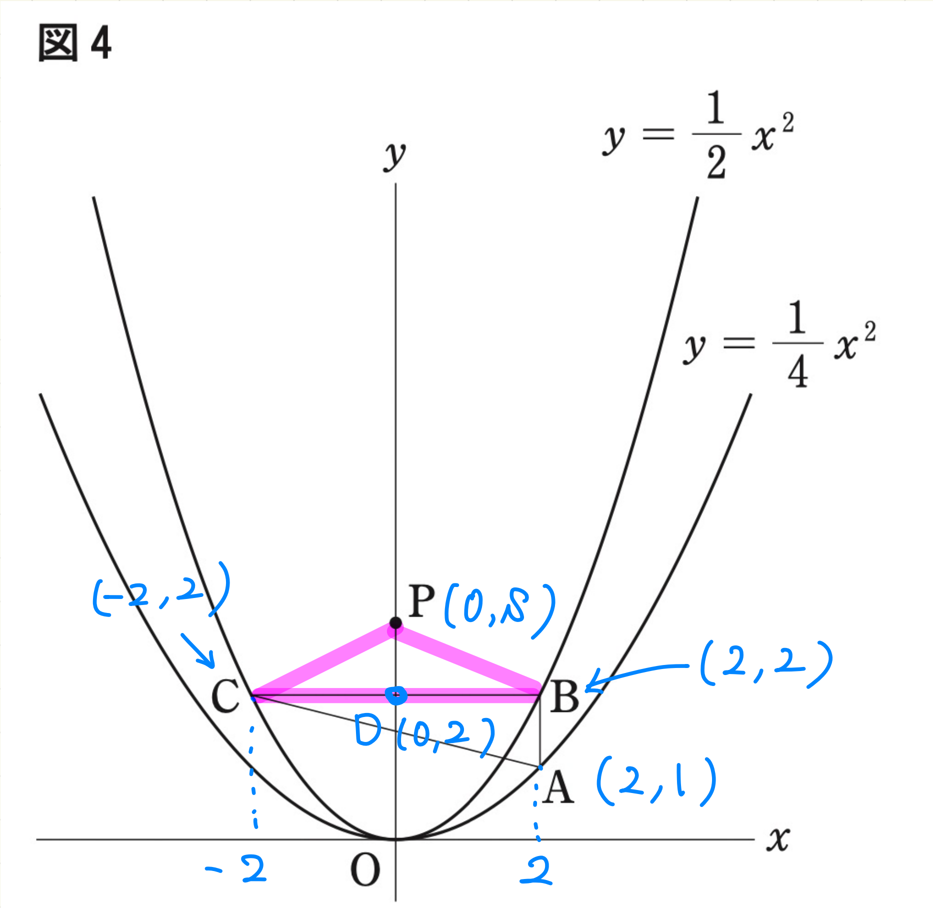
両辺に4をかけて、式を整理すると、

$a^2=8a \Leftrightarrow a^2-8a=0 \Leftrightarrow a(a-8)=0$

a は正の数なので、$a=8$

(3)

①



点Pはy軸上にあるので、点Pの座標を$(0, s)$とおく.

各点の座標は左図の通り。

$AB=1$, $BC=4$ より△ABCの面積は.

$$\frac{1}{2}\times 4\times 1=2.$$

BCの中点をDとすると、$PD=s-2$
よって△BCPの面積は.

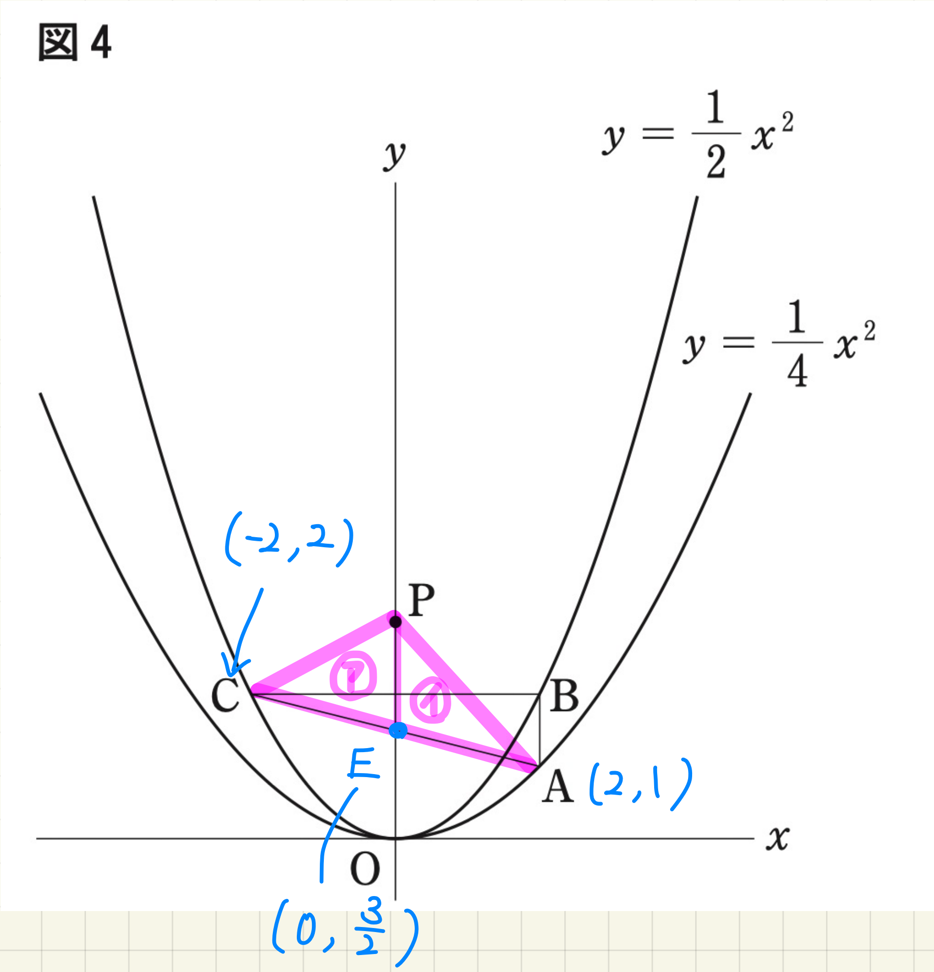
$$\frac{1}{2}\times 4\times (s-2)=2(s-2)$$

△ABCの面積 = △BCPの面積より

$$2=2(s-2) \Rightarrow s=3$$

よって、点Pの座標は $(0, 3)$

② 点Pの座標を(0, t)とおく



△ACPを左図のように、㋐、㋑に分ける。
直線ACの切片の点をEとする。

直線ACの式を $y=ax+b$ とおくと、

$$a=\frac{yの増加量}{xの増加量}$$

$$=\frac{1-2}{2-(-2)}=-\frac{1}{4}$$

よって、$y=-\frac{1}{4}x+b$ で、A(2, 1)を通るので、

$$1=-\frac{1}{4}\times 2+b \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

したがって E$\left(0, \frac{3}{2}\right)$

以上より△ACPの面積は

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\left(t-\frac{3}{2}\right)\times 2}_{㋐}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\left(t-\frac{3}{2}\right)\times 2}_{㋑}$$

$$=\left(t-\frac{3}{2}\right)+\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

$$=2t-3$$

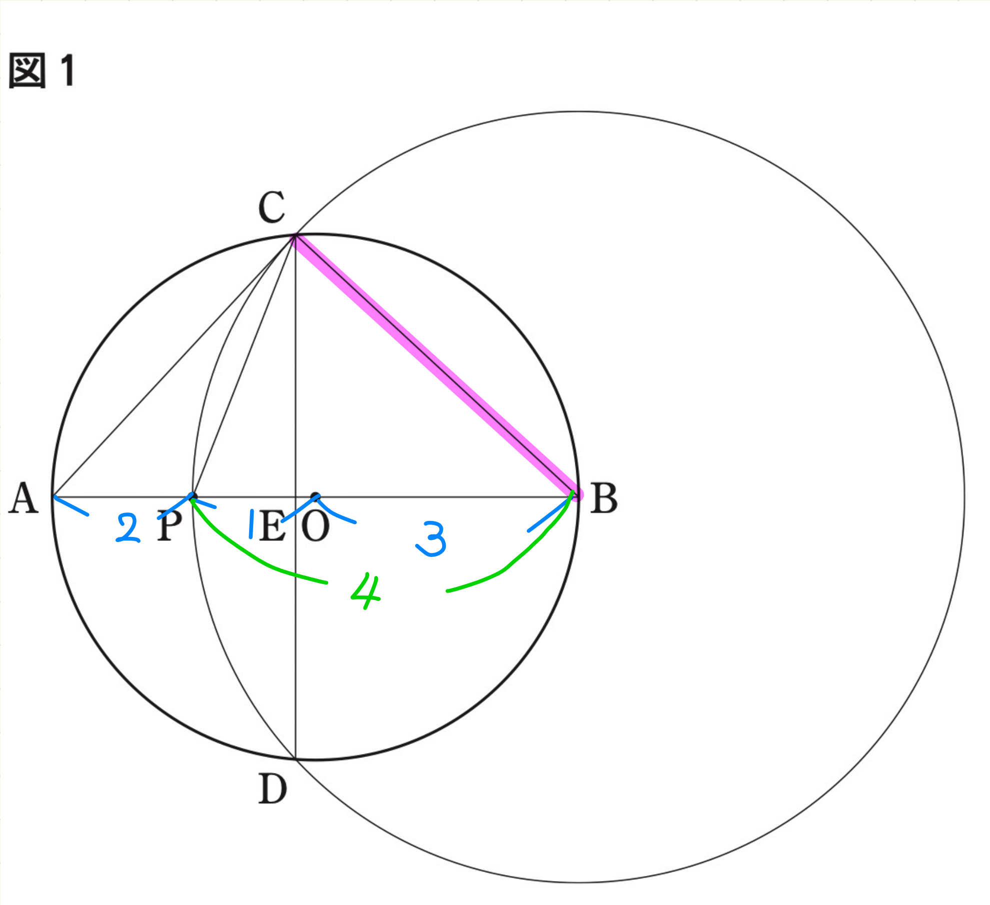
△ABCの面積は①より2なので.

$$2t-3=2 \Rightarrow t=\frac{5}{2}$$

よって, 点Pの座標は $\left(0,\frac{5}{2}\right)$

問4

(1)



AB=6cmより
円Oの半径は
3cm.
AP=2cmより
PE=OA−AP
=3−2=1cm
よって
BP=3+1=4cm

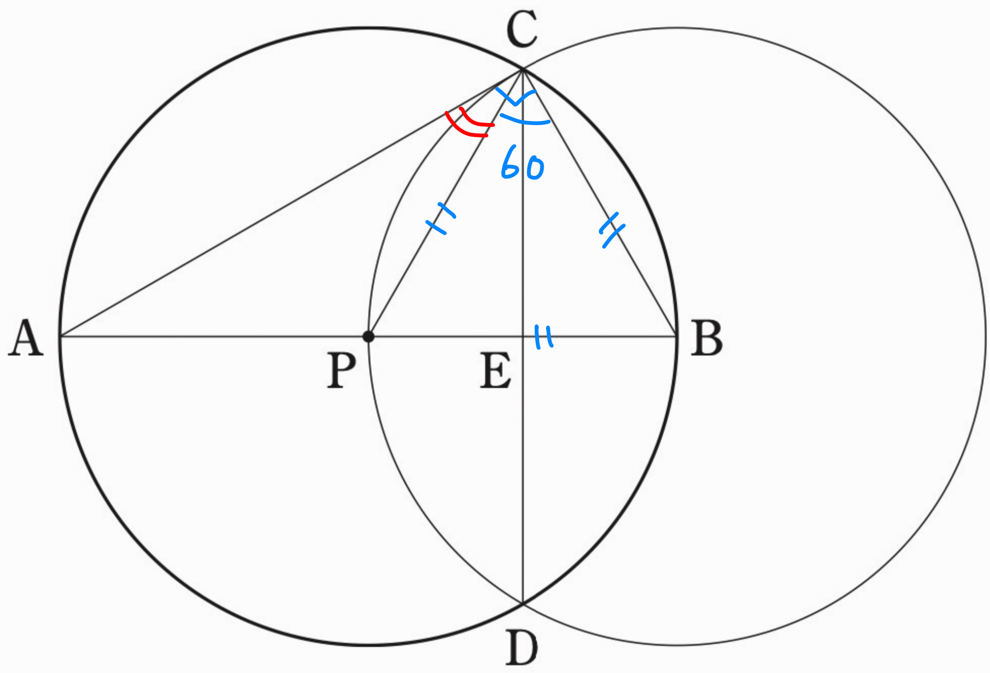
BP, BCは円Bの半径なので,

$$BC=BP$$
$$=4\text{cm}$$

(2)

①

図 2



BP, BCは円Bの半径なので,

$BP = BC$ —— ①

PB, PCは,円Pの半径なので,

$PB = PC$ —— ②

①, ②より $BP = BC = PC$。よって $\triangle CPB$ は正三角形であるから, $\angle PCB = 60°$

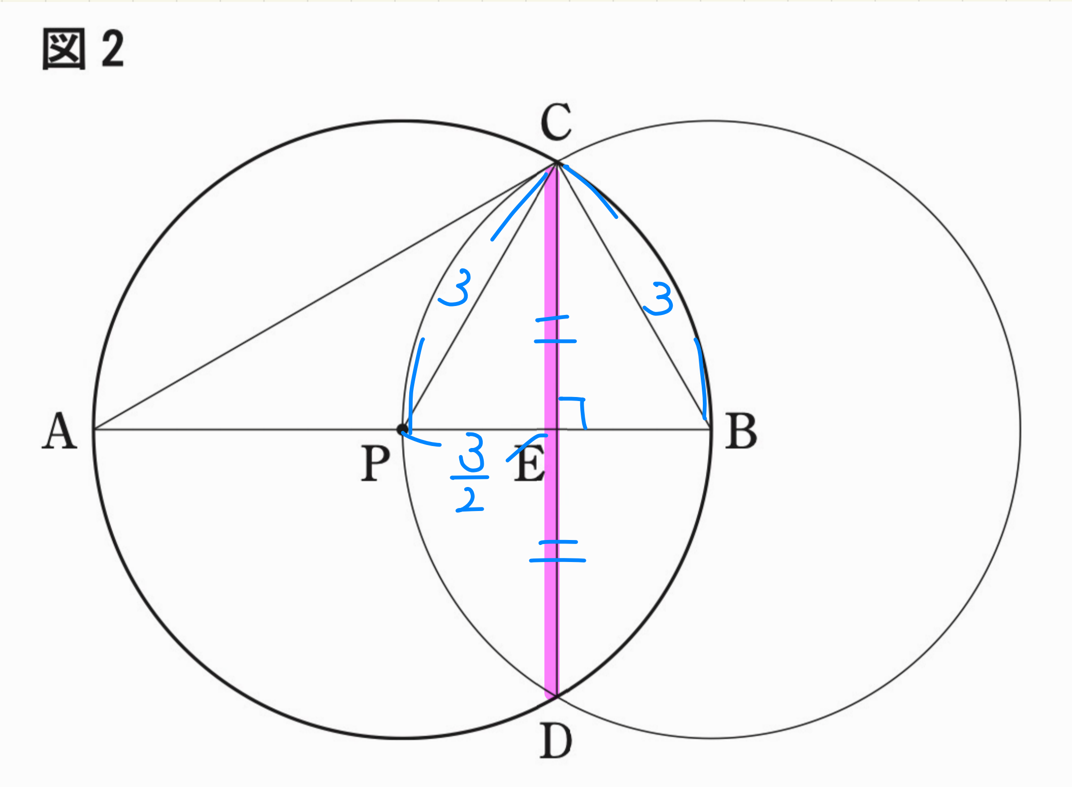
$\angle ACB$ は直径ABに対する円周角なので,

$\angle ACB = 90°$

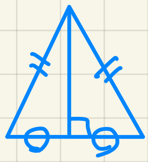
よって,

$$\angle ACP = \angle ACB - \angle PCB$$
$$= 90° - 60°$$
$$= 30°$$

②



①より△CPBは正三角形であり、AB = 6 cmから
PB = BC = CP = 3 cm
正三角形は二等辺三角形の1つであり、AB⊥CDから、PE = EB



よって、PE = $\frac{3}{2}$ cm

△CPEで三平方の定理から

$$CE = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36-9}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

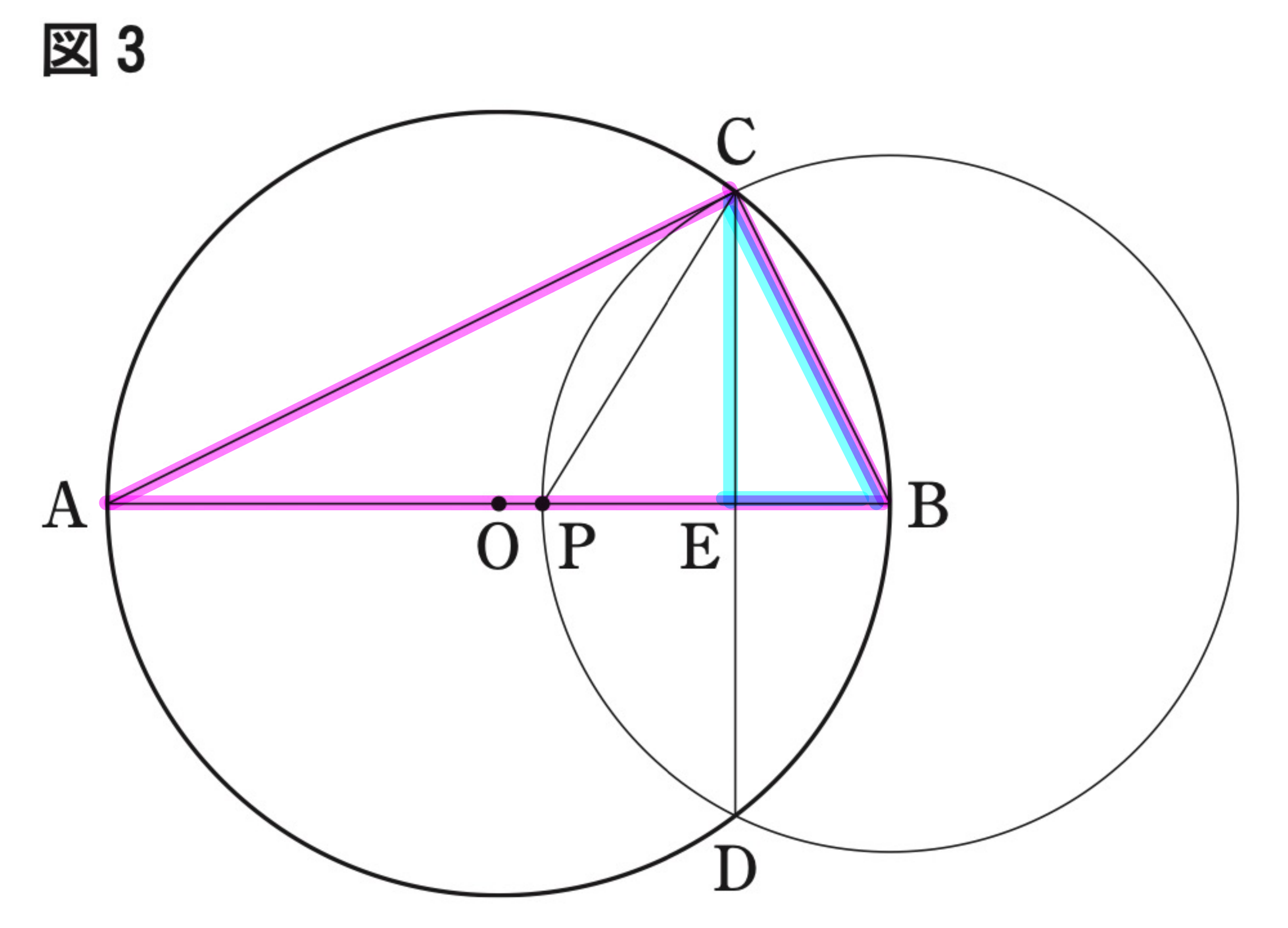
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

対称性から、CE = EDなので、

$$CD = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2 = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

(3) ①, ②, ③

図3



[予想①の証明]

△ABCと△CBEで,

∠ACBは円Oの半円の弧に対する円周角 あ

だから, ∠ACB = 90°

AB⊥CD だから∠CEB = 90°

よって ∠ACB = ∠CEB ―①

い

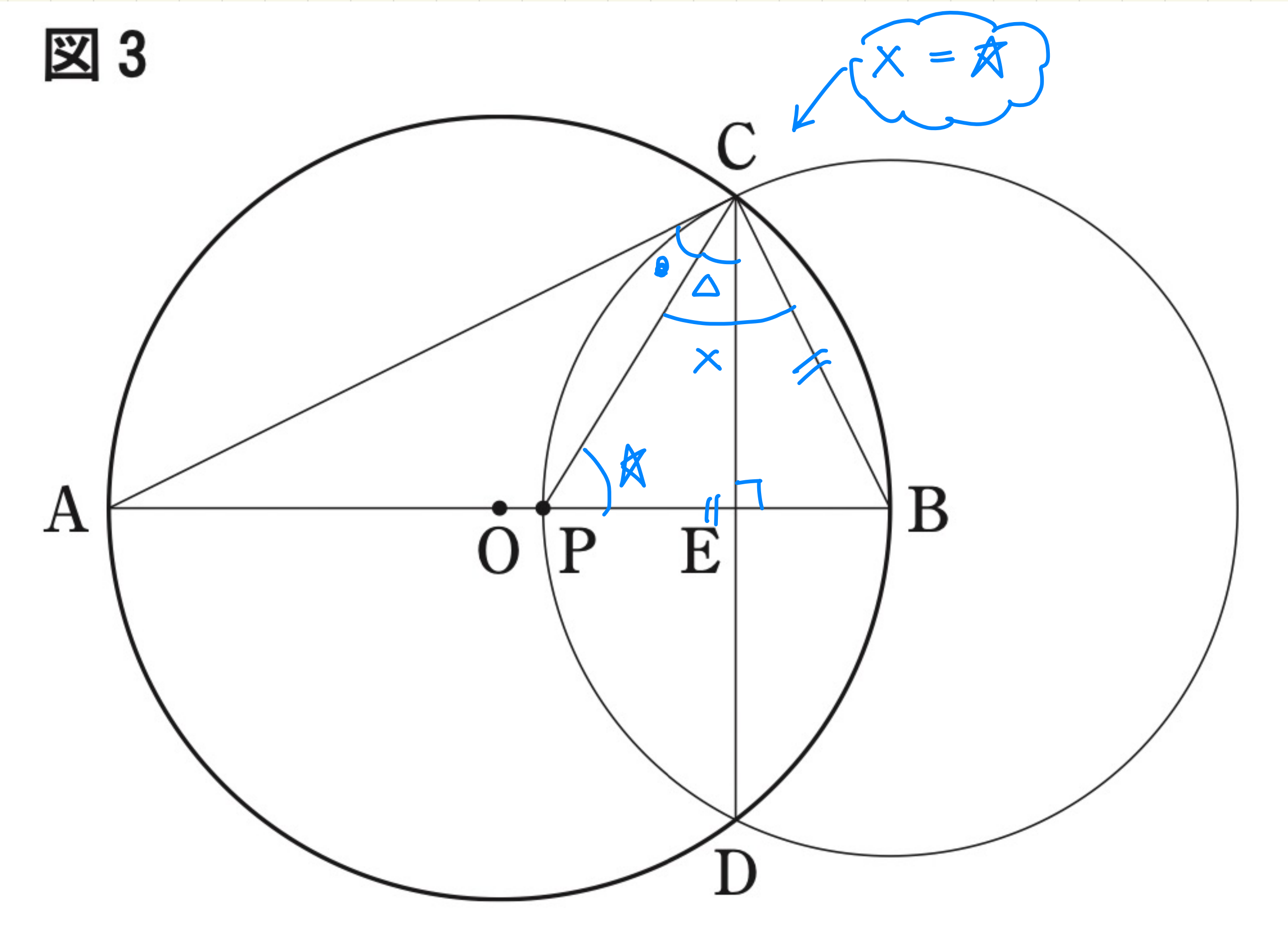
∠ABCは共通な角だから

∠ABC = ∠CBE ―②

①, ②より2組の角がそれぞれ等しいので

△ABC ∽ △CBE

図 3



[予想②の証明]

∠ACBは円Oの半円の弧に対する円周角だから

あ

∠ACB = 90°

∠ACB = ∠ACP + ∠PCB より

90°　●　×

∠ACP = 90° − ∠PCB ―①

●　×

AB ⊥ CD だから △CPE は ∠CEP = 90° の直角三角形であり

∠PCE = 90° − ∠CPE ―②

△　☆

う

BCとBPは円Bの半径なので BC = BP である。
△BCPにおいて、2つの辺が等しいので
△BCPは二等辺三角形である。

よって，$\angle PCB = \angle CPE$ ⓐ —— ③

×　☆

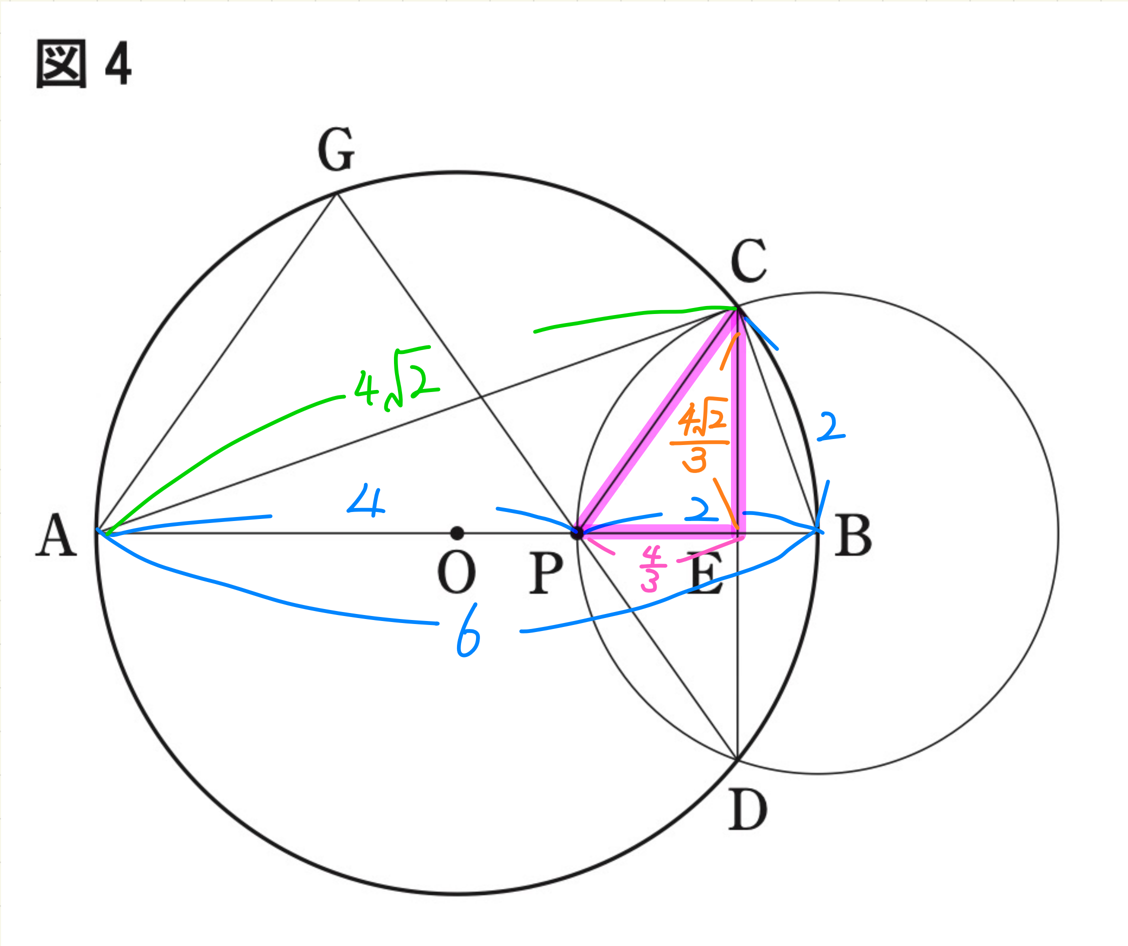
①，②，③ より $\angle ACP = \angle PCE$

●　△

したがって，線分CPは$\angle ACE$を二等分する．

(4)

①



$AP = 4\,cm$，$AB = 6\,cm$ より

$PB = 2\,cm$，$BC = 2\,cm$

円Bの半径より $PB = BC$

よって，$\triangle ABC$で三平方の定理より

$AC = \sqrt{6^2 - 2^2}$　$= \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

$= 4\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}\,cm$

(3) より点Pが線分AB上のどこにとっても

△ABC ∽ △CBE である。対応する辺の比は等しいので、

$$\underset{6}{\underline{AB}} : \underset{2}{\underline{CB}} = \underset{2}{\underline{BC}} : BE$$

よって、

$$6BE = 4 \Rightarrow BE = \frac{2}{3}\text{cm}$$

ゆえに

$$PE = 2 - \frac{2}{3}$$

$$= \underline{\frac{4}{3}\text{cm}}$$

同様に

$$\underset{6}{\underline{AB}} : \underset{2}{\underline{CB}} = \underset{4\sqrt{2}}{\underline{AC}} : CE$$

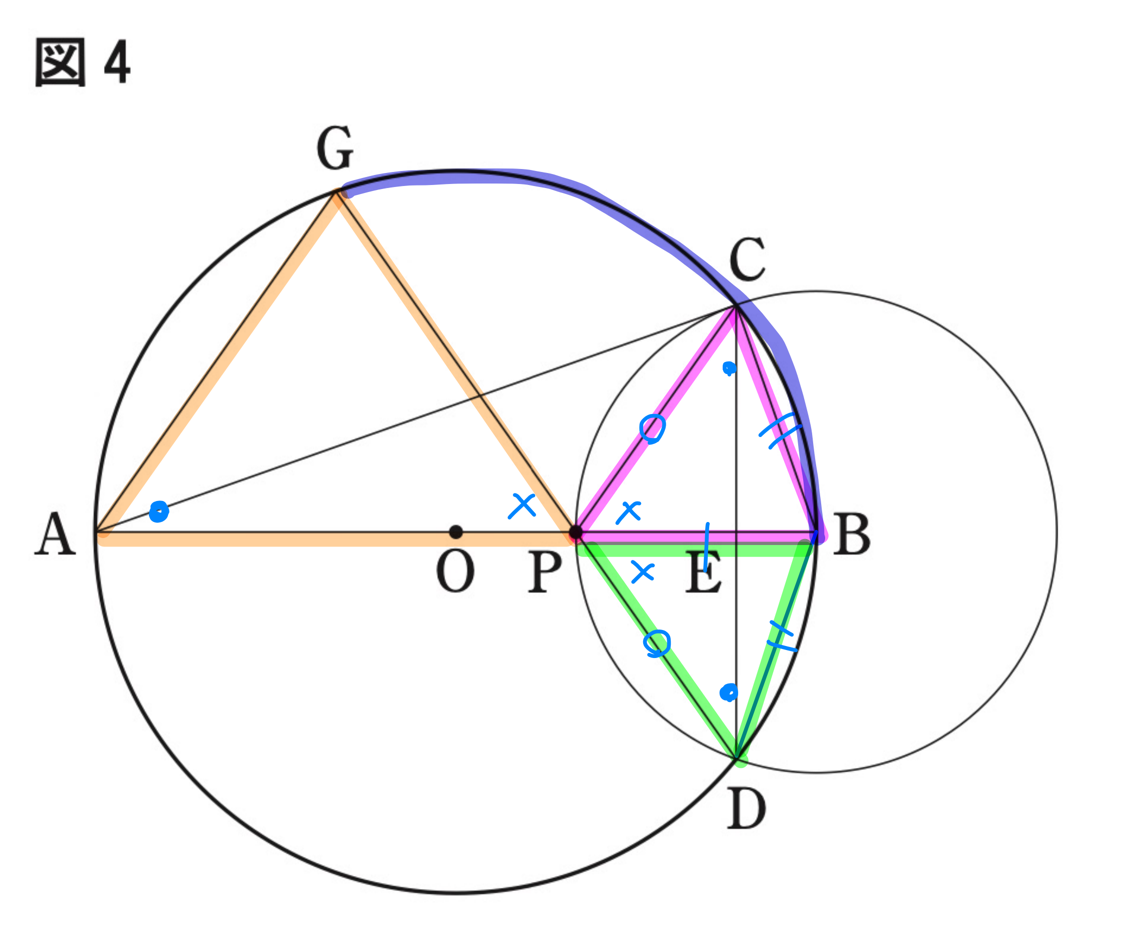
よって

$$6CE = 8\sqrt{2} \Rightarrow CE = \underline{\frac{4\sqrt{2}}{3}}\text{cm}$$

以上より △CEP の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \underline{\frac{8\sqrt{2}}{9}}\ \text{cm}^2$$

②



対称性から△BCP ≡ △BDP ―― ①

△BDP と △GAP において、

$\overset{\frown}{GB}$ に対する円周角は等しいから

∠BDP = ∠GAP ―― ②

対頂角は等しいから

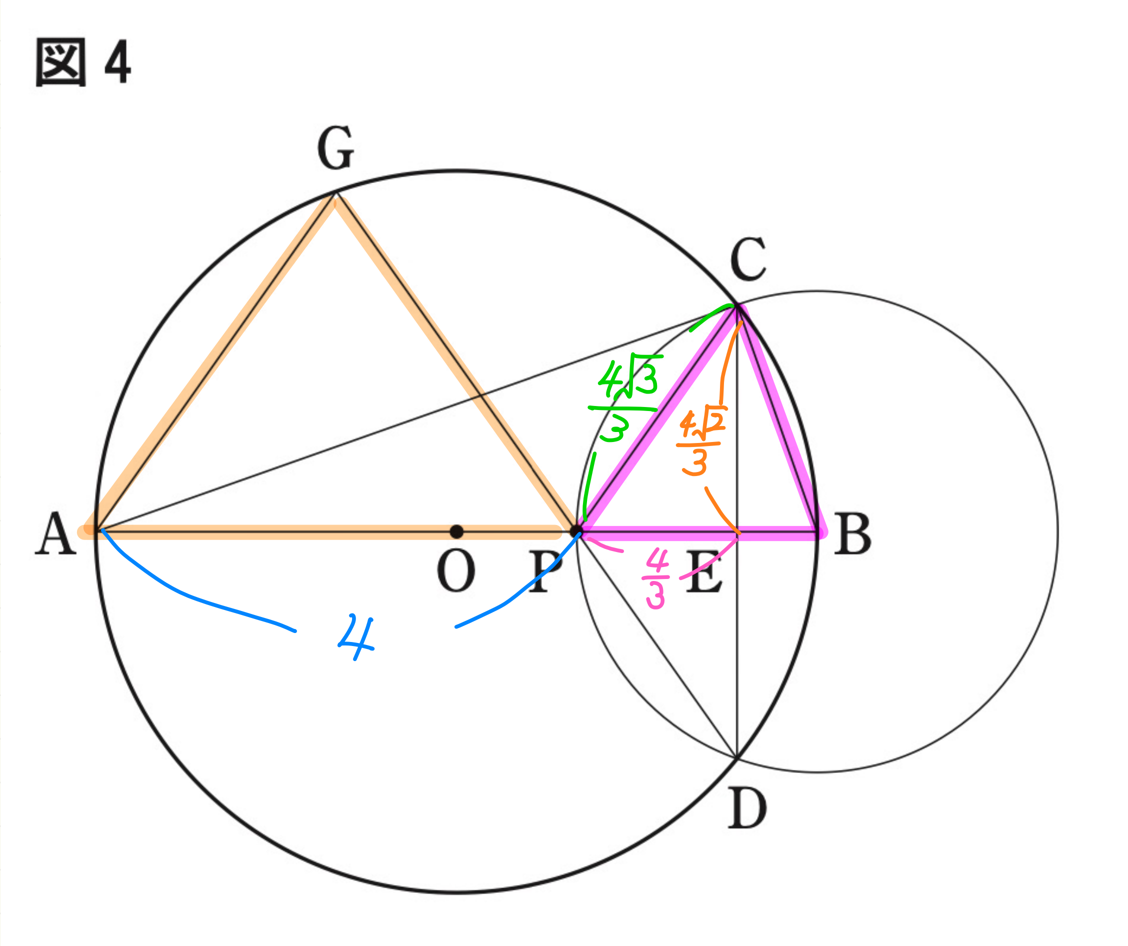
∠BPD = ∠GPA ―― ③

②、③より2組の角がそれぞれ等しいから

△BDP ∽ △GAP ―― ④

①、④より △GAP ∽ △BCP

図 4



①より $PE = \frac{4}{3}$ cm、$CE = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm より △CPE で

三平方の定理より

$$CP = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{32}{9}} = \sqrt{\frac{48}{9}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm} \qquad = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

よって △GAP と △BCP の相似比は

$$AP : CP = 4 : \frac{4\sqrt{3}}{3} \qquad = 12 : 4\sqrt{3}$$

$$= 3 : \sqrt{3} \qquad = 3 : \sqrt{3}$$

相似な三角形の面積比は、相似比の2乗に等しいので、

$$\triangle BCP : \triangle GAP = (\sqrt{3})^2 : 3^2$$
$$= 3 : 9$$
$$= 1 : 3$$