2023年度　大阪府

数学　　C問題

Km Km

1.

(1) 与式 $= \dfrac{-a \times 4a^2b^2 \times 3}{-2ab^2}$

$= 6a^2$

(2) $\dfrac{6+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{6\sqrt{2}+4}{2}$

$= 3\sqrt{2}+2$

$(2-\sqrt{2})^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2$

$= 4 - 4\sqrt{2} + 2$

$= 6 - 4\sqrt{2}$

よって,

与式 $= 3\sqrt{2} + 2 + 6 - 4\sqrt{2}$

$= 8 - \sqrt{2}$

(3) $ax^2 + 4x - 7a - 16 = 0$ に $x = 3$ を代入して.

$9a + 12 - 7a - 16 = 0$

$2a = 4 \quad \therefore a = 2$

$ax^2 + 4x - 7a - 16 = 0$ に $a = 2$ を代入して.

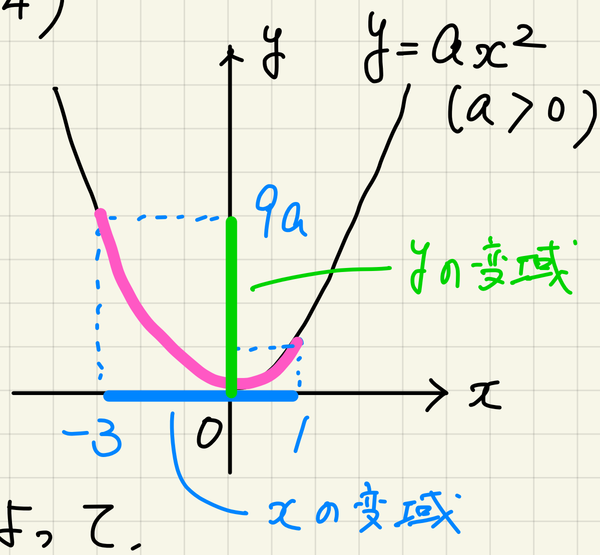
$2x^2 + 4x - 14 - 16 = 0$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x-3)(x+5) = 0$

$x = 3$ 以外の解なので, $x = -5$

(4)



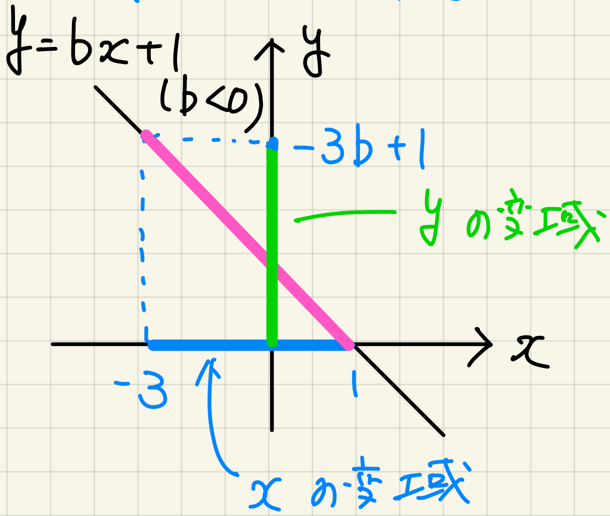
$y=ax^2\ (a>0)$ において，

$-3 \leqq x \leqq 1$ のとき，yの変域は，

$\boxed{0} \leqq y \leqq \boxed{9a}$ —— ①

よって，

$c=0$，$d=9a$



$y=bx+1\ (b<0)$ において，

$-3 \leqq x \leqq 1$ のとき，yの変域は，

$\boxed{b+1} \leqq y \leqq \boxed{-3b+1}$ —— ②

①と②の変域が等しいので

$$\begin{cases} \boxed{0}=\boxed{b+1} & \text{—— ③} \quad \Rightarrow b=-1 \\ \boxed{9a}=\boxed{-3b+1} & \text{—— ④} \end{cases}$$

$b=-1$ を④に代入して，

$$9a=-3\times(-1)+1$$
$$=4$$
$$\therefore a=\frac{4}{9}$$

$a=\frac{4}{9}$ は $a>0$ を，$b=-1$ は $b<0$ を満たす。

よって，$a=\frac{4}{9}$，$b=-1$

(5) $n \leqq \sqrt{x} \leqq n+1$ を2乗して.

$$n^2 \leqq x \leqq (n+1)^2$$

したがって, n^2 から. $(n+1)^2$ の間に自然数が100個あれば良い.

㊟ $2 \leqq x \leqq 5$ を満たす自然数は.
2, 3, 4, 5 の 4個である

$\quad \hookrightarrow 5-2+1 = 4$

したがって.

$$(n+1)^2 - n^2 + 1 = 100$$

$$n^2+2n+1-n^2+1 = 100$$

$$2n = 98 \Rightarrow n = 49$$

(6) 最大公約数を gcd と書く

A	B	gcd	計算方法	計算
1	4	1	$a+b$	5
	5	1	$a+b$	6
	6	1	$a+b$	7
	7	1	$a+b$	8
	8	1	$a+b$	9
2	4	2	$\sqrt{2ab}$	4
	5	1	$a+b$	7
	6	3	$\sqrt{2ab}$	$2\sqrt{6}$
	7	1	$a+b$	9
	8	4	$\sqrt{2ab}$	$4\sqrt{2}$

A	B	gcd	計算方法	計算
3	4	1	$a+b$	7
	5	1	$a+b$	8
	6	2	$\sqrt{2ab}$	6
	7	1	$a+b$	10
	8	1	$a+b$	11
4	4	4	$\sqrt{2ab}$	$4\sqrt{2}$
	5	1	$a+b$	9
	6	2	$\sqrt{2ab}$	$4\sqrt{3}$
	7	1	$a+b$	11
	8	4	$\sqrt{2ab}$	8

カードの取り出し方は、全部で20通り。そのうちきまりにしたがって計算した結果が偶数となるのは、7通り。よって求める確率は

$$\frac{7}{20}$$

㊟ 偶数 $\Leftrightarrow$ 2 × 整数。2 × $\sqrt{}$ は偶数でない。

(7) もとの自然数の十の位を x、一の位を y とする。ただし $0 < x \leqq 9$, $0 \leqq y \leqq 9$ である。

$$a = 10x + y$$
$$b = 10y + x$$

より

$$\frac{b^2 - a^2}{99} = \frac{(10y + x)^2 - (10x + y)^2}{99}$$
$$= \frac{100y^2 + 20xy + x^2 - (100x^2 + 20xy + y^2)}{99}$$
$$= \frac{-99x^2 + 99y^2}{99}$$
$$= y^2 - x^2$$
$$= (y + x)(y - x)$$

よって、$(y + x)(y - x) = 24$ を満たす x, y を求める。

$A = y + x$, $B = y - x$ とおくと、

$$AB = 24$$

である。

① $A=1,\ B=24$ のとき.

$$\begin{cases} y+x=1 \\ y-x=24 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=-\frac{23}{2}}_{\text{負であり整数でない}},\ \underbrace{y=\frac{25}{2}}_{\text{整数でない}}$$

よって不適

② $A=2,\ B=12$ のとき

$$\begin{cases} y+x=2 \\ y-x=12 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=-5}_{\text{負}},\ y=7$$

よって不適

③ $A=3,\ B=8$ のとき

$$\begin{cases} y+x=3 \\ y-x=8 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=-\frac{5}{2}}_{\text{負であり整数でない}},\ \underbrace{y=\frac{11}{2}}_{\text{整数でない}}$$

よって不適

④ $A=4,\ B=6$ のとき.

$$\begin{cases} y+x=4 \\ y-x=6 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=-1}_{\text{負}},\ y=5$$

よって不適

⑤ $A=6,\ B=4$ のとき

$$\begin{cases} y+x=6 \\ y-x=4 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=5$$

よって適する. このとき

$$a=10x+y=15$$

⑥ $A=8,\ B=3$ のとき

$$\begin{cases} y+x=8 \\ y-x=3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=\frac{5}{2},\ y=\frac{11}{2}}_{\text{整数でない}}$$

よって不適

⑦ $A=12, B=2$ のとき

$$\begin{cases} y+x=12 \\ y-x=2 \end{cases} \Rightarrow x=5,\ y=7$$

よって適する。このとき

$$a=10x+y=57$$

⑧ $A=24, B=1$ のとき

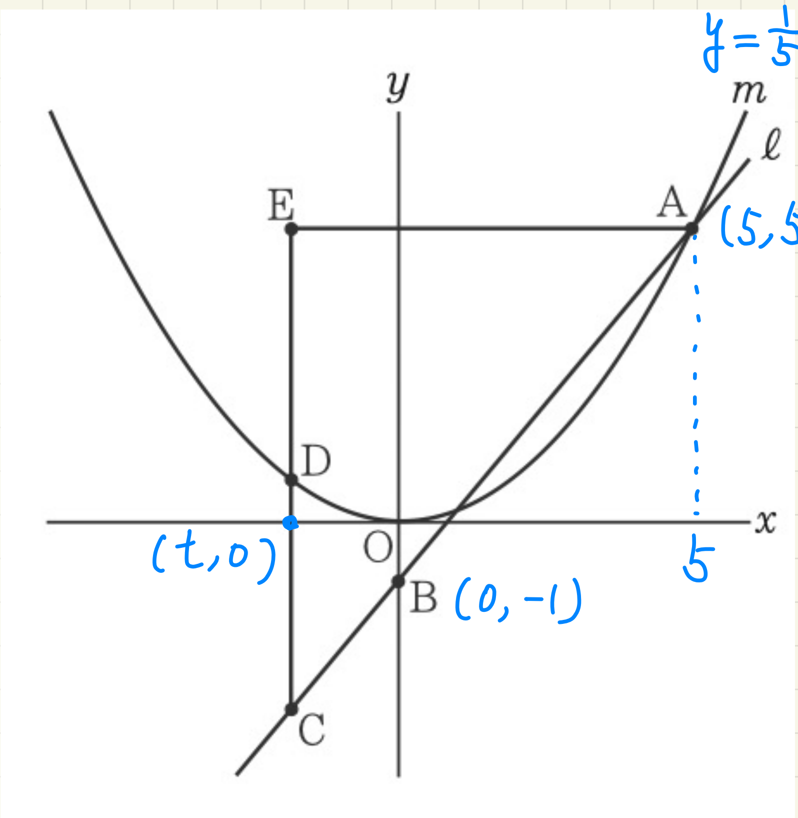
$$\begin{cases} y+x=24 \\ y-x=1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{23}{2},\ y=\frac{25}{2}$$

整数でない

よって不適

以上より $a=15, 57$

(8)



$DC=EA-3\,cm$ ——①

点Aは $y=\frac{1}{5}x^2$ 上にあり、$x=5$ なので

$$y=\frac{1}{5}\times5^2$$
$$=5 \quad \therefore A(5,5)$$

直線 ℓ の式を $y=ax+b$ とおく。1次関数では、傾き＝変化の割合なので、

$$a=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{5-(-1)}{5-0} \quad \cdots \text{ABの傾きより}$$
$$=\frac{6}{5}$$

また，切片は点Bであり，B(0, −1)より

$$b=-1$$

よって，直線ℓの式は

$$y=\frac{6}{5}x-1$$

__点C__

$y=\frac{6}{5}x-1$ 上にあり，$x=t$ なので，

$$y=\frac{6}{5}t-1 \qquad \therefore C\left(t,\ \frac{6}{5}t-1\right)$$

__点D__

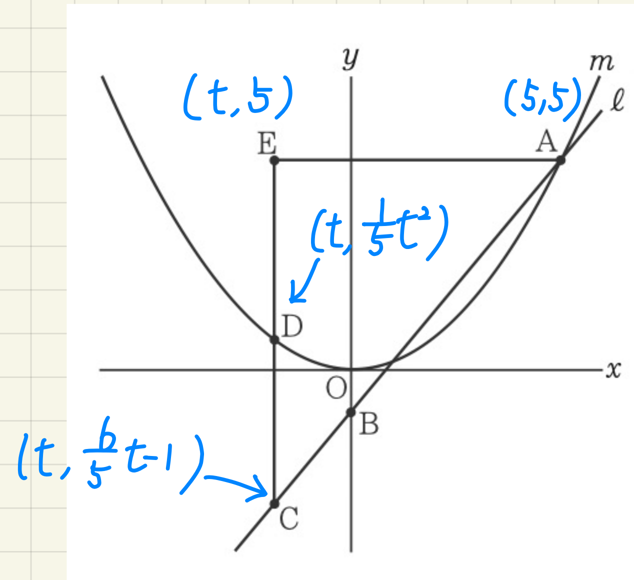
$y=\frac{1}{5}x^2$ 上にあり，$x=t$ なので

$$y=\frac{1}{5}t^2 \qquad \therefore D\left(t,\ \frac{1}{5}t^2\right)$$

__点E__

$x=t$ であり，y座標は点Aと等しいので，

$$E(t,\ 5)$$



よって，

$AE=5-t$　…x座標の差

$DC=\frac{1}{5}t^2-\left(\frac{6}{5}t-1\right)$

…y座標の差

①より

$$\frac{1}{5}t^2-\left(\frac{6}{5}t-1\right)=(5-t)-3$$

式を整理して.

$$\frac{1}{5}t^2-\frac{6}{5}t+1=-t+2$$

$$t^2-6t+5=-5t+10$$

$$t^2-t-5=0$$

解の公式より

$$t=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-5)}}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

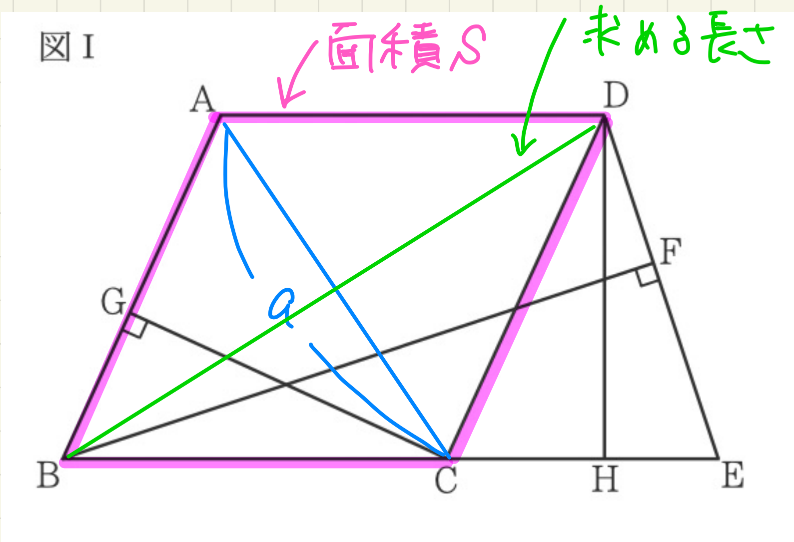
$t<0$ より

$$t=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

2.

(1)

①



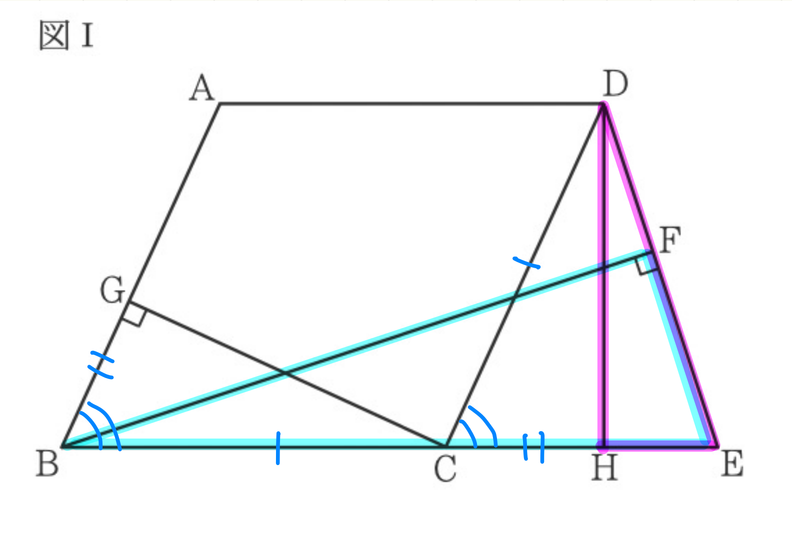
求める長さを b cm とする。

$$S=\frac{a\times b}{2}$$

より

$$b=\frac{2S}{a}\ \text{cm}$$

②

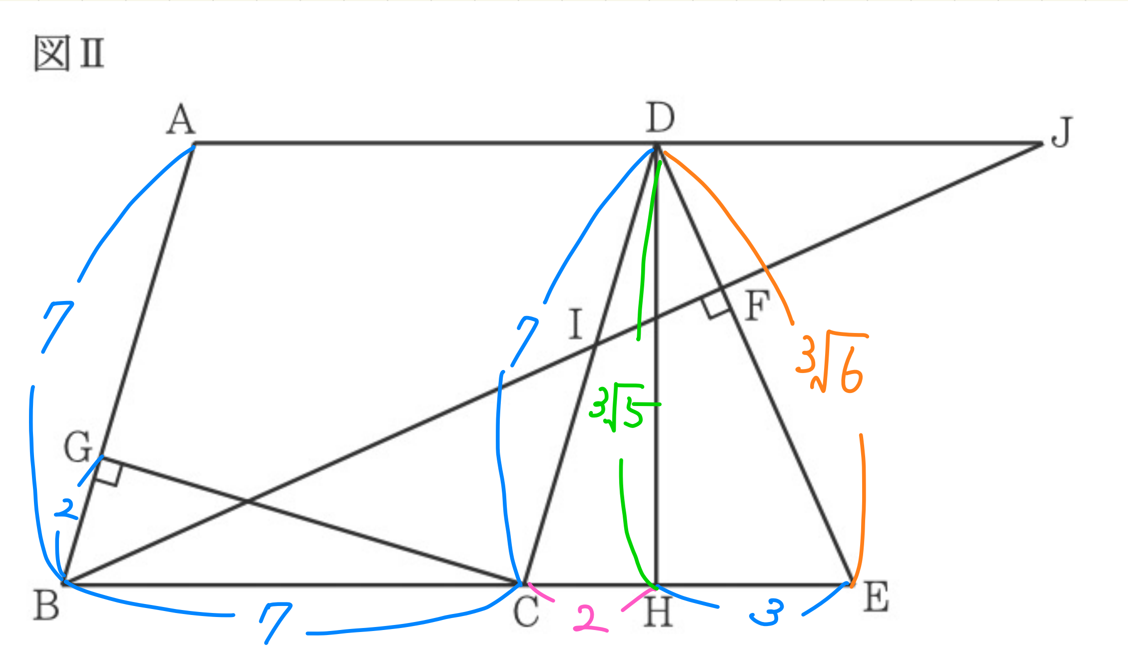


△DHEと△BFEにおいて、
共通な角は等しいから
∠DEH = ∠BEF —— ㋐
仮定より
CH = BG —— ㋑

□ABCDはひし形なので、
DC = CB —— ㋒
AB // DCより同位角が等しいので、
∠DCH = ∠CGB —— ㋓
㋑、㋒、㋓より2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、△DCH ≡ △CBG
対応する角は等しいので
∠DHC = ∠CGB = 90°
よって、∠DHE = 90° —— ㋔
BF ⊥ DEより
∠BFE = 90° —— ㋕
㋔、㋕より
∠DHE = ∠BFE —— ㋖
㋐、㋖より2組の角がそれぞれ等しいので、
△DHE ∽ △BFE (証明終わり)

(2)

①



□ABCDはひし形なので、

$AB = BC = CD = 7\,cm$

(1)②の証明途中より △DCH ≡ △CGB なので、対応する辺は等しいから

$CH = GB = \underline{2\ cm}$

△DCHで三平方の定理より

$DH = \sqrt{7^2 - 2^2}$ $= \sqrt{49-4}$

$= 3\sqrt{5}$ $= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

△DHEで三平方の定理より

$DE = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + 3^2}$ $= \sqrt{45+9} = \sqrt{54}$

$= 3\sqrt{6}$ $= 3\sqrt{6}$

(1)②より △DHE ∽ △BFE なので、対応する辺の比は等しいから、

$\underset{3\sqrt{6}}{DE} : \underset{12}{BE} = \underset{3}{HE} : FE$

よって

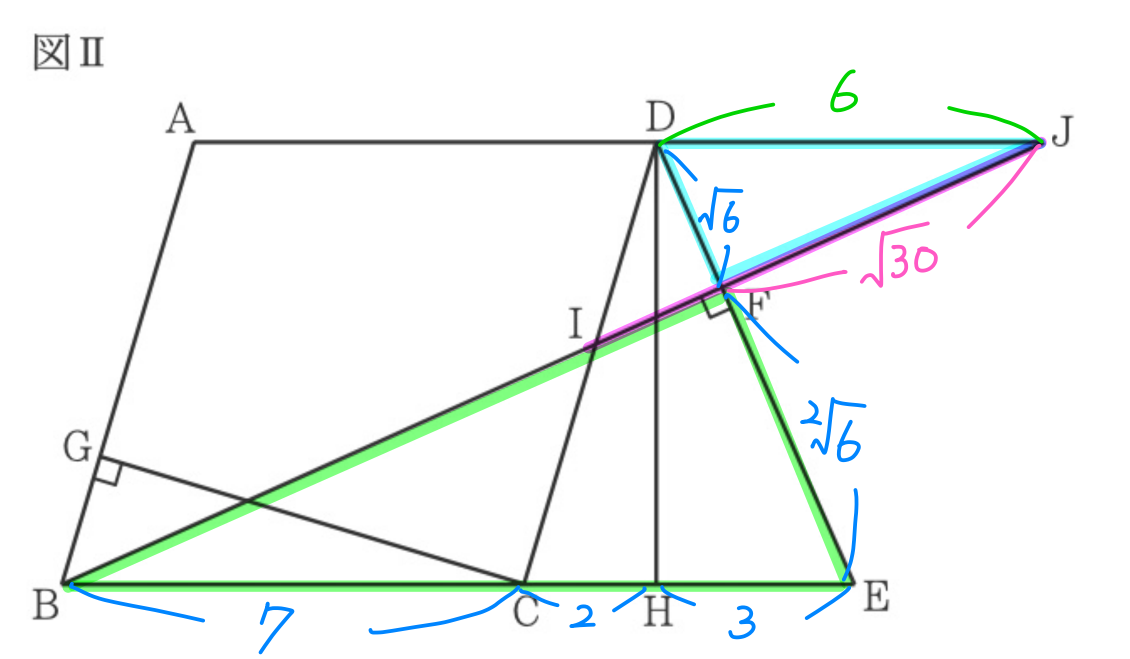
$$3\sqrt{6}\ FE = 36$$

$$FE = \frac{12}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{6}\ \text{cm}$$

②



△FJD と△FBE において、

DJ // BE より錯角が等しいので、

∠FJD = ∠FBE ―― ㋐

∠FDJ = ∠FEB ―― ㋑

㋐、㋑より2組の角がそれぞれ等しいから

△FJD ∽ △FBE

ここで、(2)①より DE = $3\sqrt{6}$、FE = $2\sqrt{6}$ なので、

DF = $\sqrt{6}$ cm

相似な三角形の対応する辺の比は等しいので、

$$\underset{\sqrt{6}}{FD} : \underset{2\sqrt{6}}{FE} = JD : \underset{12}{BE}$$

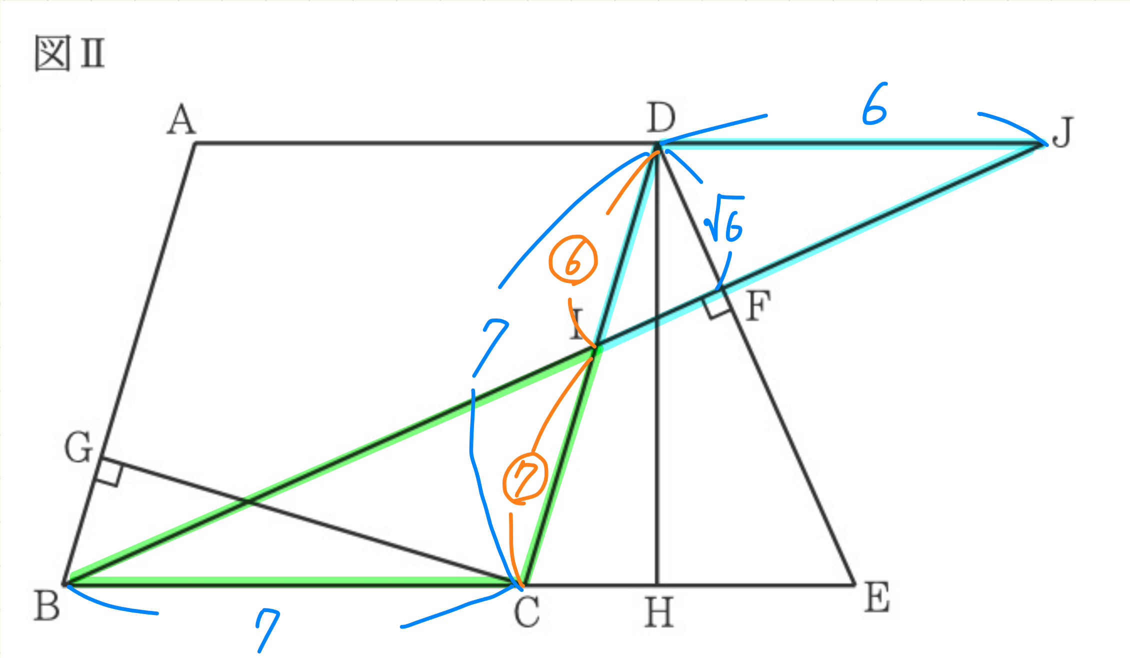
よって、

$$1 : 2 = JD : 12 \Rightarrow JD = 6\text{ cm}$$

△FJDで三平方の定理より

$$FJ = \sqrt{6^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{36-6} = \sqrt{30}$$

$$= \sqrt{30}\text{ cm}$$



また、△IJDと△IBCにおいて、

DJ//BCより錯角が等しいので

$\angle IJD = \angle IBC$ ――㋒

$\angle IDJ = \angle ICB$ ――㋓

㋒, ㋓より2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle IJD \sim \triangle IBC$$

対応する辺の比は等しいから

$$ID : IC = JD : BC = 6 : 7$$

$DC = 7\,cm$ より

$$DI = \frac{6}{6+7} \times 7 = \frac{42}{13}\,cm$$

$\triangle DIF$ で三平方の定理より

$$IF = \sqrt{\left(\frac{42}{13}\right)^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{\frac{1764}{169} - 6} = \sqrt{\frac{750}{169}} = \frac{5\sqrt{30}}{13}$$

$$= \frac{5\sqrt{30}}{13}\,cm$$

よって、

$$IJ = IF + FJ$$

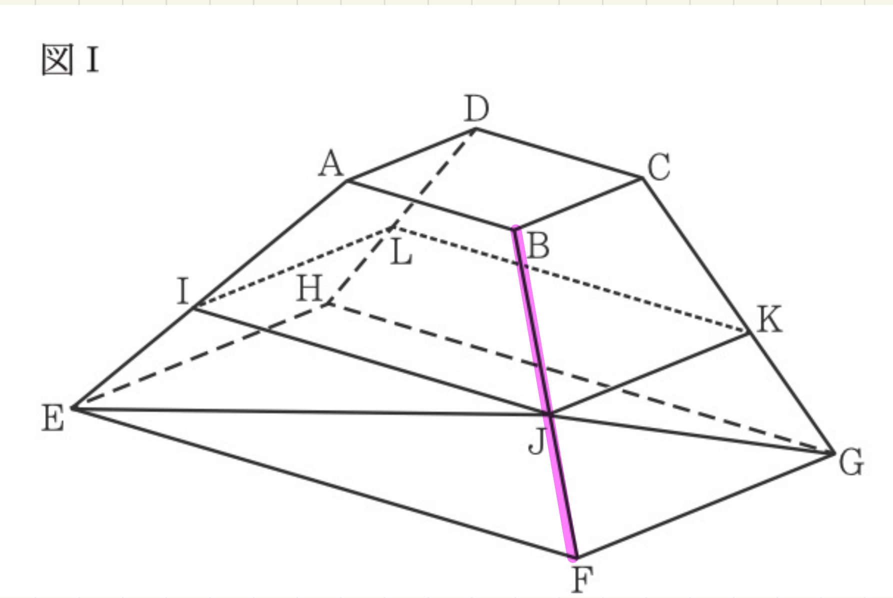
$$= \frac{5\sqrt{30}}{13} + \sqrt{30}$$

$$= \frac{18\sqrt{30}}{13}\,cm$$

3

(1)

①



ア：辺ABと辺BFは交わるため、ねじれの位置でない。

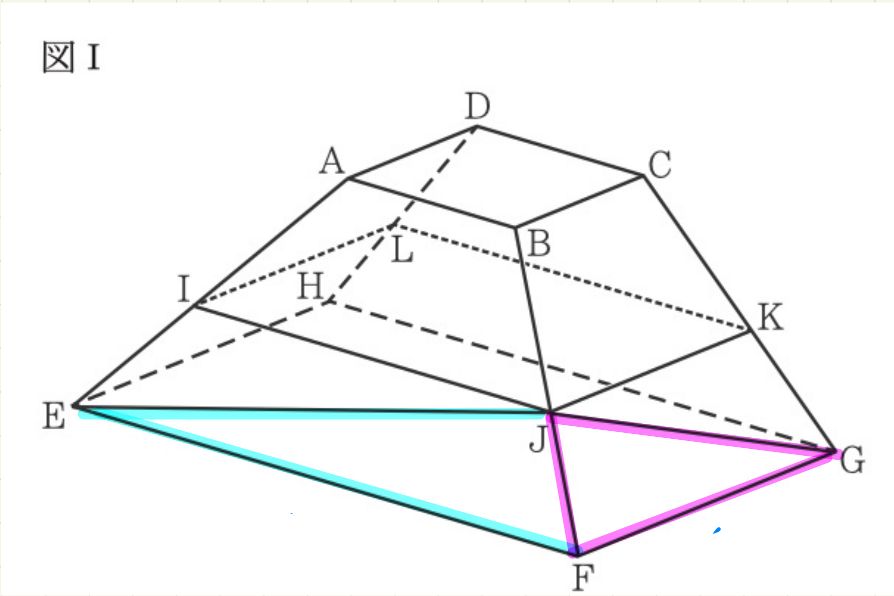
イ：辺EHと辺BFは平行でなく、かつ、交わらないので、ねじれの位置である。

ウ：辺BFと辺CGを延長すると交わるので，
ねじれの位置でない

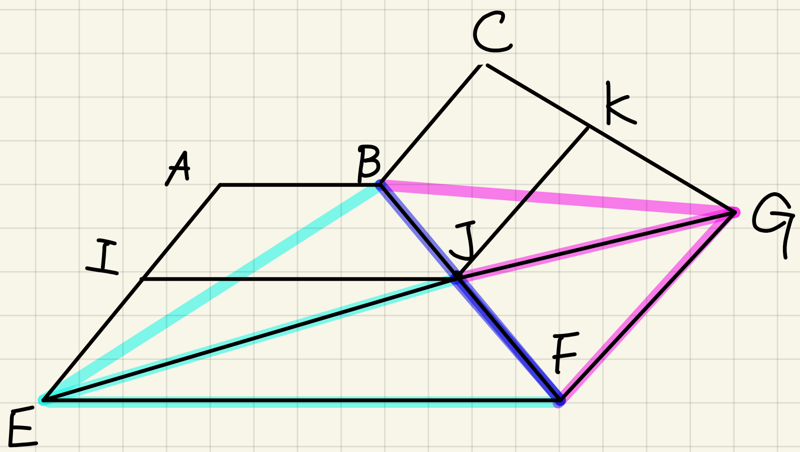
エ：辺BFと辺GHは平行でなく，かつ，交わらないので，ねじれの位置である．

オ：辺BFと辺DHは平行でなく，かつ，交わらないので，ねじれの位置である．
⇒辺BFと辺DHを延長しても交わらない

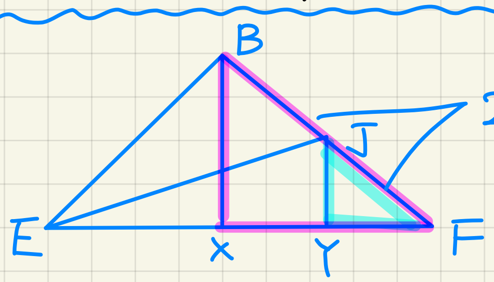
② 難問



□AEFBと
□BFGCの
展開図



△BEFと△JEFにおいて，底辺をEFとすると
面積比は高さの比となる．
高さの比は，BF：JFと等しいので

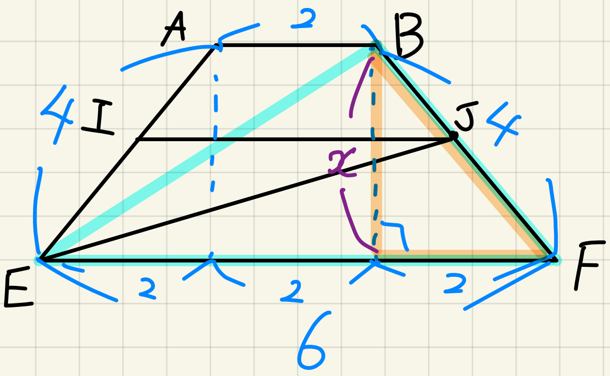


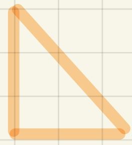
2つの三角形は相似なので，
BX：JY＝BF：JF

△BEFの面積：△JEFの面積＝BF：JF ―㋐
同様に，△BFGと△JFGにおいて，底辺をFGとすると，面積比は高さの比となる
高さの比は，BF：JFと等しいので，
△BFGの面積：△JFGの面積＝BF：JF ―㋑

㋐，イより
△BEF：△JEF＝△BFG：△JFG
⟺ △BFE：△BFG＝△JEF：△JFG
㊟ 2：3＝4：6 より 2：4＝3：6
したがって，内側の比を入れ替えても比は変わらない．

したがって，△JEFと△JFGの面積比を求めるには，△BFEと△BFGの面積比を求めれば良い．



左図において、 で

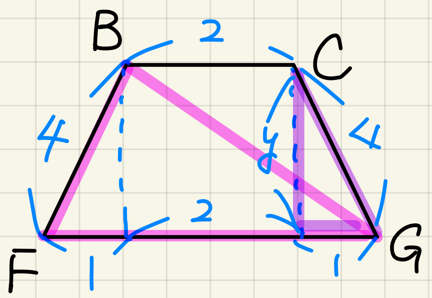
三平方の定理より

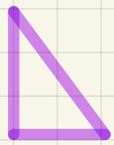
$$x = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4}$$
$$= 2\sqrt{3}$$

※ □AEFBは等脚台形である。

よって、△BEFの面積は

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$$



左図において、 で

三平方の定理より

$$y = \sqrt{4^2 - 1^2}$$
$$= \sqrt{15}$$

※ □AEFB ≡ □DHGCであり

AE = BF なので、DH = CG = 4cm

よって、□BFGCは等脚台形

よって、△BFGの面積は

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}\ \mathrm{cm}^2$$

以上より

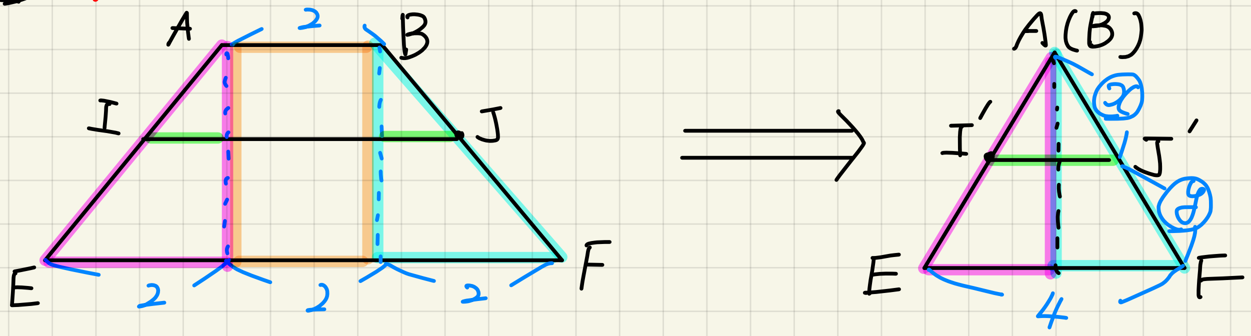
$$\triangle JEF : \triangle JFG = \triangle BFE : \triangle BFG$$
$$= 6\sqrt{3} : 2\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3}\,\triangle JFG = 2\sqrt{15}\,\triangle JEF$$

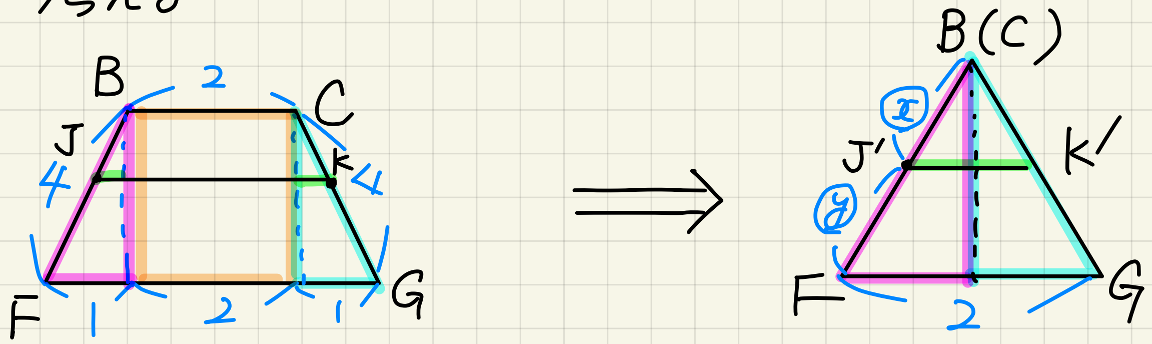
$$\therefore \triangle JFG = \frac{2\sqrt{15}}{6\sqrt{3}}\,\triangle JEF$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{3}\,\triangle JEF$$

よって、△JEG は △JEF の $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 倍である。

③ 難問



上図のように □AEFB の □ を取り除き、△ と △ で考える



同様に、□BFGC の □ を取り除き、△ と △ で考える。

また、BJ' : J'F = x : y とおく

△AI'J' ∽ △AEK、△BJ'K' ∽ △BFG より

$$I'J' : EF = x : x+y$$
$$J'K' : FG = x : x+y$$

よって、

$$I'J' : EF = J'K' : FG$$
$$\Leftrightarrow I'J' : J'K' = EF : FG$$
$$= 4 : 2$$
$$= 2 : 1 \quad \text{———} \quad ㋐$$

ここで，□IJKLの周の長さが15cmであるから，

$$IJ + JK = \underbrace{\frac{15}{2}}_{\text{□IJKLの周の長さの半分}} \text{cm}$$

$$I'J' = IJ - 2$$
$$J'K' = JK - 2$$

より

$$I'J' + J'K' = IJ - 2 + JK - 2$$
$$= IJ + JK - 4$$
$$= \frac{15}{2} - 4 = \frac{7}{2} \text{cm}.$$

ア より

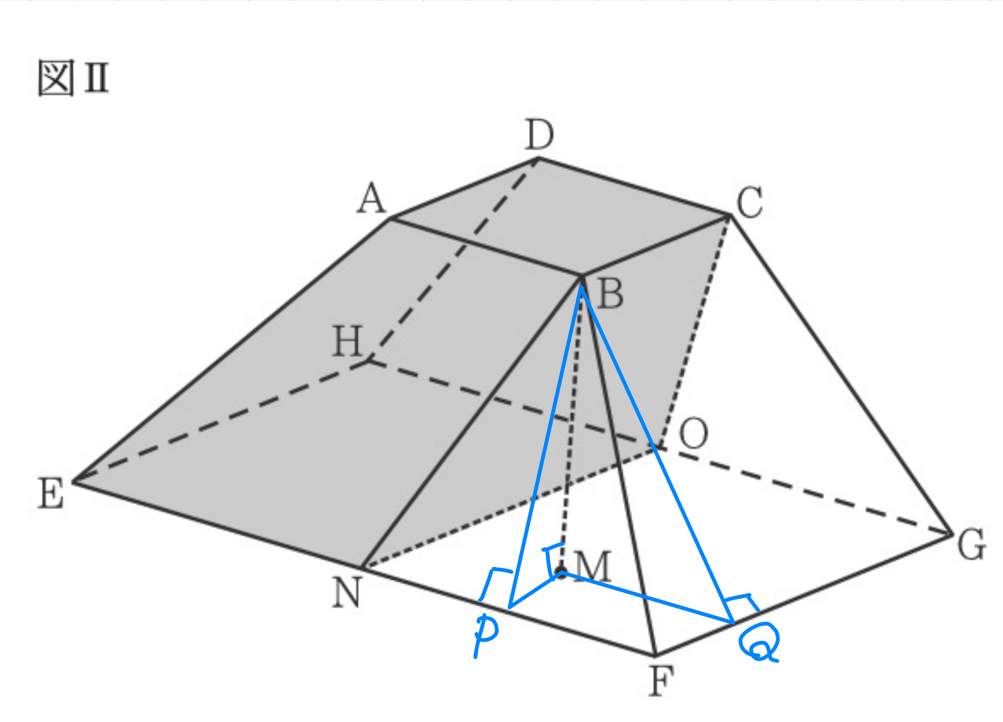
$$J'K' = \frac{1}{2+1} \times \frac{7}{2}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{7}{2}$$
$$= \frac{7}{6} \text{cm}$$

したがって.

$$JK = J'K' + 2$$
$$= \frac{7}{6} + 2$$
$$= \frac{19}{6} \text{cm}$$

(2)

①



点BからEFに垂線を下ろした足を点P
点BからFGに垂線を下ろした足を点Q
とする。

(1)② より

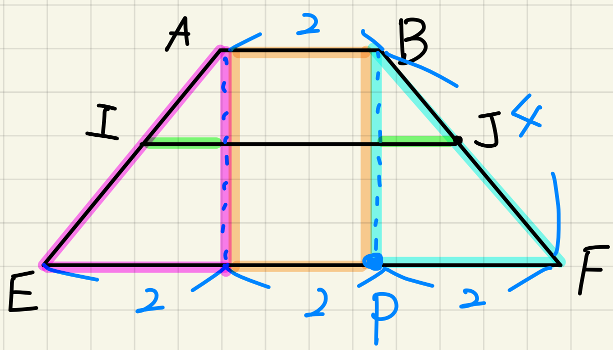
$BP = 2\sqrt{3}$ cm

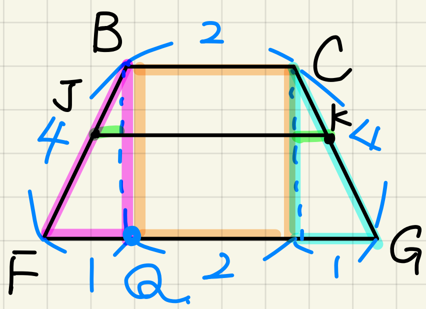
$FQ = 1$ cm $\Rightarrow PM = 1$ cm

したがって、△BPMで三平方の定理より

$BM = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1^2}$　$= \sqrt{12 - 1}$

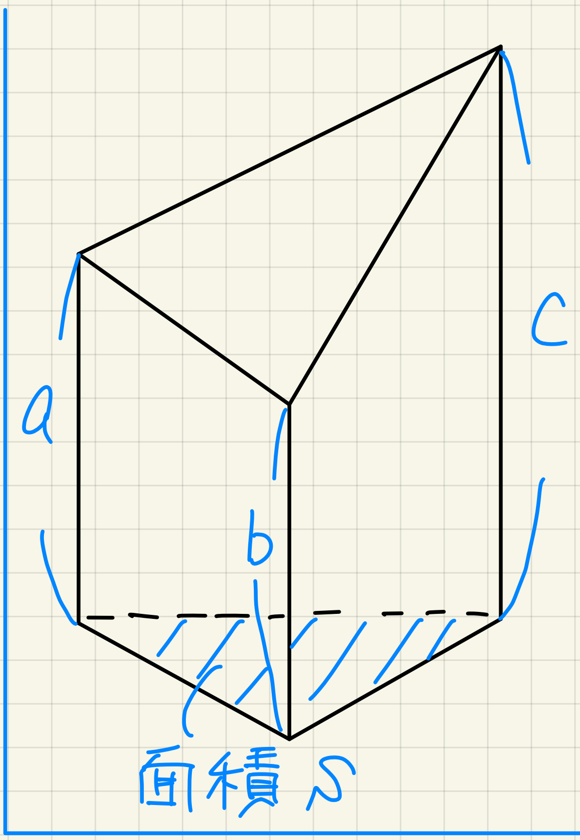
$= \sqrt{11}$ cm





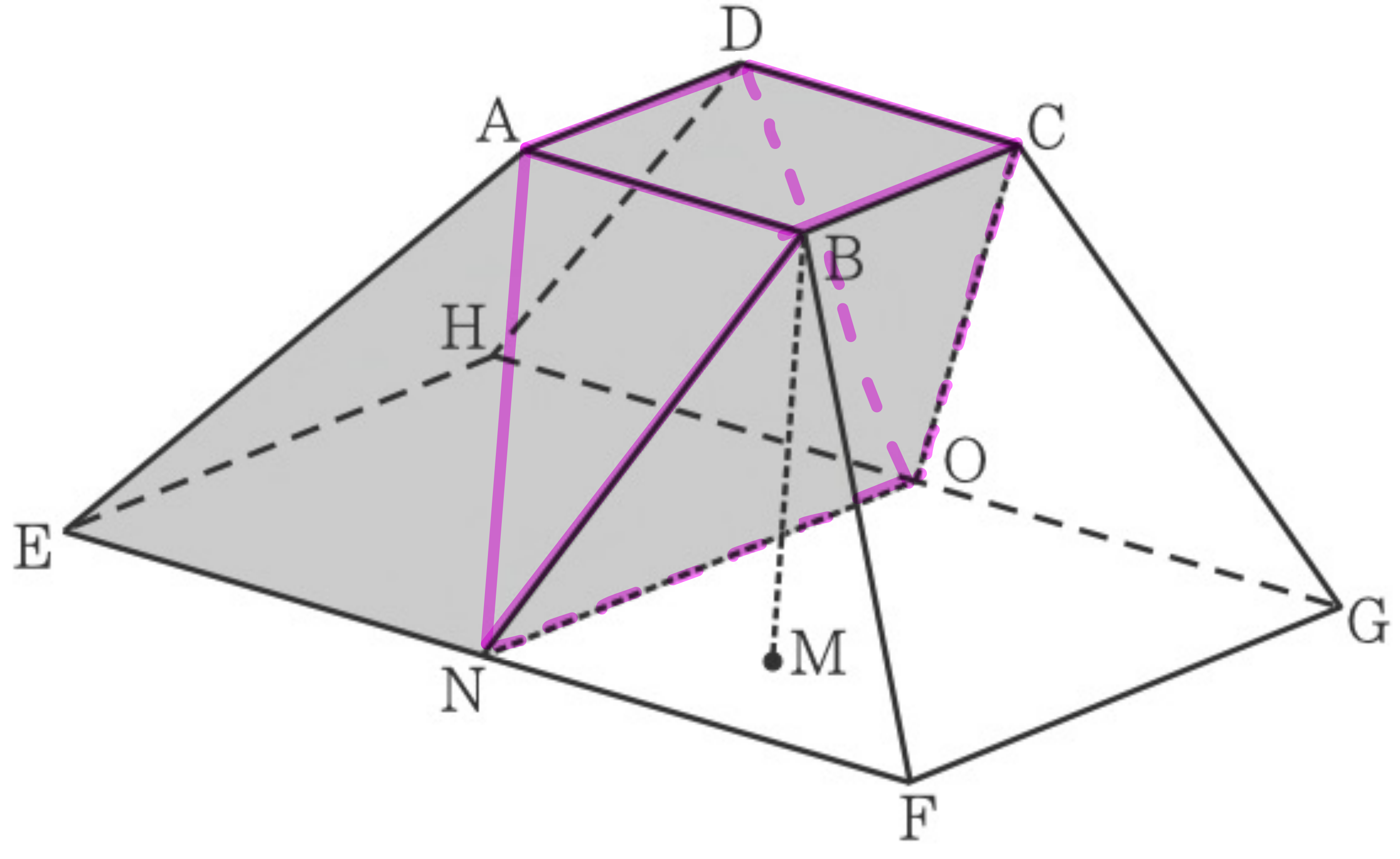
② 難問

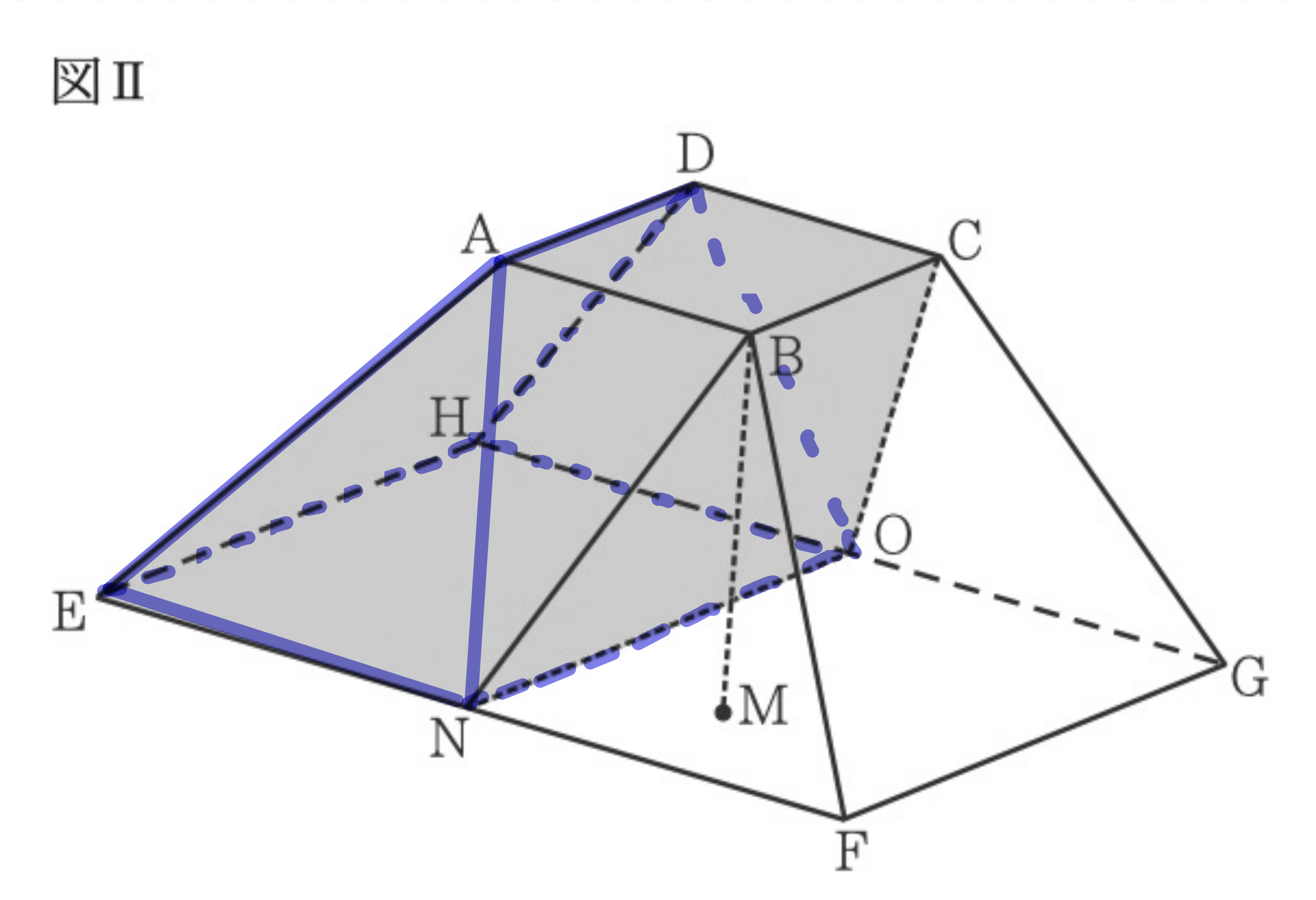
断頭三角柱の公式を用いる.



左図の立体の体積 V は.

$$V = S \times \frac{a+b+c}{3}$$



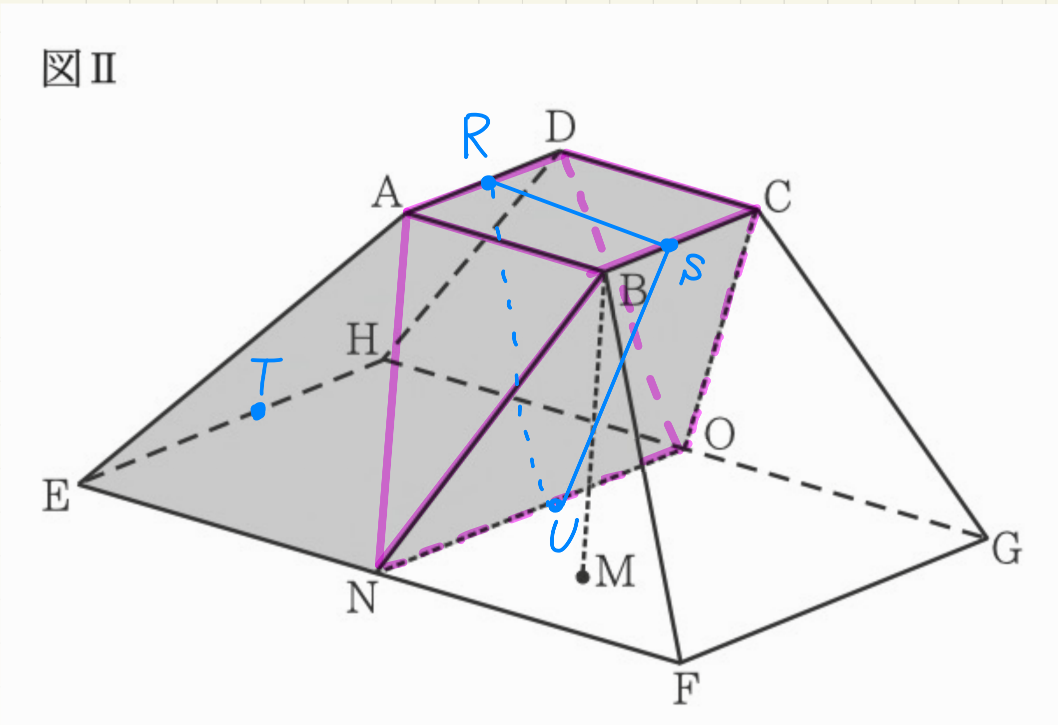


求める立体を

立体AD－ABCD

立体AD－ENOH

に分割する。



AD, BC, EH, NO のそれぞれの中点をR, S, T, U とする。

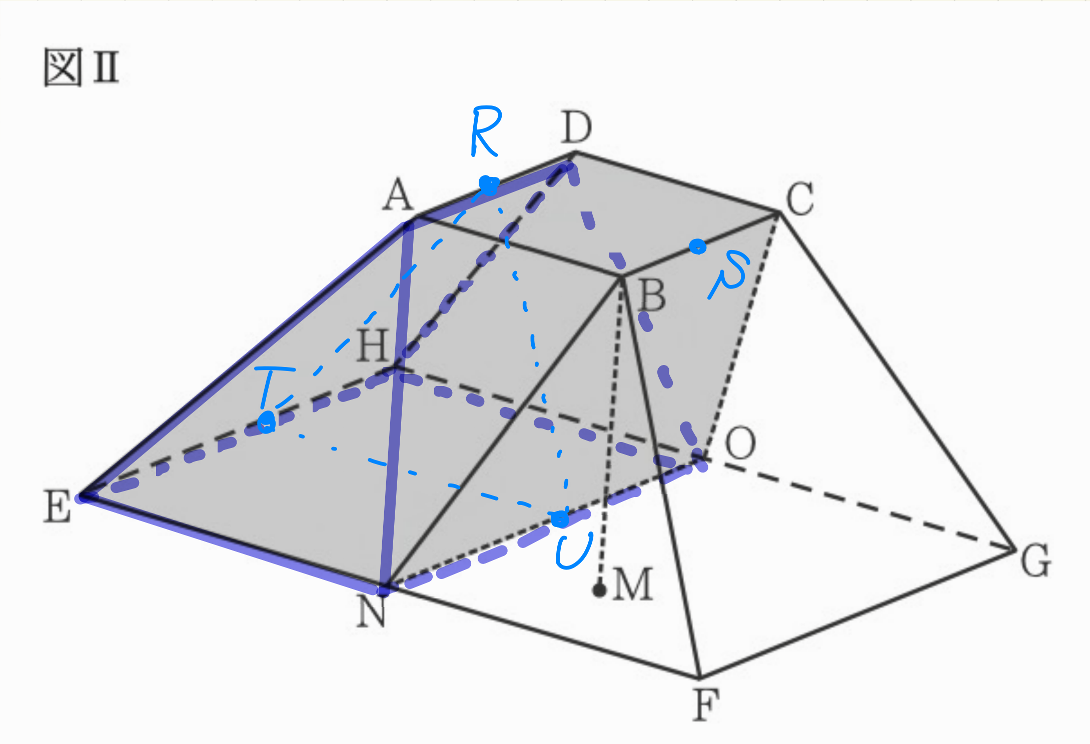
立体AD-ABCD

断頭三角柱の公式より

$$体積 = \triangle RSU \times \frac{AR + BS + NU}{3}$$

$$+ \triangle RSU \times \frac{RD + SC + UO}{3}$$

$$= \triangle RSU \times \frac{AD + BC + NO}{3}$$



立体AD-ENOH

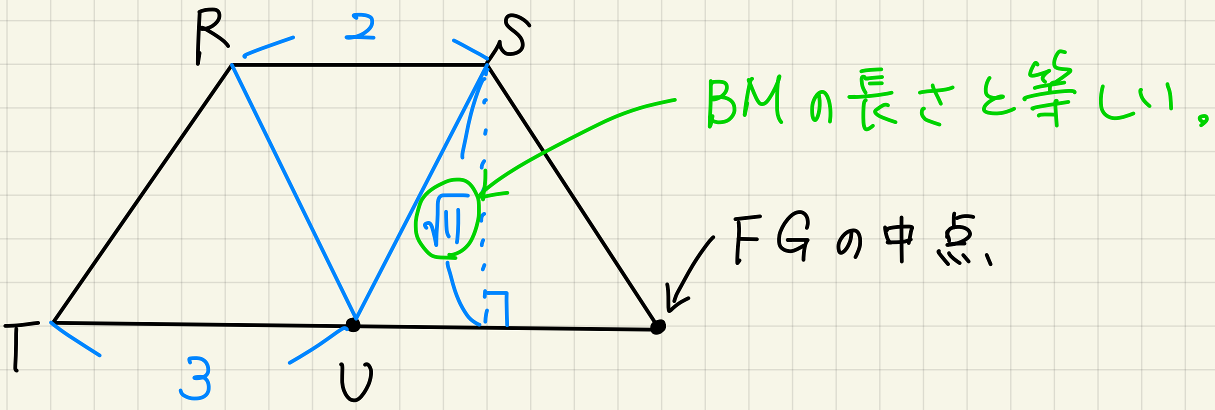
断頭三角柱の公式より

$$体積 = \triangle RTU \times \frac{AR + ET + NU}{3}$$

$$+ \triangle RTU \times \frac{RD + TH + UO}{3}$$

$$= \triangle RTU \times \frac{AD + EH + NO}{3}$$

ここで、△RSUと△RTUについて.



$$\triangle RSU = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{11} = \sqrt{11}\ cm^2$$

$$\triangle RTU = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} = \frac{3}{2}\sqrt{11}\ cm^2$$

よって、求める体積は.

$$\sqrt{11} \times \frac{2+2+4}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{11} \times \frac{2+4+4}{3}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{11} + 5\sqrt{11}$$

$$= \frac{23\sqrt{11}}{3}\ cm^3$$