2023年度　長崎県

数学

Km Km

$\boxed{1}$

(1) 与式 $= 3 + 2 \times 9$

$= 3 + 18$

$= \underline{21}$

(2) 与式 $= 2x + 6y - x + 2y$

$= \underline{x + 8y}$

(3) 与式 $= \dfrac{\sqrt{2}+1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

※ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{2(\sqrt{2}+1) - 3\sqrt{2}}{6}$

$= \dfrac{2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{2}}{6}$

$= \underline{\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}}$

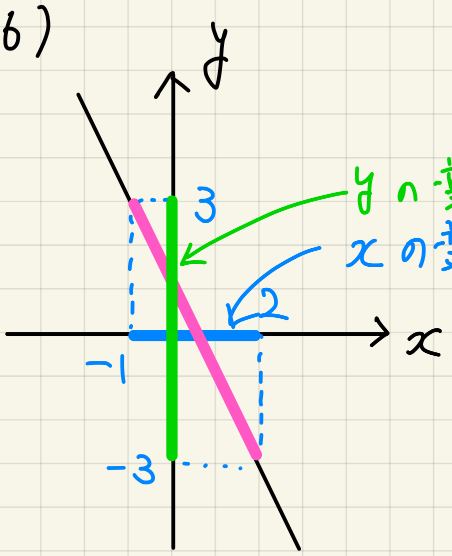
(4) 与式 $= \underline{(x+6)(x-1)}$

(5) 解の公式より

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2}$$

$$= \underline{\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}}$$

(6)



$x=-1$ のとき

$y=-2\times(-1)+1$

$=2+1=3$

$x=2$ のとき

$y=-2\times2+1$

$=-4+1=-3$

よって、y の変域は、$-3\leqq y\leqq 3$

(7)

2023を割り切れる自然数は、2023の約数である。2023の約数は、

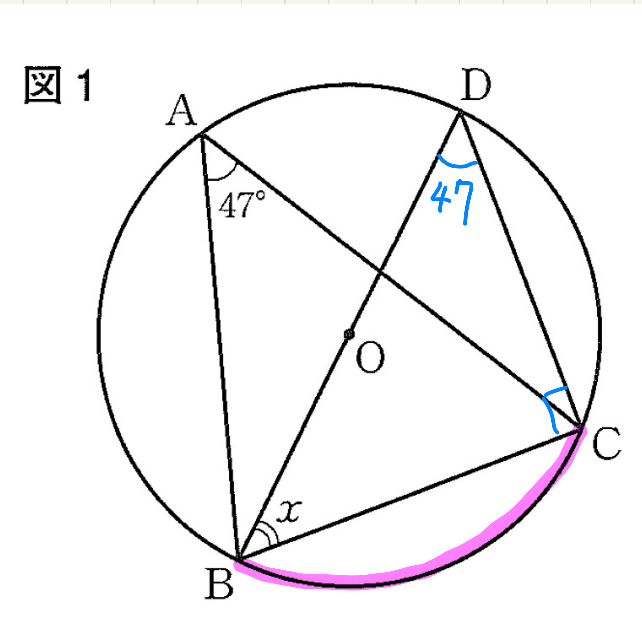
$1,\ 7,\ 17,\ \underbrace{7\times17}_{119},\ \underbrace{17\times17}_{289},\ \underbrace{7\times17\times17}_{2023}$

注 $2023=7\times17\times17$ より、2023の約数は、7, 17, 17 を組み合わせたかけ算

よって、2023の次に大きな自然数は、

$17\times17=289$

(8)



$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角より

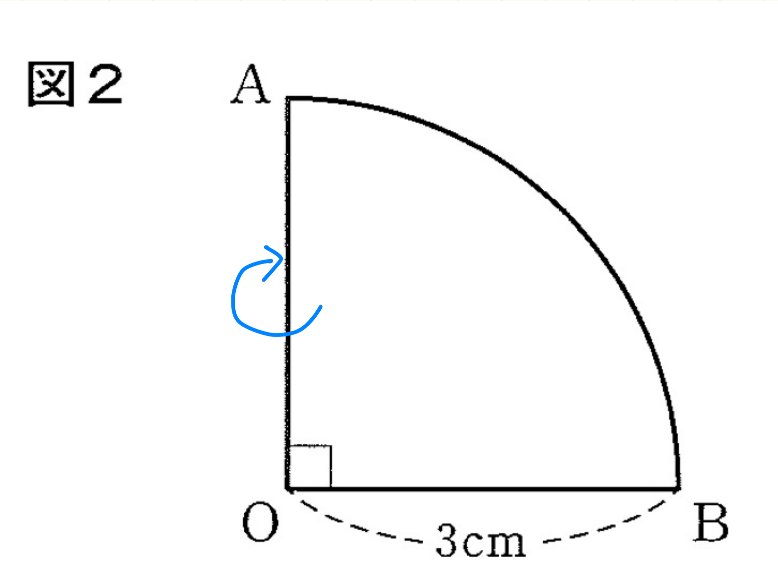
$\angle BDC=\angle BAC=47°$

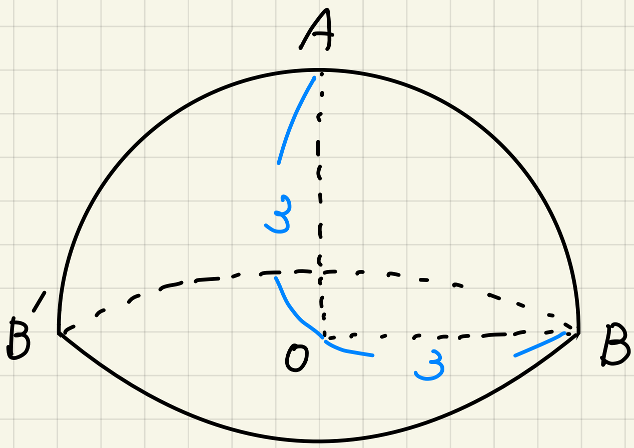
$\angle DCB$ は直径に対する円周角なので、$\angle DCB=90°$

よって、$\triangle BCD$ で三角形の内角の和は $180°$ なので、

$\angle x=180°-90°-47°=43°$

(9)

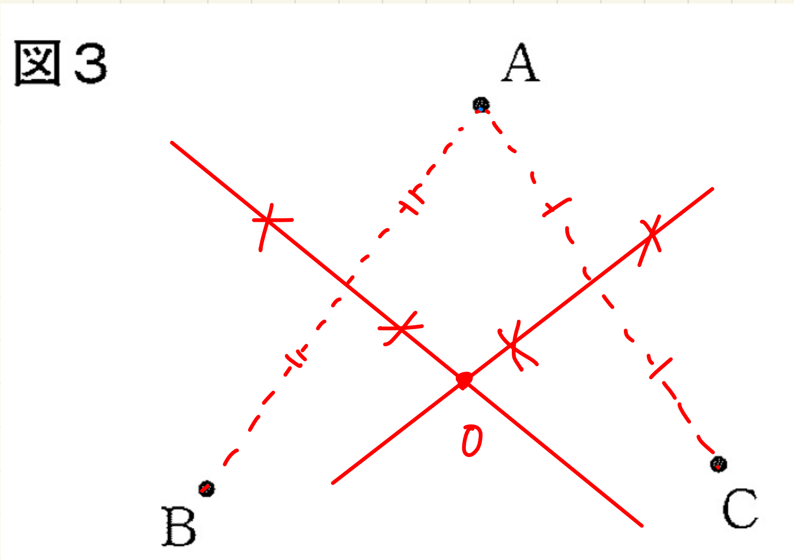




おうぎ形OABを,線分OAを軸として回転してできる立体は,半球である。よって体積は

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi \times 3^3}_{\text{球の体積}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{半分}} = 18\pi \ cm^3$$

(10)



①線分AB,ACの垂直二等分線を作図

②交点がOである

2 問1

下位データ　　　　　　　　　　上位データ　　　　　　最大値

9,	10,	11,	12,	13,	14,	14,	16,	17,	17,	20,	21

最小値

第3四分位数 $= \dfrac{17+17}{2} = 17$

中央値 $= \dfrac{14+14}{2} = 14$

第1四分位数 $= \dfrac{11+12}{2} = 11.5$

(1) 中央値は14冊

(2)

①：第1四分位数は11.5冊なので誤り

②：最頻値は14冊，17冊なので誤り

最も多く現れるデータ

③：四分位範囲 = 第3四分位数 − 第1四分位数

$= 17 - 11.5 = 5.5$冊

よって正しい

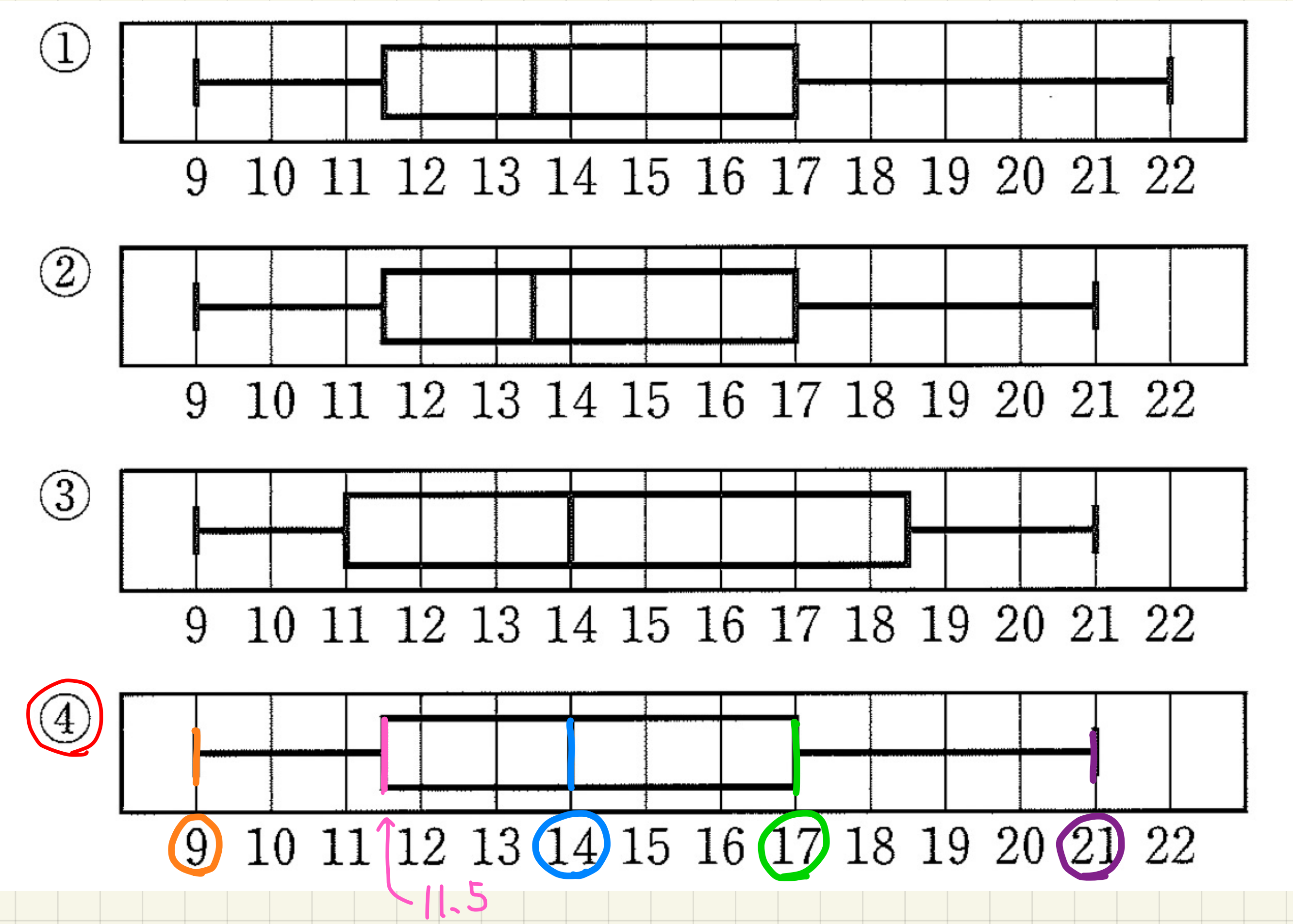
④：

$$平均 = \frac{9+10+11+12+13+14+14+16+17+17+20+21}{12}$$

$$= \frac{174}{12} = 14.5冊$$

よって誤り

(3)



問2

(1) 4つの玉から「4」が書かれている玉を1個取り出すので、確率は $\frac{1}{4}$

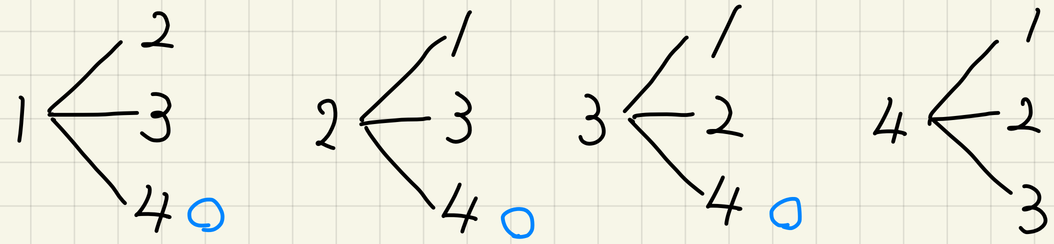
(2) 1回目：4つの玉から「1」,「2」,「3」のいずれかの玉を取り出すので、確率は $\frac{3}{4}$

2回目：3つの玉から「4」を1個取り出すので確率は $\frac{1}{3}$

よって、求める確率は

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

(別解) 樹形図は以下の通り



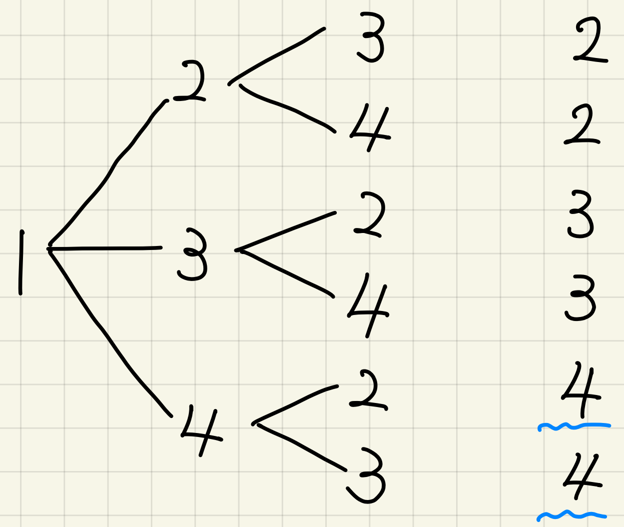
玉の取り出し方は全部で12通り。そのうち
2回目に「4」を取り出す方法は3通り。
よって、求める確率は

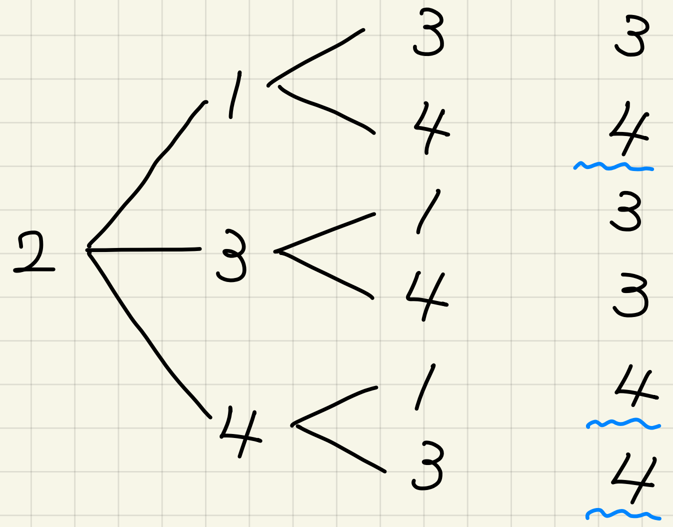
$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

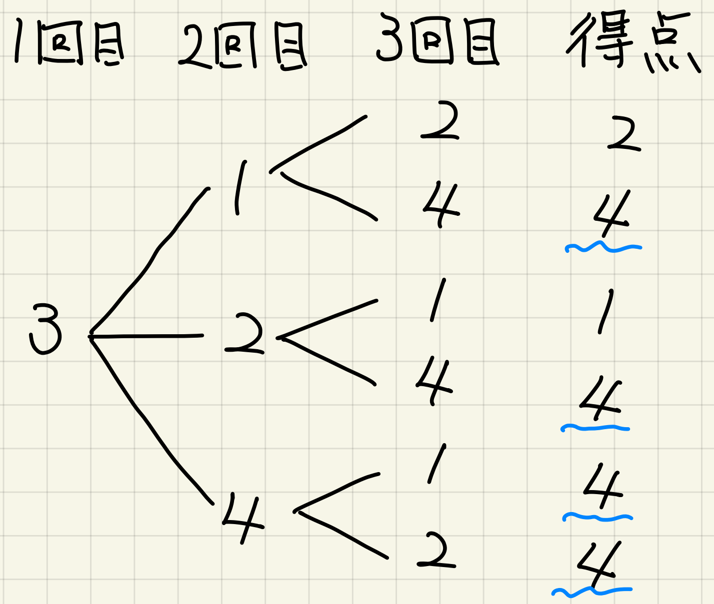
(3)

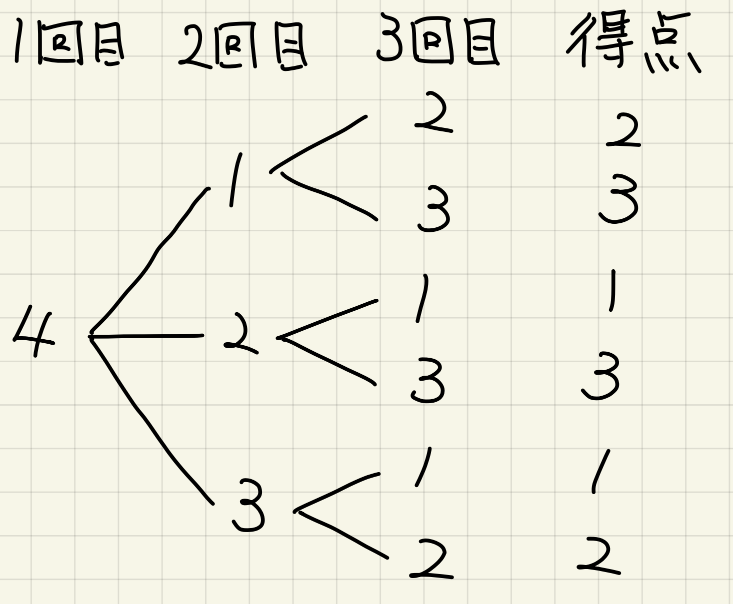
㋐：1回目の玉 < 2回目の玉 ⇒ 得点は2回目の玉
㋑：1回目の玉 > 2回目の玉 ⇒ 得点は3回目の玉

1回目　2回目　3回目　得点　　1回目　2回目　3回目　得点









樹形図より，玉を3回取り出す場合の数は 24通り。そのうち，得点が4点となるのは 9通り。
よって，求める確率は

$$\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

問3

nを整数とし，2つの続いた偶数のうち，小さいほうの偶数を2nとすると，大きいほうの偶数は 2n+2 と表される。

$$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1$$
$$=(2n+1)^2$$

nは整数なので，2n+1は2nと2n+2の間の奇数である。
よって，2つの続いた偶数の積に1を加えると，その2つの偶数の間の奇数の2乗となる。

$\boxed{3}$

(1) 点Aは $y=\frac{1}{4}x^2$ 上にあり、$x=-4$ なので、

$$y=\frac{1}{4}\times(-4)^2$$
$$=4$$

よって、Aの y 座標は 4

(2) 点Bは $y=\frac{1}{4}x^2$ 上にあり、$x=2$ なので、

$$y=\frac{1}{4}\times 2^2$$
$$=1 \qquad \therefore B(2,1)$$

直線の傾きは変化の割合と等しいので、

$$傾き=\frac{y の増加量}{x の増加量}$$

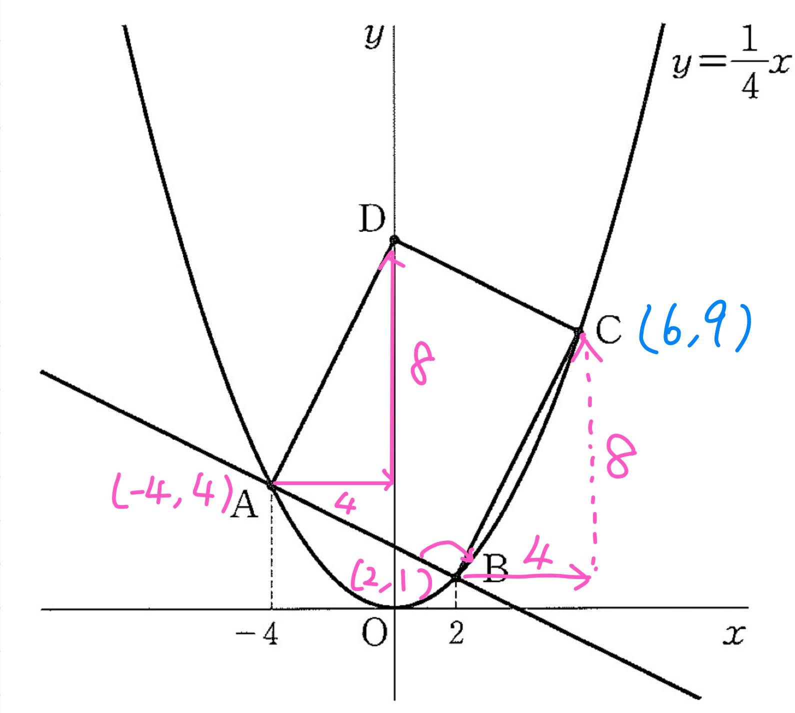
$$=\frac{1-4}{2-(-4)}$$ … A → B の増加量

$$=-\frac{1}{2}$$

問3

(1)

図2



また、点Dはy軸上にあるので、点Dのx座標は、点Aのx座標より右に4進んだところにある。
□ABCDは平行四辺形なので、点Dのx座標は、点Bのx座標より右に4進んだところにある。
よって、点Cのx座標は

$$2+4=6$$

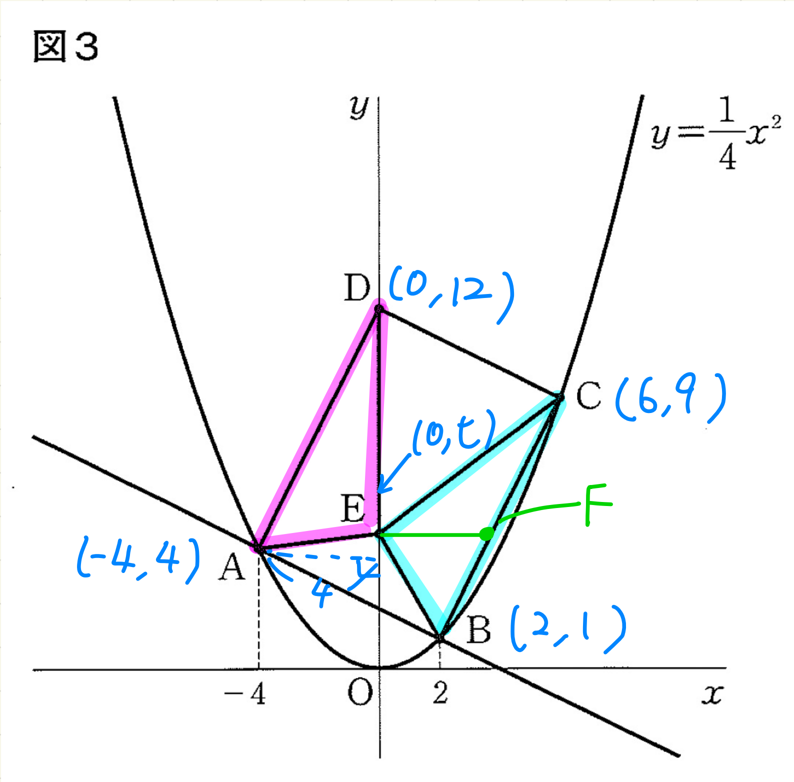
(2) 点Cは$y=\frac{1}{4}x^2$上にあり、$x=6$なので、

$$y=\frac{1}{4}\times 6^2=9 \qquad \therefore\ C(6,9)$$

(1)と同様に、点Cのy座標は、点Bのy座標より8大きいので、点Dのy座標も点Aのy座標より8大きい。よって、点Dのy座標は

$$4+8=12$$

(3)

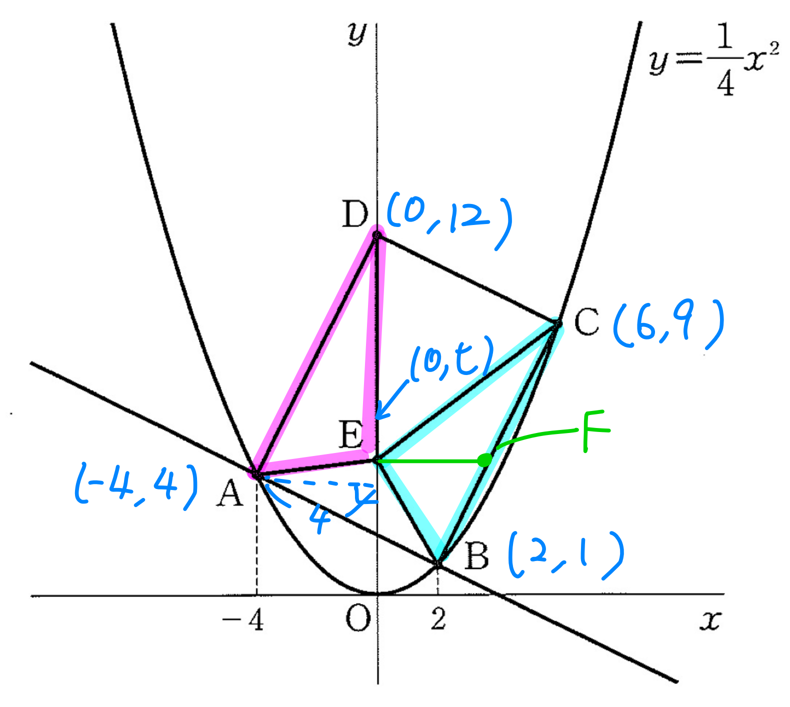


点Eの座標を$(0,t)$とする。
また、点Eからx軸に平行な線を引き、BCとの交点をFとする。

DE $=12-t$ より
△ADEの面積は
$$\frac{1}{2}\times(12-t)\times 4$$
$$=2(12-t) \text{ ——— ①}$$

次に△BCEの面積を△BFEと△EFCに分ける。
直線BCの式を $y=ax+b$ とおくと、
$$a=\frac{yの増加量}{xの増加量}$$
$$=\frac{9-1}{6-2}$$ … B→Cの増加量
$$=2$$
よって、$y=2x+b$ で C$(2,1)$を通るので、
$$1=2\times 2+b \Rightarrow b=-3$$
したがって、直線BCの式は $y=2x-3$ である。
点Fは $y=2x-3$ 上にあり、$y=t$ なので
$$t=2x-3$$
$$2x=t+3$$
$$\therefore x=\frac{t+3}{2} \qquad \therefore F\left(\frac{t+3}{2},\ t\right)$$

図3



よって，△BCE の面積は

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{t+3}{2}\times(t-1)}_{\triangle BFE}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{t+3}{2}\times(9-t)}_{\triangle EFC}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{t+3}{2}\times\{(t-1)+(9-t)\}$$

$$=\frac{t+3}{4}\times 8$$

$$=2(t+3) \quad \text{——} \quad ②$$

△ADE と △BCE の面積が等しいので，

$$2(12-t)=2(t+3) \quad \cdots\cdots ①=②$$

$$24-2t=2t+6$$

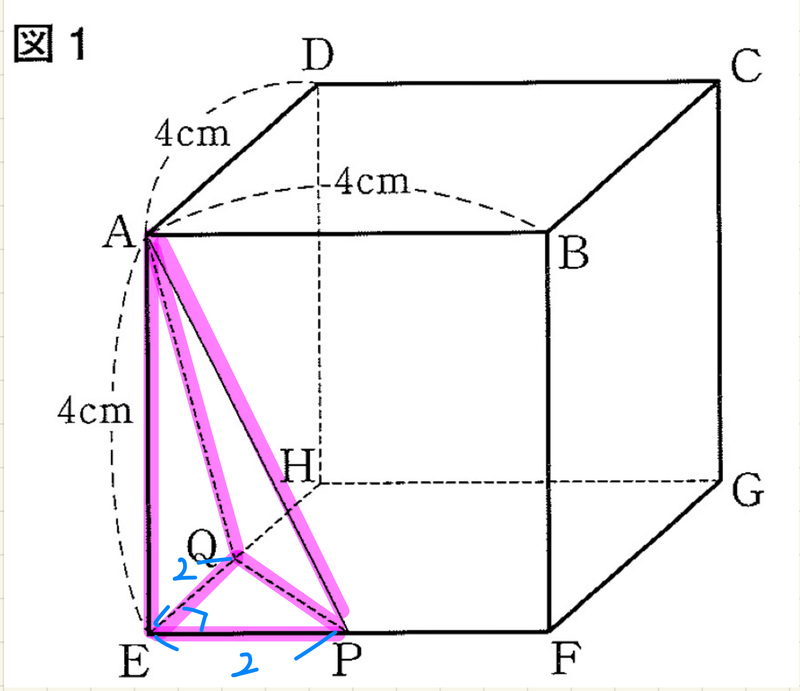
$$4t=18 \Rightarrow t=\frac{9}{2}$$

よって，点Eのy座標は $\frac{9}{2}$ である。

$\boxed{4}$

問1

図1



三角錐AEPQの体積は.

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times 2\times 2}_{\triangle EPQ}\times \underbrace{4}_{高さ}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{8}{3}\ \text{cm}^3$$

問2

PQ

$\triangle EPQ$で三平方の定理より

$$PQ=\sqrt{2^2+2^2}\quad =\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

BP

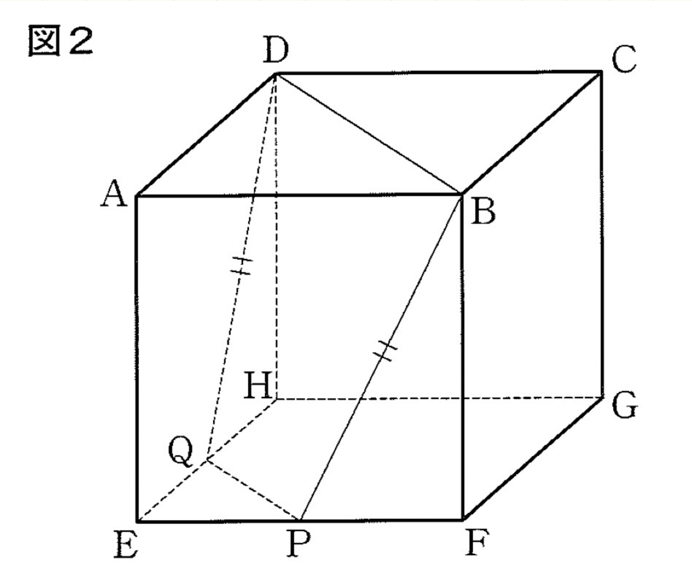
$\triangle BPF$で三平方の定理より

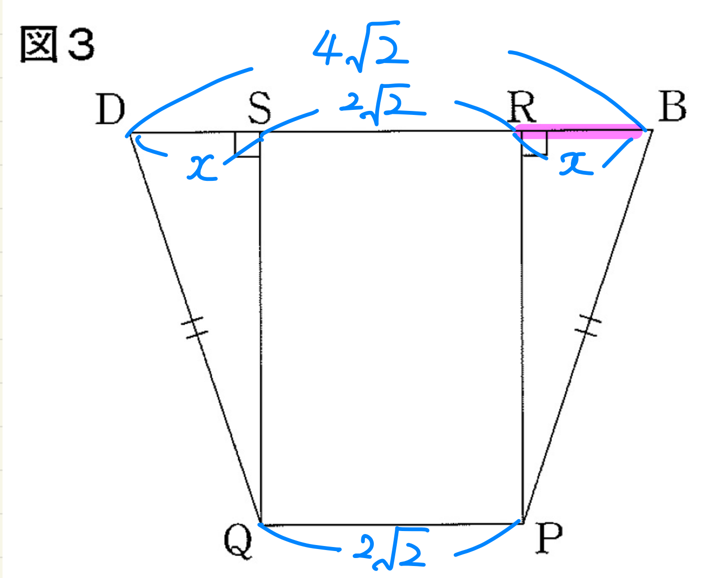
$$BP=\sqrt{2^2+4^2}\quad =\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$=2\sqrt{5}\ \text{cm}$$

問3

(1)





△ABDで三平方の定理より

$$BD = \sqrt{4^2 + 4^2} \quad = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

問2より $PQ = 2\sqrt{2}$

$BR = x$ cm とすると，左右対称な図形より

$DS = x$ cm。よって

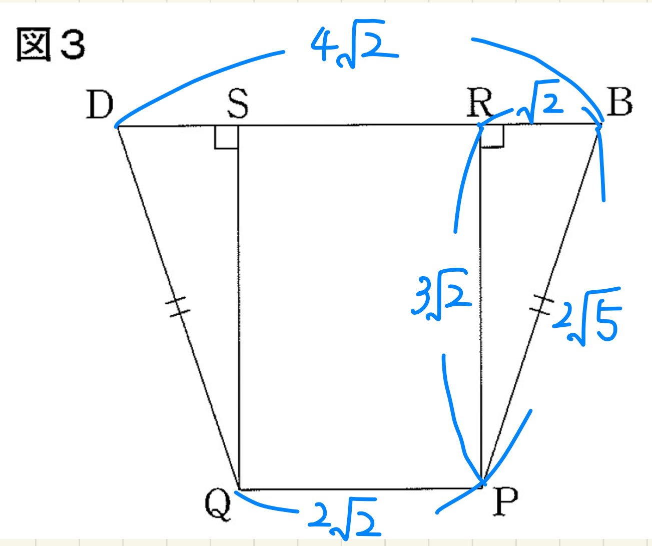
$$x + 2\sqrt{2} + x = 4\sqrt{2}$$

$$2x = 2\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

よって，$BR = \sqrt{2}$ cm

(2)



△BPRで三平方の定理より

$$PR=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$

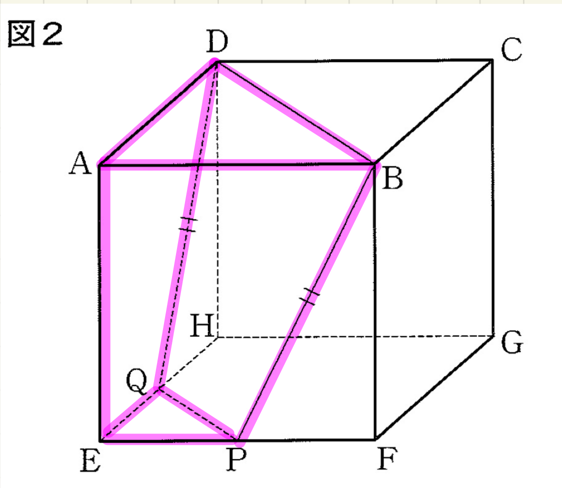
$$=\sqrt{20-2} \quad =\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

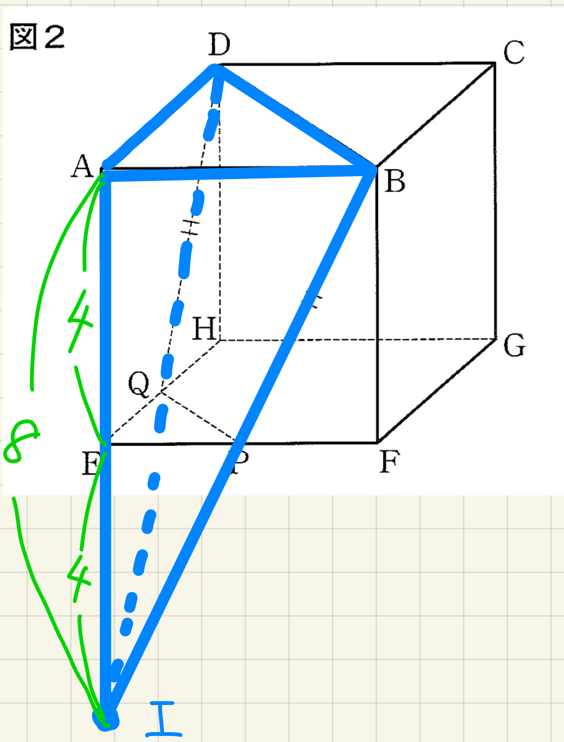
$$=3\sqrt{2}\text{ cm}$$

よって、台形BDQPの面積は

$$\frac{(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2}=18\text{ cm}^2$$

(3)





AE, BP, DQの延長線が交わる点をIとする。

求める体積は

(三角錐I-ABD) − (三角錐I-EPQ)である。

三角錐I-ABD ∽ 三角錐I-EPQであり、
AD = 4 cm, EQ = 2 cm から、三角錐の相似比
は 4 : 2 = 2 : 1 である。
よって、

$$IA : \underbrace{EA}_{4} = 2 : 1 \Rightarrow IA = 8\text{ cm}$$

三角錐I-ABDの体積

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 8 \times \frac{1}{3} = \frac{64}{3}$$

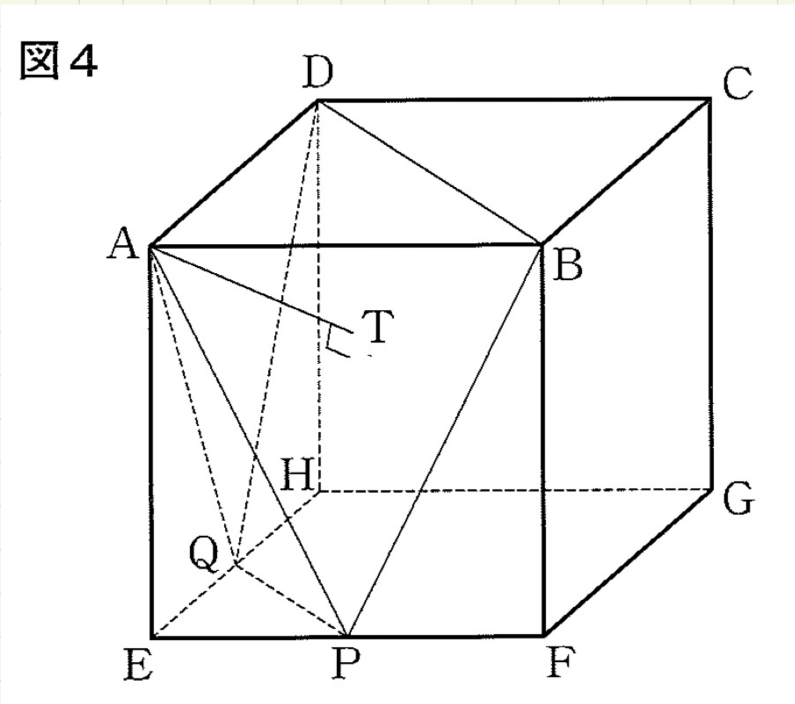
三角錐I-EPQの体積

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

よって、求める体積は

$$\frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}\text{ cm}^3$$

問4



四角錐A-BDQPの体積は、
(立体ABDEPQ) − (三角錐A-EPQ)である。

立体ABDEPQの体積は
問3より $\frac{56}{3}$ cm^3 であり、
三角錐A-EPQの体積は

$$\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 4\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\ \text{cm}^3$$

である。よって、四角錐A-BDQPの体積は

$$\frac{56}{3}-\frac{8}{3}=\frac{48}{3}=16\ \text{cm}^3 \quad \text{——} ①$$

一方、四角錐A-BDQPは、底面を台形BDQPとすると、高さがATである。台形BDQPの面積は、問3(2)より$18\ \text{cm}^2$なので、四角錐A-BDQPの体積は、

$$18\times AT\times\frac{1}{3}=6\cdot AT \quad \text{——} ②$$

①＝②より

$$6AT=16$$

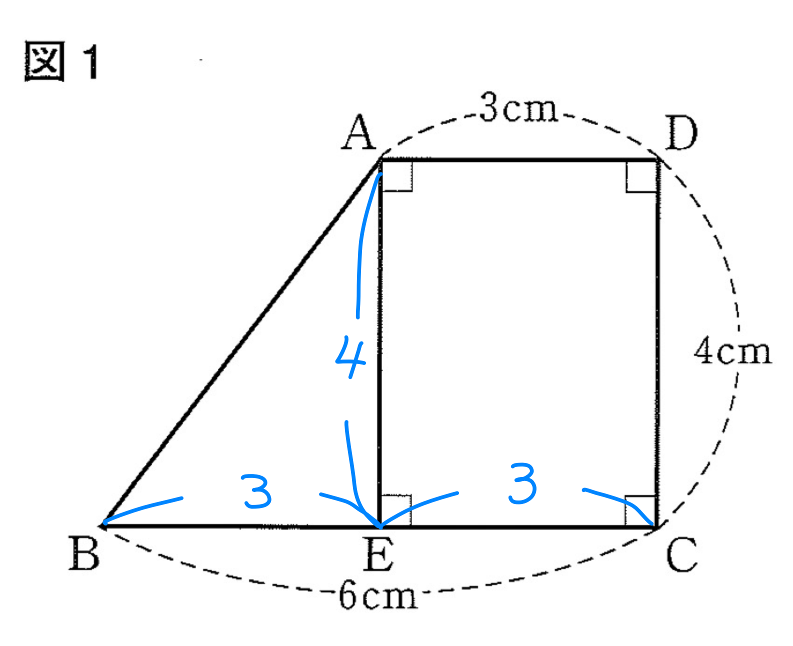
$$AT=\frac{16}{6}$$

$$=\frac{8}{3}\ \text{cm}$$

5

(1)

図1

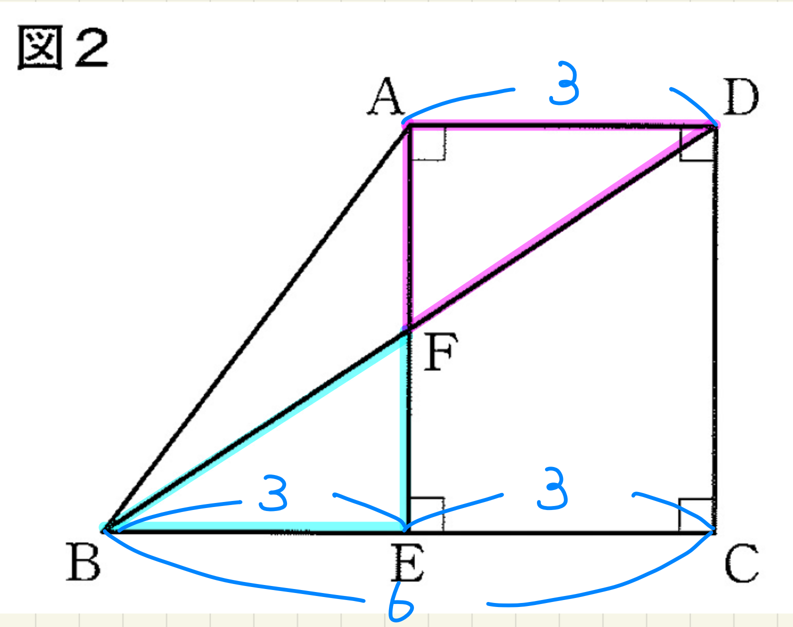


$\triangle ABE$の面積は

$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \ \text{cm}^2$

(2)

図2



$\triangle DAF$と$\triangle BEF$において，□AECDは長方形であるから，

$BE = BC - EC = 3\text{cm}$

となり

$DA = BE$ ―― ①

また，AD // BCであり，平行線の錯角(P)は等しいので

$\angle ADF = \angle EBF$ ―― ②

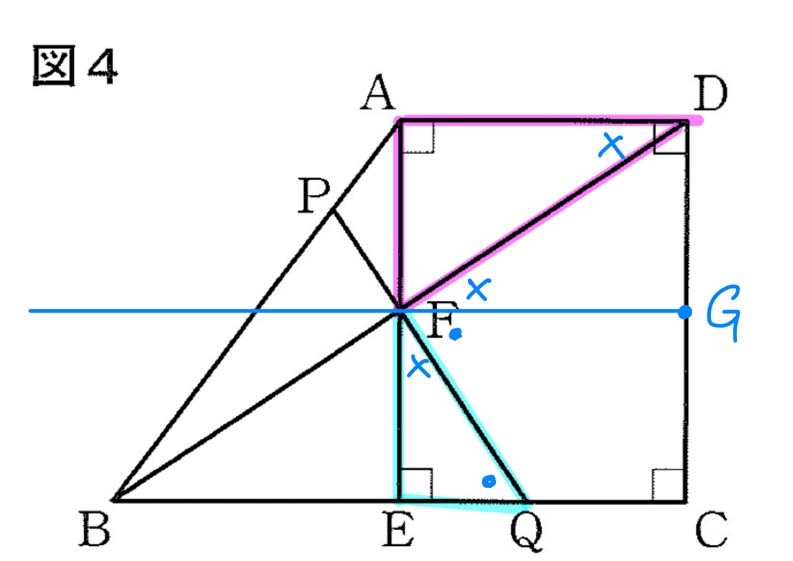
$\angle DAF = \angle BEF$ ―― ③

①，②，③より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle DAF \equiv \triangle BEF$（証明終わり）

問3

(1)



左図のように、点Fを通りBCと平行な線分を描く。これとDCとの交点をGとする。

△DAFと△FEQにおいて、

$\angle DAF = \angle FEQ = 90^\circ$ ——①

FG//BCより錯角が等しいので、

$\angle EQF = \angle GFQ$ ——②

△FEQの内角の和から

$\angle EFQ = 90^\circ - \angle EQF$ ——③

PQは折り返しなので、$PQ \perp BD$。よって、

$\angle DFQ = 90^\circ$

$\therefore \angle DFG = 90^\circ - \angle GFQ$ ——④

③,④より、

$\angle EFQ = \angle DFG$ ——⑤

AD//FGより錯角が等しいので、

$\angle FDA = \angle DFG$ ——⑤

⑤,⑥より

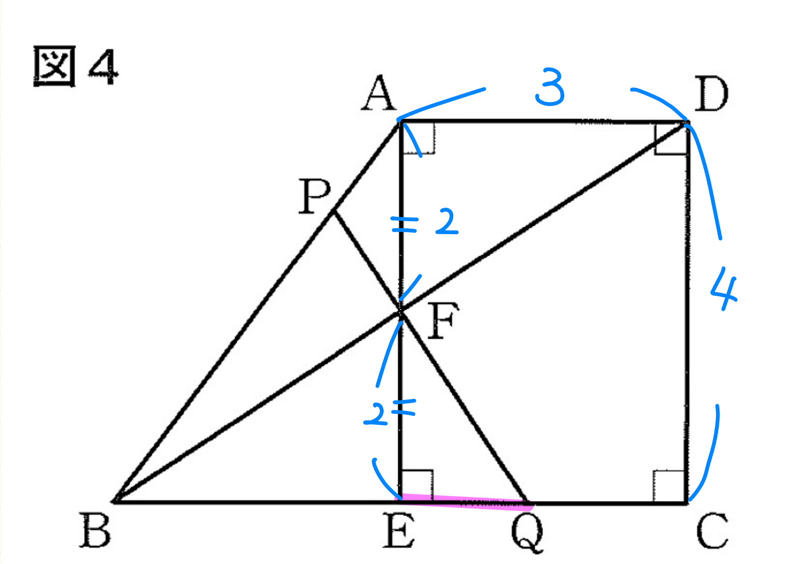
$\angle EFQ = \angle FDA$ ——⑦

①,⑦より2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle DAF \sim \triangle FEQ$

よって、△DAFと相似な三角形は、△FEQ ②

(2)



問2より $\triangle DAF \equiv \triangle BEF$ なので、対応する辺は等しいから、

$AF = EF$

よって、点Fは、AEの中点である。

ゆえに、

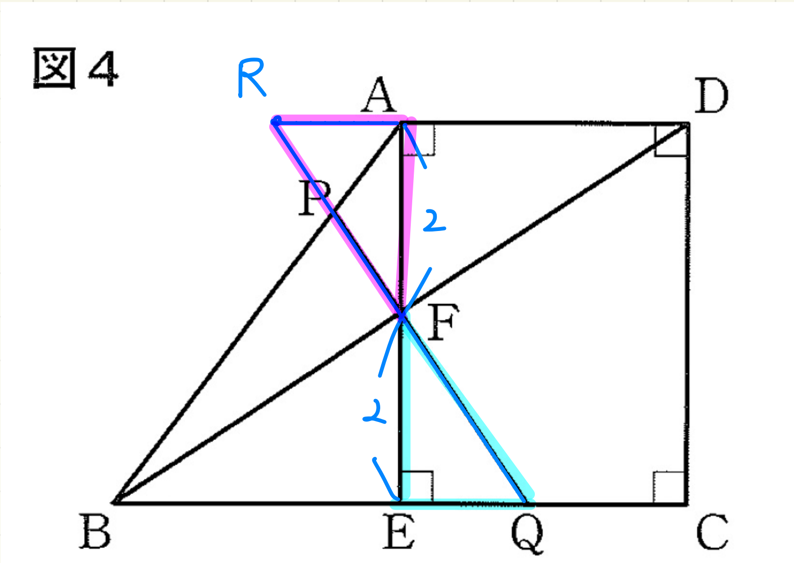
$AF = EF = 2cm.$

(1)より $\triangle DAF \backsim \triangle FEQ$ で、対応する辺の比は等しいから、

$\underbrace{DA}_{3} : \underbrace{FE}_{2} = \underbrace{AF}_{2} : EQ$

$\therefore\ 3EQ = 4 \quad \Rightarrow \quad EQ = \frac{4}{3}\ cm$

(3)



左図のようにADとPQの延長線の交点をRとする。

△AFRと△EFQにおいて,

$AF = EF = 2\,cm$ —— ①

$\angle FAR = \angle FEQ = 90°$ —— ②

対頂角は等しいから

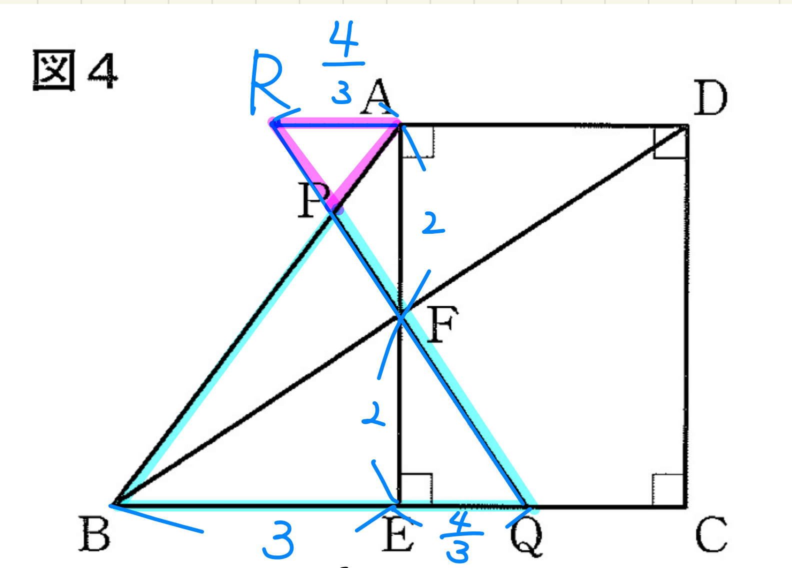
$\angle AFR = \angle EFQ$ —— ③

①、②、③より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AFR \equiv \triangle EFQ$

対応する辺の長さは等しいので.

$AR = EQ = \frac{4}{3}\,cm$



また、△APRと△BPQにおいて，AR//BQより錯角が等しいので，

$\angle PAR = \angle PBQ$ —— ④

$\angle PRA = \angle PQB$ —— ⑤

④,⑤より2組の角がそれぞれ等しいので，$\triangle APR \backsim \triangle BPQ$.

対応する辺の比は等しいので.

$$AP : PB = AR : BQ$$

$$= \frac{4}{3} : \left(3 + \frac{4}{3}\right)$$

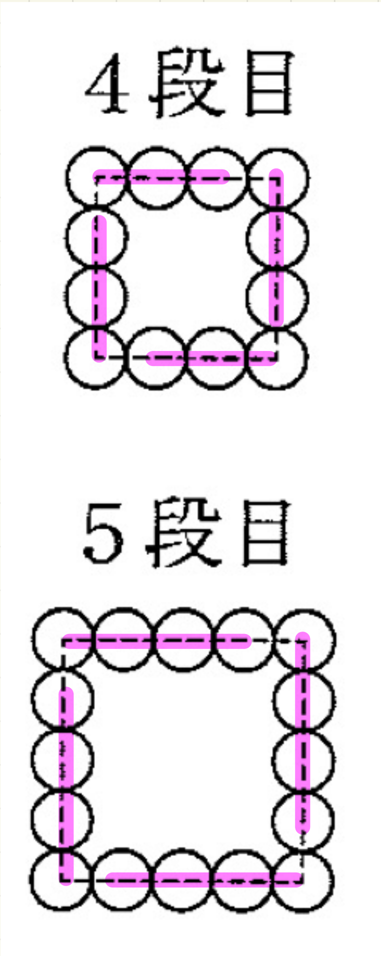
$$= \frac{4}{3} : \frac{13}{3}$$

$$= 4 : 13$$

6

問1

ア



左図の ━━ のように電球を分ける

4段目 ⇒ $\underbrace{3}_{(4-1)} \times 4 = 12$個

5段目 ⇒ $\underbrace{4}_{(5-1)} \times 4 = 16$個

よって、6段目は

$\underbrace{5}_{(6-1)} \times 4 = 20$個

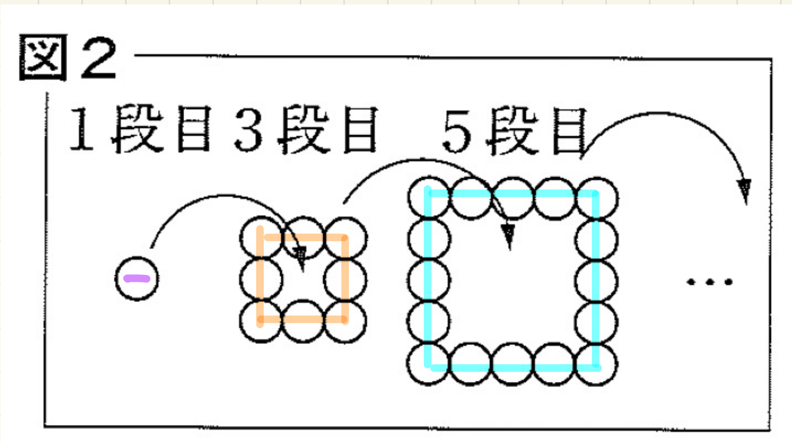
イ

1段目〜6段目の電球の合計は

$1 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20$

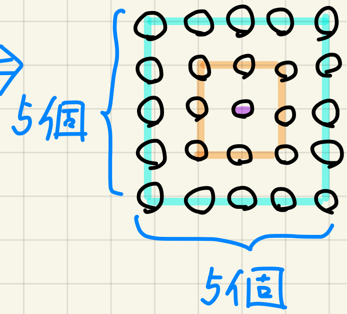
$= 61$個

ウ



1段目+3段目+5段目

⇒



1段目＋3段目＋5段目の電球の合計は

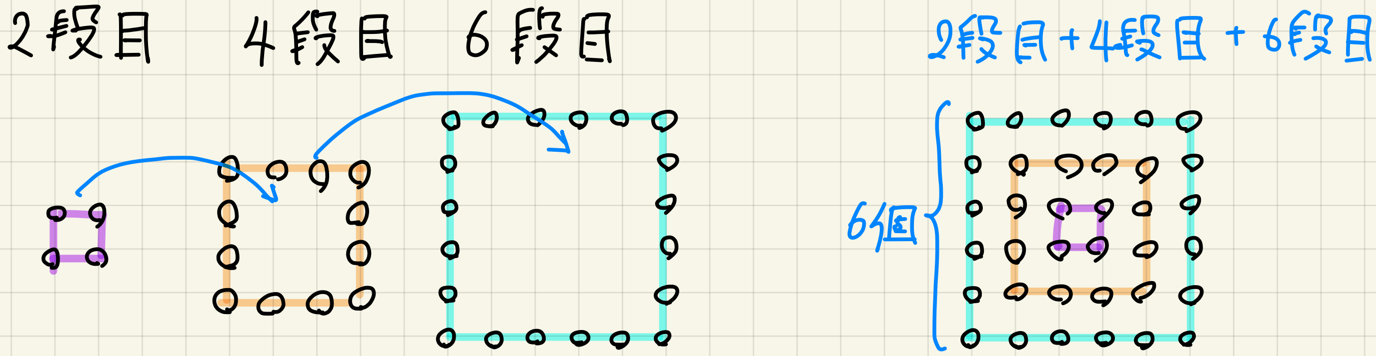
$5 \times 5 = 25$ 個

よって、1段目、3段目、5段目、…、39段目の電球の合計は

39×39 個 ——— ①

エ

偶数段目のとき



2段目＋4段目＋6段目の電球の合計は

$6 \times 6 = 36$ 個

よって、2段目、4段目、6段目、…、40段目の電球の合計は

40×40 個 ——— ②

①、②より、1段目～40段目の電球の合計は

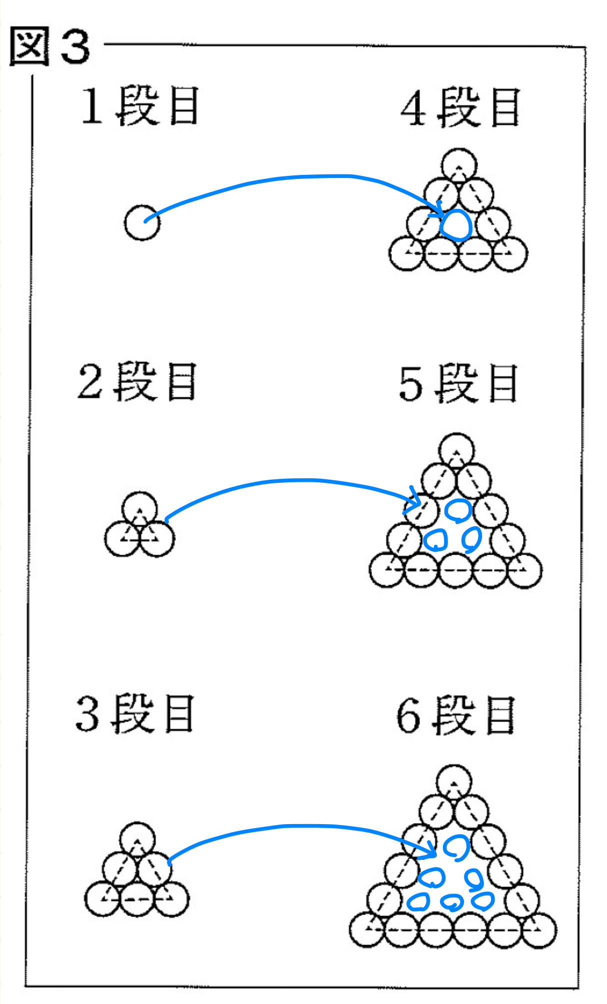
$39 \times 39 + 40 \times 40$

$= 1521 + 1600$

$= 3121$ 個

問2

オ，カ，キ



左図のように，1段目から6段目を

1段目と4段目

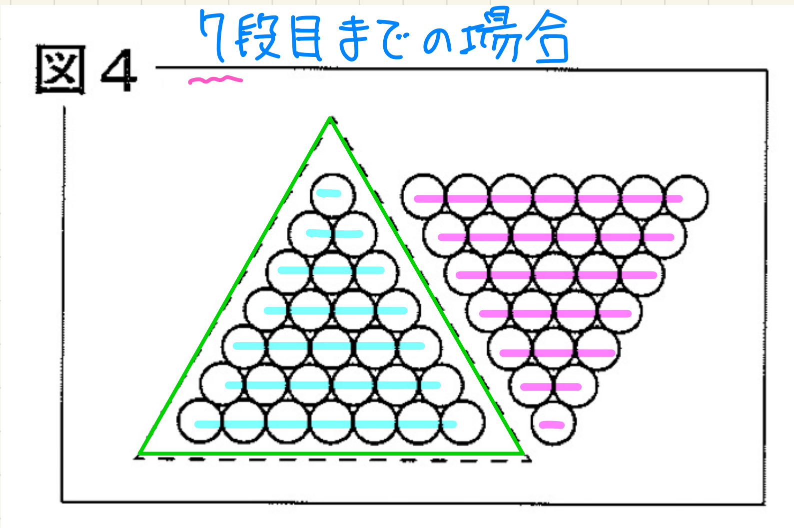
2段目と5段目

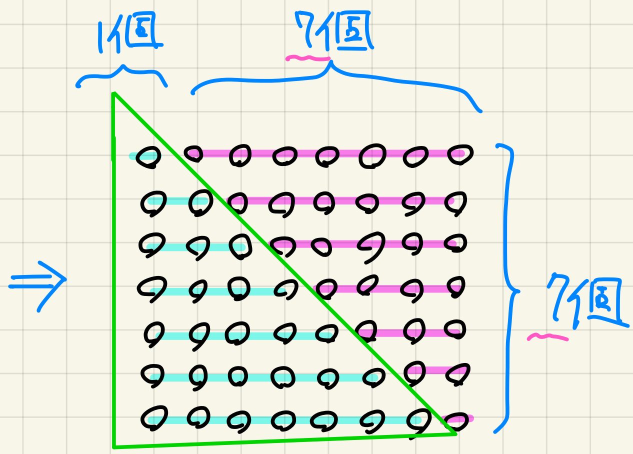
3段目と6段目

の3組に分けてみると，それぞれをしきつめることができる。

問3

ク，ケ





— と — の電球の数は等しい。

よって，点線で囲まれた電球の個数は

$$\frac{7\times(7+1)}{2}$$

という計算式でできる。

問4.

1段目から40段目を3つの組に分ける.

- 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40

段目の合計は

$$\frac{40\times(40+1)}{2} = 20\times 41 = 820\text{個}$$

$\frac{40\times41}{2} = 20\times21$

- 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38

段目の合計は

$$\frac{38\times(38+1)}{2} = 19\times 39 = 741\text{個}$$

$\frac{38\times39}{2} = 19\times39$

- 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39

段目の合計は.

$$\frac{39\times(39+1)}{2} = 39\times 20 = 780\text{個}$$

$\frac{39\times40}{2} = 39\times20.$

よって, 1段目から40段目の電球の合計は

$$820+741+780 = 2341\text{個}$$