2023年度　大阪府

数学　B問題

Km Km

1.

(1) 与式 $= -6 - 16$

$= \underline{-22}$

(2) 与式 $= 10a + 5b - 4a - 12b$

$= \underline{6a - 7b}$

(3) 与式 $= \dfrac{2a \times 9ab}{6a^2}$

$= \underline{3b}$

(4) 与式 $= x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x$

$= \underline{2x^2 + 1}$

(5) 与式 $= (2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2$

$= 20 - 3$

$= \underline{17}$

2.

(1) $a^2 - 8b = (-6)^2 - 8 \times 5$

$= 36 - 40$

$= \underline{-4}$

(2) $x^2 - 11x + 18 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-9) = 0$

$\therefore \underline{x = 2, 9}$

(3) $\dfrac{78}{n}$ が自然数となるのは、n が78の約数のときである。78の約数は、

$2, 3, 6, 13, 26, 39, 78$

$5-\dfrac{78}{n}$ が自然数となるためには、

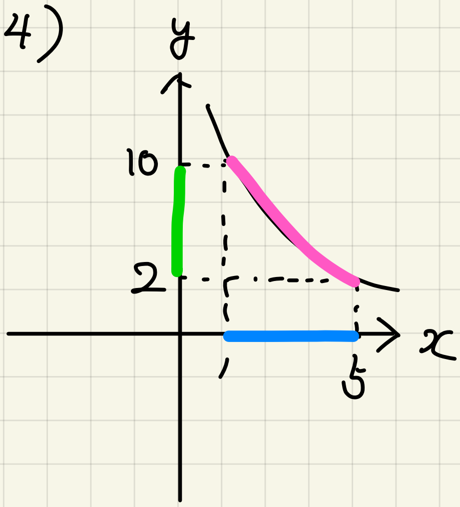
$$5 > \frac{78}{n}$$

を満たす必要がある。これを満たす n は、

$n = 26, 39, 78$

よって、最も小さい n は 26 である。

(4)



$x=1$ のとき、$y=10$

$x=5$ のとき $y=2$

よって、x が1から5まで増加するときの変化の割合は、

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{2-10}{5-1}$$

$$= \frac{-8}{4}$$

$$= -2$$

(5) 樹形図は以下の通り

A	B	$\frac{b}{a}$	
1	1	1	×
	3	3	○
	5	5	×
	7	7	×
	9	9	×

A	B	$\frac{b}{a}$	
2	1	$\frac{1}{2}$	×
	3	$\frac{3}{2}$	○
	5	$\frac{5}{2}$	○
	7	$\frac{7}{2}$	○
	9	$\frac{9}{2}$	×

A	B	$\frac{b}{a}$	
3	1	$\frac{1}{3}$	×
	3	1	×
	5	$\frac{5}{3}$	○
	7	$\frac{7}{3}$	○
	9	3	○

カードの取り出し方は全部で15通り。そのうち $\frac{b}{a}$ が1より大きく4より小さい取り出し方は7通り。

よって、求める確率は $\frac{7}{15}$

注 1より大きい ⇒ 1は含まない

4より小さい ⇒ 4は含まない

イ、オ

(6)

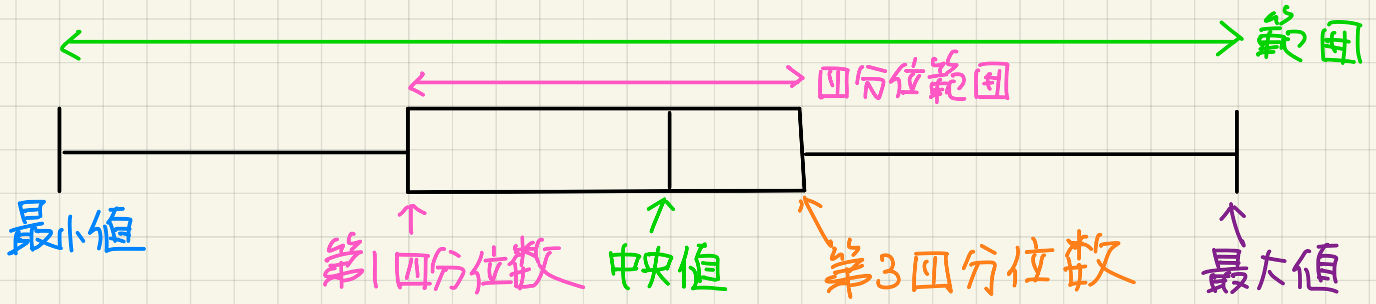
ア：箱ひげ図から，具体的なデータの人数は分からない。また，水泳部の最大値は60未満なので，60回以上の生徒はいない。
よって誤り

イ：剣道部の四分位範囲 = 50 - 45 = 5回
水泳部の四分位範囲 = 55 - 50 = 5回
よって正しい
四分位範囲 = 第3四分位数 - 第1四分位数

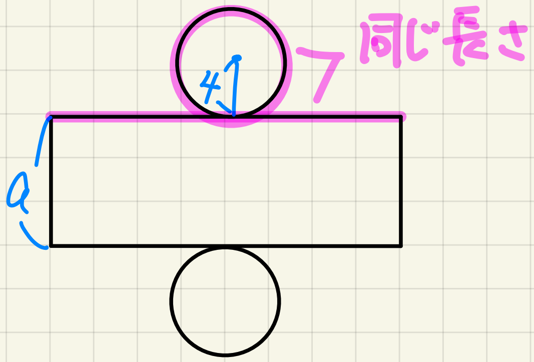
ウ：箱ひげ図から，範囲が最も大きいのは，剣道部である。よって誤り
範囲 = 最大値 - 最小値

エ：剣道部の第1四分位数 = 45回
卓球部の第1四分位数 = 45～50回の間
水泳部の第1四分位数 = 50回
よって誤り

オ：卓球部の中央値は，55回より大きい。
したがって，卓球部の半分以上の生徒が55回以上である。よって正しい



(7) 円柱の展開図は、以下の通り



側面の長方形において、
一辺は円柱の高さ
もう一辺は底面の円周の長さ
である。

円周の長さ $= \underbrace{4\times 2}_{\text{直径}} \times \pi = 8\pi$

より、表面積は

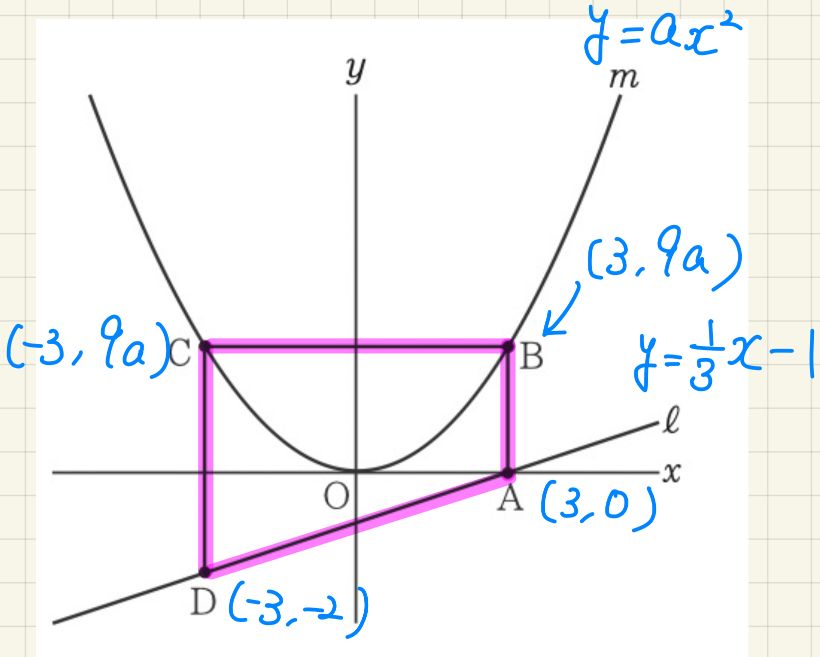
$$\underbrace{(4\times 4\times \pi)}_{\text{円の面積}} \underbrace{\times 2}_{\text{上面と下面}} + \underbrace{8\pi \times a}_{\text{長方形の面積}}$$

$= 32\pi + 8\pi\cdot a$

これが 120π となるので、

$$32\pi + 8\pi\cdot a = 120\pi$$
$$8\pi\cdot a = 88\pi$$
$$a = 11$$

(8)



点A

$y=\frac{1}{3}x-1$ 上にあり、$y=0$ なので

$$0=\frac{1}{3}x-1 \Rightarrow \frac{1}{3}x=1 \quad \therefore x=3$$

よって、$A(3,0)$

点B

点Aとx座標が等しい

$y=ax^2$ 上にあり $x=3$ なので、

$$y=a\times 3^2$$
$$=9a \qquad \therefore B(3,9a)$$

点C

点Bとy軸について対称なので、点Cの座標は、

$C(-3,9a)$

点D

点Cとx座標が等しい

$y=\frac{1}{3}x-1$ 上にあり、$x=-3$ なので

$$y=\frac{1}{3}\times(-3)-1$$
$$=-2 \qquad \therefore D(-3,-2)$$

以上より

$$AB=9a-0=9a$$
$$BC=3-(-3)=6$$
$$CD=9a-(-2)=9a+2$$

よって□ABCDの面積は

$$\frac{(9a+9a+2)\times 6}{2} = 3(18a+2)$$

これが21cm²となれば良いので

$$3(18a+2)=21$$
$$18a+2=7$$
$$18a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{18}$$

3.

(1)

① タンクの水の量は毎分6mLの割合で減るので、3分後は18mL減る。このときのタンクの水の量yは

$$y=840-18$$
$$=822\text{ mL}$$ (ア)

9分後は54mL減るので、タンクの水の量yは

$$y=840-54$$
$$=786\text{ mL}$$ (イ)

② 毎分6mLずつ減るので、x分後は6x mLずつ減る。このときのタンクの水の量yは

$$y=840-6x$$
$$\therefore y=-6x+840$$

③ $y=-6x+840$ に $y=450$ を代入して.

$$450=-6x+840$$
$$6x=390$$
$$\therefore x=65$$

(2) 加温器を使用した時間は192分なので.

$$s+t=192 \quad \text{——} ①$$

また, 強モードは毎分6mL, 弱モードは毎分2mLの割合で水を使うので.

$$6s+2t=840$$

両辺を2で割って.

$$3s+t=420 \quad \text{——} ②$$

① − ② より

$$-2s=-228$$
$$s=114$$

$s=114$ を①に代入して.

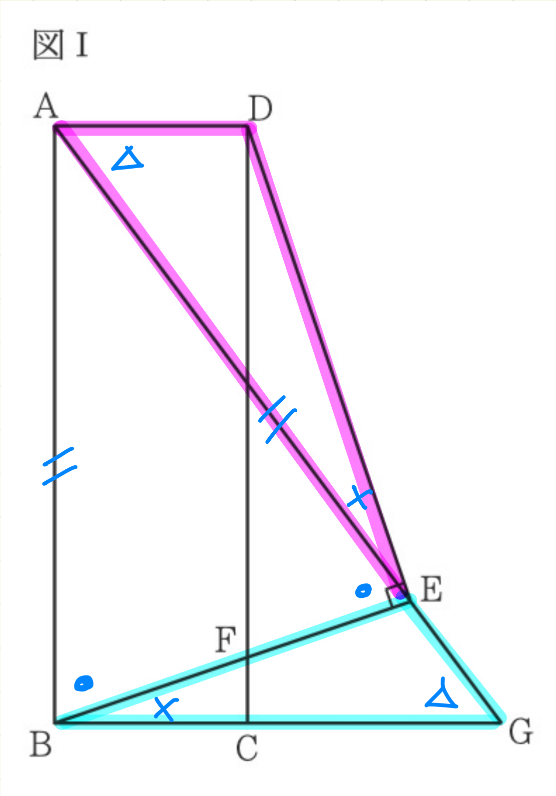
$$114+t=192$$
$$t=78$$

よって, $s=114$, $t=78$

4.

[Ⅰ]

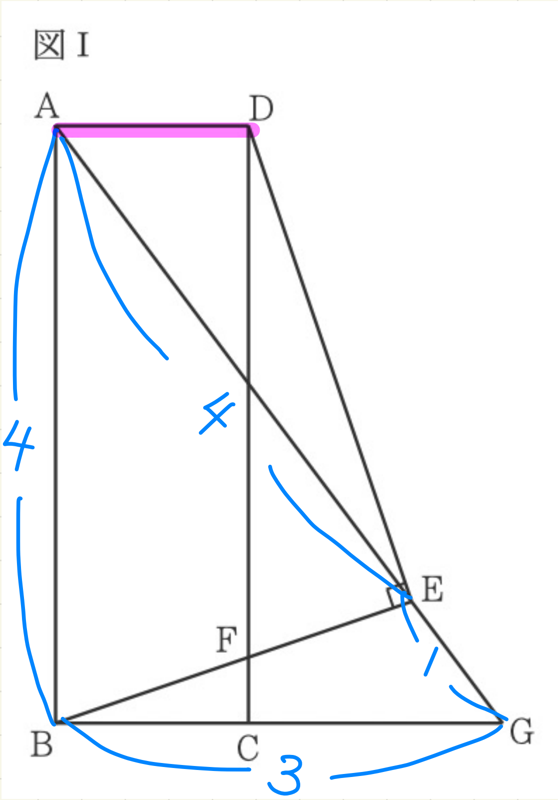
(1)



$\triangle$AEDと$\triangle$GBEにおいて、
AD∥BGより錯角が等しいので
$\angle DAE = \angle EGB$ —①
また、
$\angle AED = \angle DEB - \angle AEB$
$= 90^\circ - \angle AEB$ —②
$\angle GBE = \angle ABC - \angle ABE$
$= 90^\circ - \angle ABE$ —③

$\triangle$ABEは、$AB = AE$の二等辺三角形なので
$\angle AEB = \angle ABE$ —④
②, ③, ④より
$\angle AED = \angle GBE$ —⑤
①, ⑤より2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle AED \backsim \triangle GBE$ (証明終わり)

(2) ①



△ABGで 三平方の定理より

$AG=\sqrt{4^2+3^2}$

$=5$

AB=AE より
AE=4 cm

∴ $EG=AG-AE$

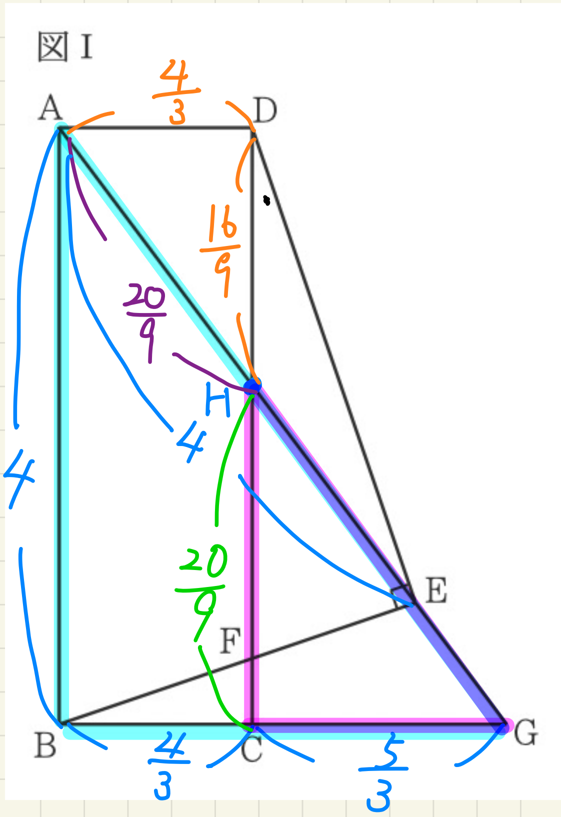
$=5-4=1$ cm

(1) より △AED ∽ △GBE なので，
対応する辺の比は等しいから

$\underset{4}{AE}:\underset{3}{GB}=AD:\underset{1}{GE}$

∴ $3AD=4$ ⇒ $AD=\frac{4}{3}$ cm

② DC と AE の交点を H とする。



△GHC と △GAB において，
共通な角は等しいから

∠HGC ＝∠AGB ― ㋐

また，

∠HCG ＝∠ABG ＝ 90° ― ①

㋐, ① より 2組の角がそれぞれ
等しいから. △GHC ∽ △GAB
対応する辺の比は等しいから

$HC:\underset{4}{AB}=\underset{\frac{5}{3}}{GC}:\underset{3}{GB}$

∴ $3HC=\frac{20}{3}$ ⇒ $HC=\frac{20}{9}$ cm

よって、

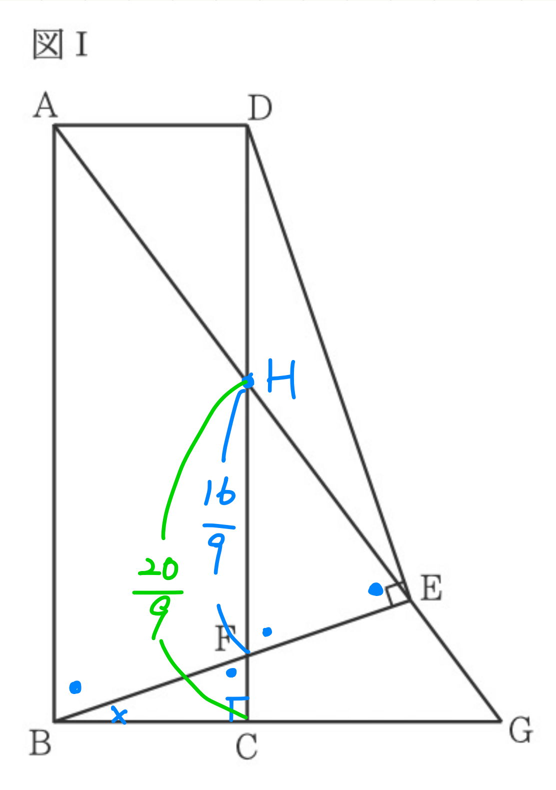
$$DH = DC - HC$$
$$= 4 - \frac{20}{9} = \frac{16}{9} \text{ cm}$$

△ADHで三平方の定理より

$$AH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{256}{81}}$$
$$= \sqrt{\frac{144+256}{81}} = \frac{20}{9}$$
$$= \frac{20}{9} \text{ cm}$$

よって、

$$HE = AE - AH$$
$$= 4 - \frac{20}{9}$$
$$= \frac{16}{9} \text{ cm}$$



ここで、

∠ABE = ●，∠FBC = x とおくと、

$$● + x = 90°$$
$$\Rightarrow ● = 90° - x$$

△FBCにおいて、

$$\angle BFC = 90° - x$$
$$= ●$$

対頂角は等しいから

$\angle HFE = \angle BFC$

$= \bullet$ ――― ㋐

$\triangle ABE$ は二等辺三角形なので、

$\angle AEB = \angle ABE$

$= \bullet$ ――― ㋓

㋐, ㋓ より $\triangle HFE$ は二等辺三角形。よって、

$HF = HE$

$= \dfrac{16}{9}$ cm

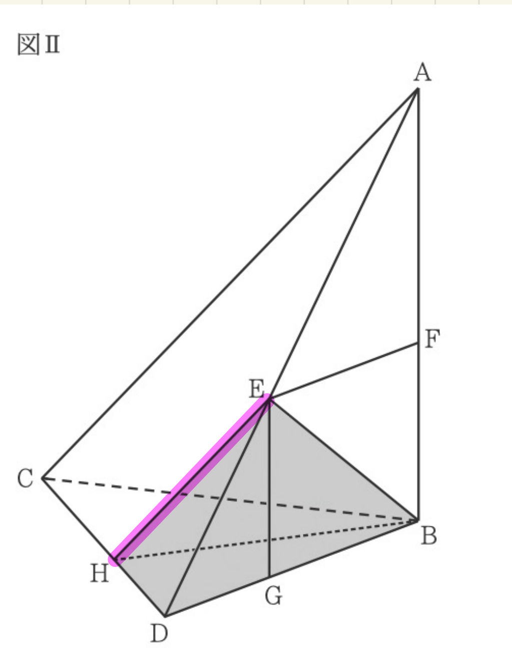
よって、

$FC = HC - HF$

$= \dfrac{20}{9} - \dfrac{16}{9}$

$= \dfrac{4}{9}$ cm

[II]
(3)



ア：辺ABは、辺EHと平行でもなく、交わらないのでねじれの位置である。

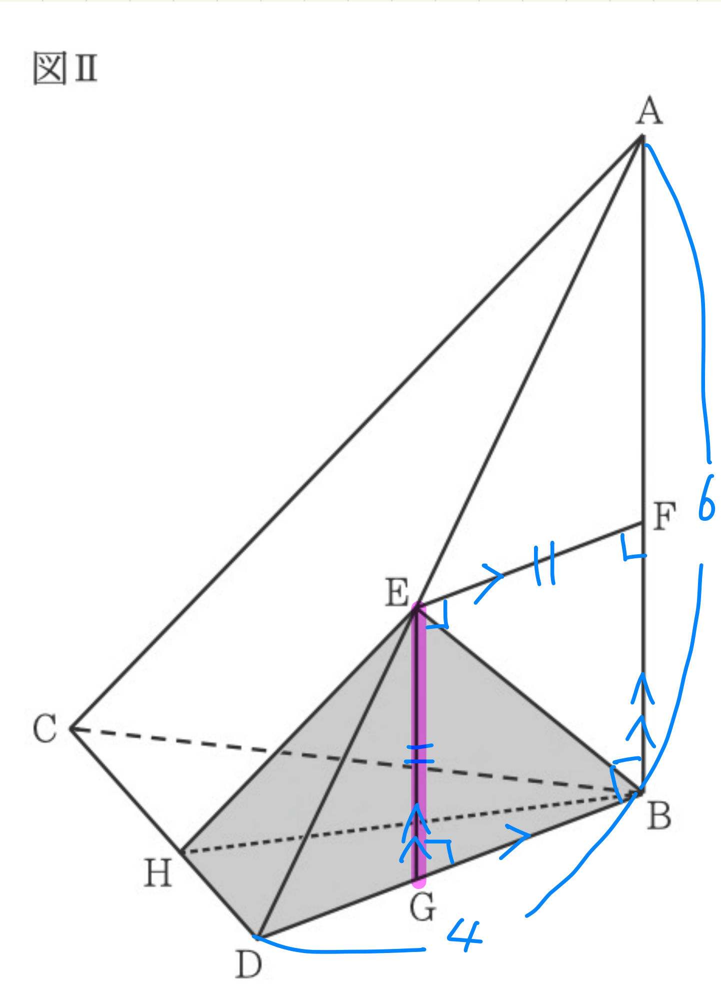
イ：辺AC // 辺EH のため、ねじれの位置でない。

ウ：辺ADと辺EHは交わるため、ねじれの位置でない。

エ：辺CDと辺EHは交わるため、ねじれの位置でない。

(4)

①



AB⊥面BCDで、辺DBは面BCD上にあるので、

AB⊥DB

また、AB//EGより

同位角が等しいので、

∠EGD=∠ABD=90°―①

∴∠EGB=90°―②

同様にEF//DBより

同位角が等しいので、

∠AFE=∠ABD=90°

∴∠EFB=90°―③

□EGBFで、EF//GB、EG//FBより平行四辺形である。よって、向かい合う辺の長さは等しいから

EF=GB，EG=FB

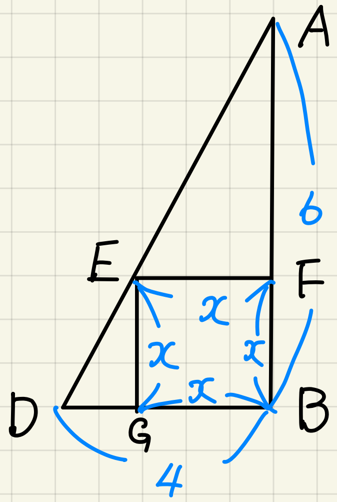
ここで、EF=EGより

EF=GB=EG=FB

また、□EGBFの4つの角は全て90°なので、□EGBFは正方形となる。

∠EFG=360°−90°×3=90°―④

①,②,③,④より、内角は全て90°



ここで、△AEFと△ADBにおいて、
EF//DBより同位角が等しいから
$\angle AEF = \angle ADB$ ―㋐
$\angle AFE = \angle ABD$ ―㋑
㋐、㋑より2組の角がそれぞれ等しいので、△AEF∽△ADB
□EGBFの一辺の長さをxとおくと、相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$$\underbrace{AF}_{6-x} : \underbrace{AB}_{6} = \underbrace{EF}_{x} : \underbrace{DB}_{4}$$

よって

$$6x = 4(6-x)$$
$$6x = 24 - 4x$$
$$10x = 24$$
$$x = \frac{12}{5}$$

EGは□EGBFの一辺なので、

$$EG = x$$
$$= \frac{12}{5}\text{cm}$$

$AE : AD = \frac{12}{5} : 4$

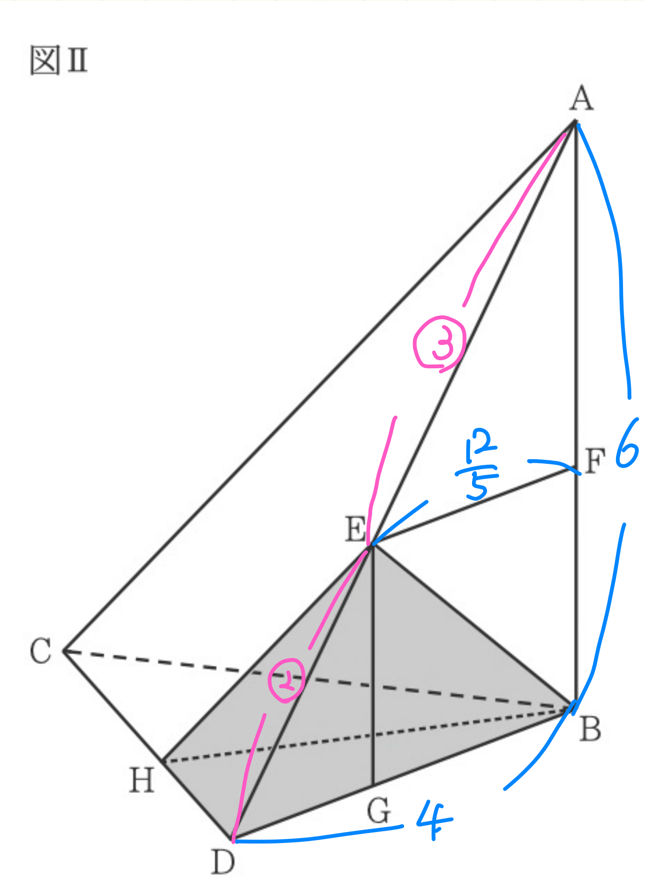
$\frac{4}{5} : \frac{12}{5}$

$12 : 20$

$3 : 5$

$\overline{\quad 8 \quad}$

②



EG⊥DBであり，DBは面BCD上にあるので，

EG⊥面BCD

⇒EG⊥△HDB

よって，立体EHDBは，底面を△HDB，高さをEGとしたときの三角すいである。

(4)①より△AEF∽△ADBなので，

$$AE:AD = EF:DB$$
$$= \frac{12}{5} : 4$$
$$= 12 : 20$$
$$= 3 : 5$$

よって，$AE : ED = 3 : (5-3)$

$$= 3 : 2$$

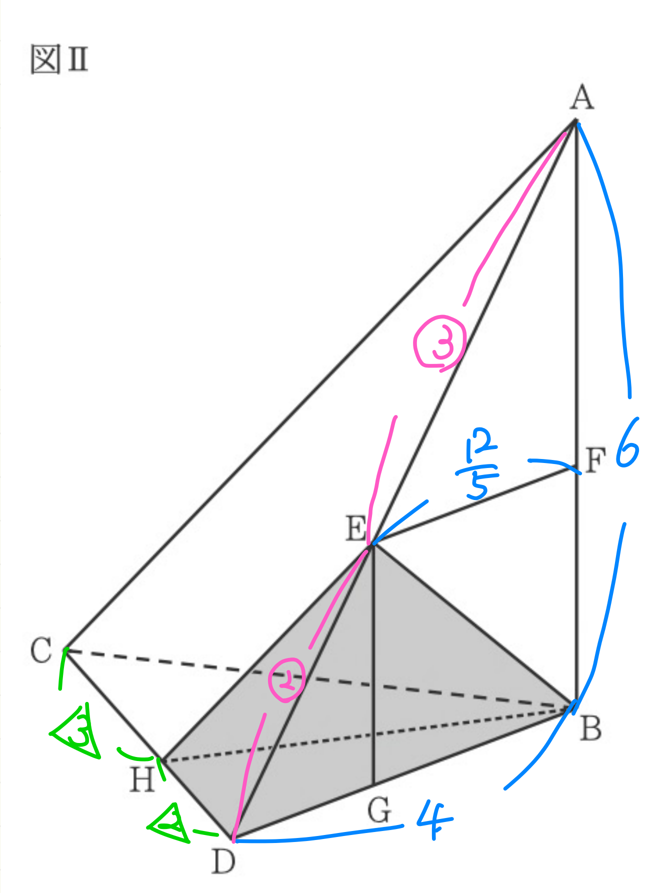
△DEHと△DACにおいて，EH//ACより同位角が等しいので，

∠DEH = ∠DAC ―㋐

∠DHE = ∠DCA ―㋑

㋐，㋑より2組の角がそれぞれ等しいので，

△DEH∽△DAC

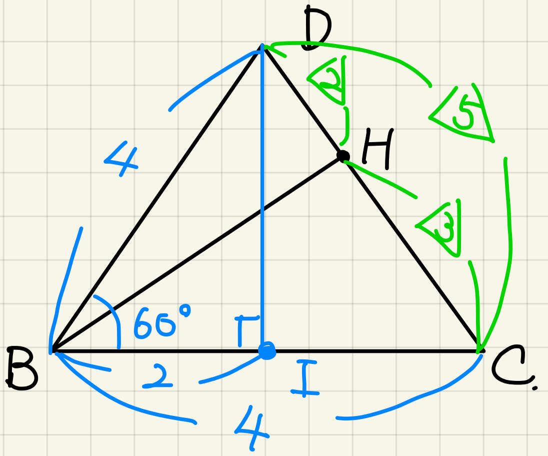


対応する辺の比は等しいから

DE : DA = DH : DC
② ⑤

よって、DH : DC = 2 : 5

∴ DH : HC = 2 : (5 − 2)
= 2 : 3



△DBCと△DHCにおいて、
底辺をDC, DHとすると、
高さは同じ長さなので、
△DBCと△DHCの面積比は
底辺比となる ―― ㋐

点DからBCに下ろした垂線の足をIとする.
ここで、△DBCは一辺が4cmの正三角形であり.
△DBIは30°−60°−90°の直角三角形なので、

$BI : BD : DI = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$\therefore BI : DI = 1 : \sqrt{3}$

$\therefore DI = 2\sqrt{3}$ cm

したがって、△DBCの面積は

$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm²

㋒より

$\underbrace{\triangle DBC\text{の面積}}_{4\sqrt{3}} : \triangle DHB\text{の面積} = 5:2$

$\therefore\ 5 \times \triangle DHB\text{の面積} = 8\sqrt{3}$

よって、

$\triangle DHB\text{の面積} = \dfrac{8\sqrt{3}}{5}$

したがって、求める体積は

$\underbrace{\dfrac{8\sqrt{3}}{5}}_{\triangle DHB} \times \underbrace{\dfrac{12}{5}}_{EG} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{32\sqrt{3}}{25}\ cm^3$