2023年度　宮城県
数学

KmKm

第一問

1. 与式 $= -7$

2. 与式 $= -15 \times \left(-\frac{3}{5}\right)$

$$= 9$$

3.
$$\begin{array}{r|l} 2 & 110 \\ \hline 5 & 55 \\ \hline & 11 \end{array}$$

よって、$110 = 2 \times 5 \times 11$

4. $4a - 9b + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4a = 9b - 3$

$\therefore a = \frac{9b-3}{4} \quad \left(= \frac{9}{4}b - \frac{3}{4}\right)$

5. $\begin{cases} 3x - y = 17 & \text{—— ①} \\ 2x - 3y = 30 & \text{—— ②} \end{cases}$

① × 3 + ② より

$$\begin{array}{rrcr} & 9x - 3y & = & 51 \\ -) & 2x + 3y & = & 30 \\ \hline & 7x & = & 21 \\ & x & = & 3 \end{array}$$

$x = 3$ を ② に代入して、

$2 \times 3 - 3y = 30$

$-3y = 30 - 6$

$= 24$

$\therefore y = -8$

よって、$x = 3$、$y = -8$

6. 与式 $= 3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$

$= 5\sqrt{6}$

※ $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6}$

$= 2\sqrt{6}$

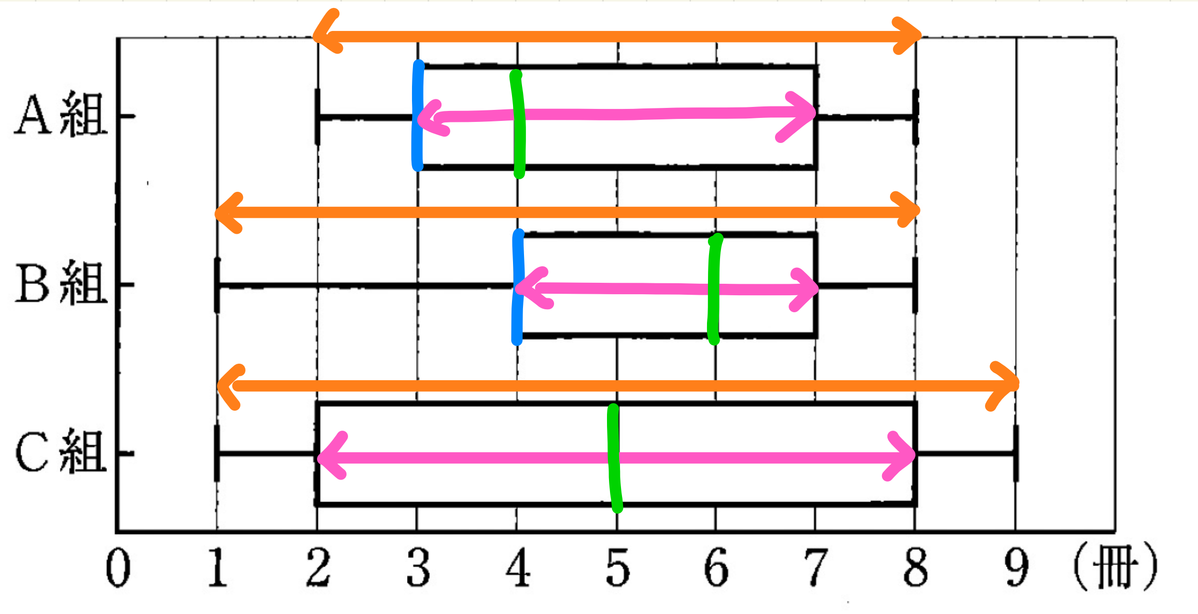
7. 点Aは $y = \frac{2}{3}x$ 上にあり $x = 6$ なので、

$y = \frac{2}{3} \times 6 = 4$　　∴ A(6, 4)

また、点Aは $y = \frac{a}{x}$ 上にあり、$x = 6$, $y = 4$ なので、

$4 = \frac{a}{6}$　⇒　$a = 24$

8.



ア：第1四分位数は、A組の方がB組より小さい。
よって誤り

イ：四分位範囲が最も小さいのは、B組である。
よって、誤り。

ウ：中央値に着目する。データ数は35人なので，
中央値は，データを小さい順に並べたときの，
18番目の生徒が借りた本の冊数である。
A組の中央値：4冊 ⇒ 6冊以上は多くても
17人。
B組の中央値：6冊 ⇒ 6冊以上は，少なくとも
18人
C組の中央値：5冊 ⇒ 6冊以上は多くても
17人。
よって，借りた本の冊数が6冊以上なのは，B組が
もっとも多い ⇒ 正しい

エ：範囲に着目する。
A組の範囲：2冊以上8冊以下
⇒ 全員（35人）が2冊以上8冊以下
の本を借りている。
B組の範囲：1冊以上8冊以下
⇒ 少なくとも1人が1冊借りている
ので，2冊以上8冊以下の本を
借りている生徒は，多くても34人
C組の範囲：1冊以上9冊以下
⇒ 少なくとも1人が1冊，1人が
9冊借りているので，2冊以上
8冊以下の本を借りている生徒は
多くても33人

よって，2冊以上8冊以下である人数は，A組がもっとも多い ⇒ 誤り

以上より，答えは ウ

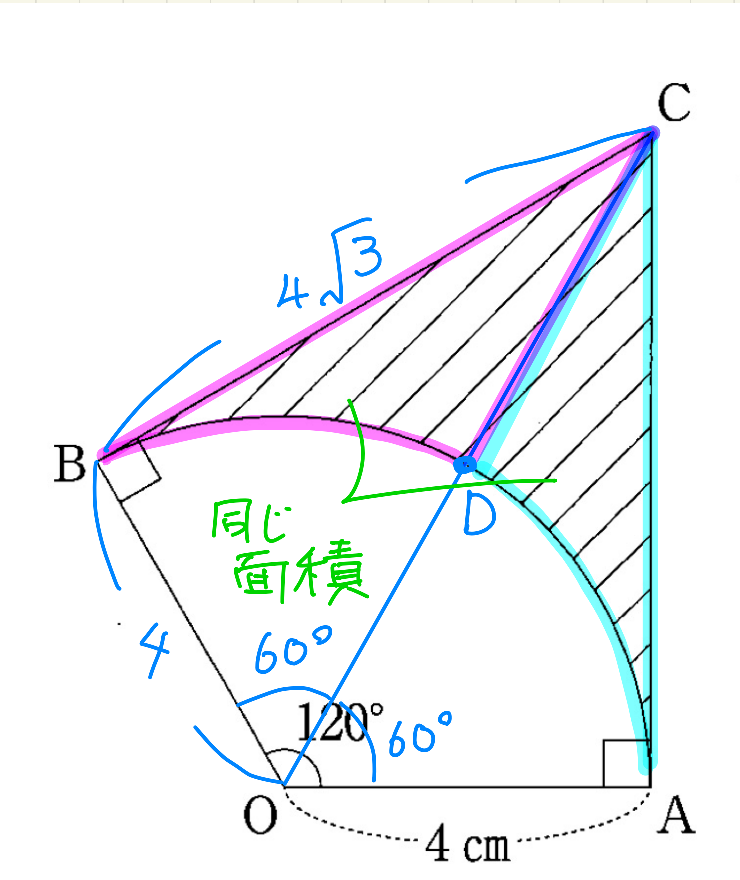
第二問

1. おうぎ形の弧の長さ ＝直径 $\times \pi \times \dfrac{\text{中心角}}{360^\circ}$

$$= 4 \times 2 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{8}{3}\pi \text{ cm}$$

2.



左右対称より

$\angle COB = \angle COA$

$\therefore \angle COB = 60^\circ$

よって，△BOC は 30°-60°-90° の直角三角形である。

$OB : OC : BC = 1 : 2 : \sqrt{3}$

(OB = 4)

$\therefore 4 : BC = 1 : \sqrt{3}$

$BC = 4\sqrt{3}$

図のピンクの部分の面積は、

$\triangle BOC$ − おうぎ形 OBD

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} - 4 \times 4 \times \pi \times \frac{60°}{360°}$

$= 8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$

よって、求める面積は、

$(8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi) \times 2 = 16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi$　cm^2

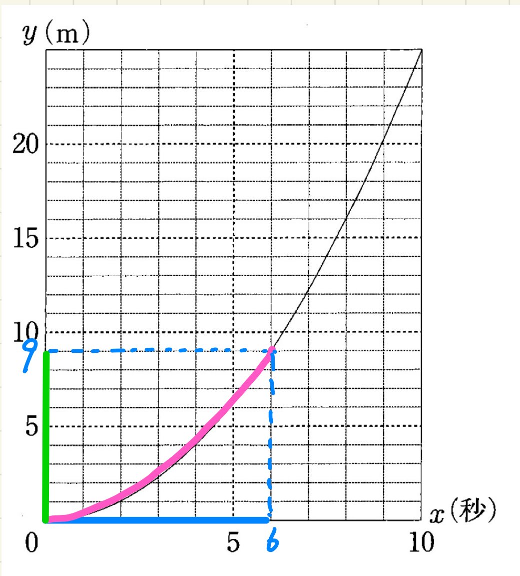
2.

(1) $y = ax^2$ において、x が p から q まで変化するときの変化の割合は、$a(p+q)$

よって、$y = \frac{1}{4}x^2$ において、x が 0 から 6 まで変化するときの変化の割合は、

$\frac{1}{4} \times (0+6) = \frac{3}{2}$

(別解)



$x = 0$ のとき、$y = 0$

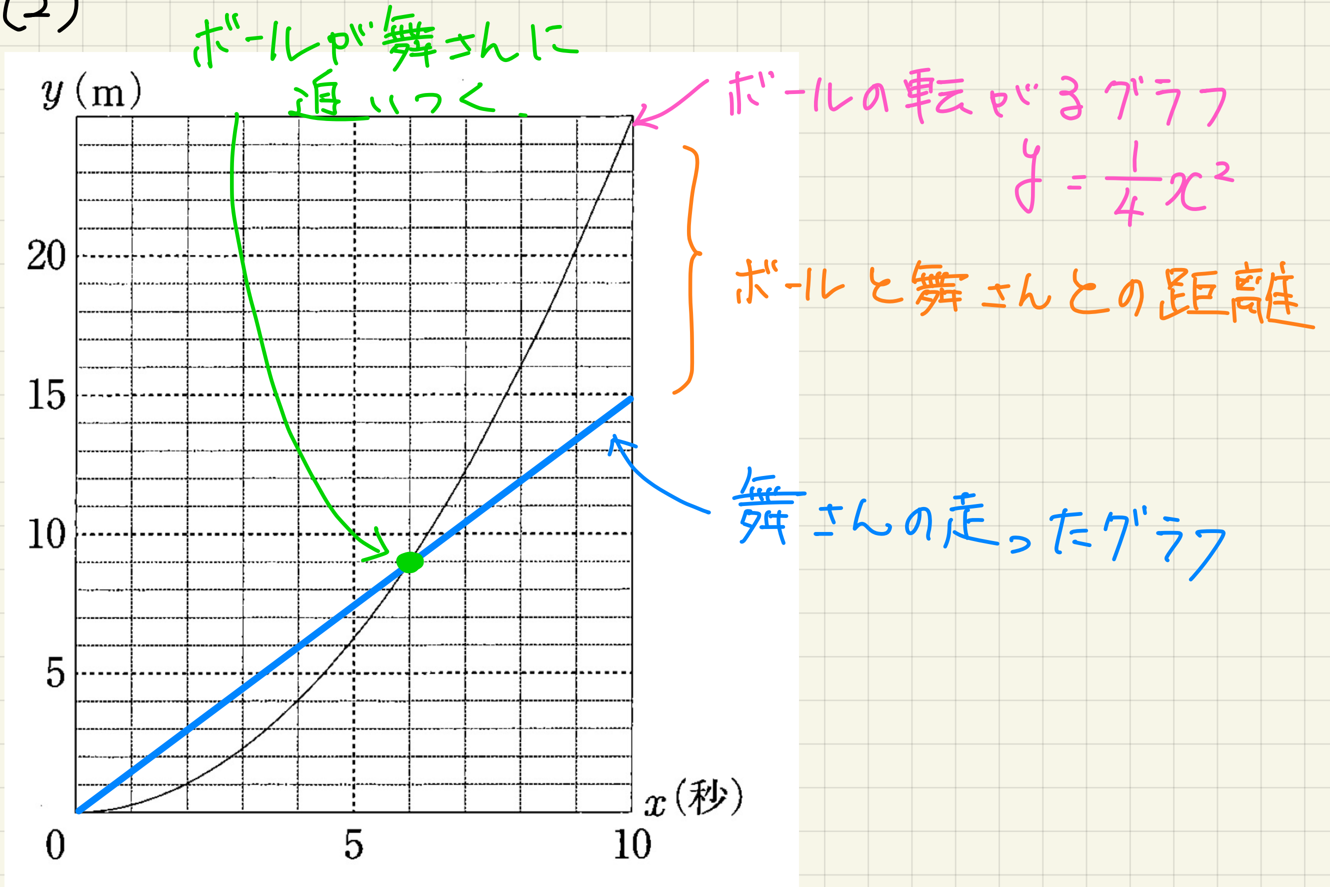
$x = 6$ のとき、$y = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9$

よって、変化の割合は、

$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{9-0}{6-0}$

$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

(2)



舞さんの走ったグラフの式を $y = ax$ とおく。(6, 9) を通るので

$$9 = 6a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

よって、$y = \frac{3}{2}x$

ボールが舞さんを追いこしてから、舞さんとボールの間の距離が18mになるのは、

$$\underbrace{\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x}_{\text{ボールと舞さんの距離}} = 18$$

※ A地点からボールまでの距離 : $\frac{1}{4}x^2$

A地点から舞さんまでの距離 : $y = \frac{3}{2}x$

よって、

$$x^2-6x=72$$
$$x^2-6x-72=0$$
$$(x+6)(x-12)=0$$
$$\therefore x=-6,\ 12$$

$x>0$ より $x=12$

よって、舞さんとボールの間の距離が18mとなるのは、ボールが転がり始めてから12秒後

3.

最初に箱の中にあった白球の数をx個とする。

赤球：白球 = 4：1 より 赤球の数は$4x$個。

これに白球を300個入れたので、球の合計は

$$x+4x+300=5x+300$$

120個の球のうち、赤球が80個なので、

$$\frac{4x}{5x+300}=\frac{80}{120}$$

$$\frac{\text{赤球}}{\text{全体の球}}=\frac{\text{赤球80個}}{\text{全体が120個}}$$

よって、

$$\frac{4x}{5x+300}=\frac{2}{3} \iff 12x=2(5x+300)$$

$$12x-10x=600 \quad \therefore x=300$$

白球が300個なので、赤球は、$300\times4=1200$個

4.

(1)

	1列目	2列目	3列目
1行目	1	2	3
2 〃	6	5	4
3 〃	7	8	9
4 〃	12	11	10
5 〃	13	14	15
6 〃	18	17	16
7 〃	19	20	21
8 〃	24	23	22
9 〃	25	26	27
10 〃	30	29	28
11 〃	31	32	33
12 〃	36	35	34
13 〃	37	38	39
14 〃	42	41	40
15 〃	43	44	45

左図より、「45」は、
15行目の3列目

(2)

(ア) 上図より各行の最も小さいものは、＿の数である。

1行目 ⇒ 1、2行目 ⇒ 4、3行目 = 7 …

$\xrightarrow{+3\ ①}$ 　 $\xrightarrow{+3\ ②}$

… (n − 1)行目 ⇒ ?、n行目 ⇒ ?

$\xrightarrow{+3\ (n-1)}$

よって，n行目の最も小さい数Pは．

$$P = 1 + \underbrace{3(n-1)} = 1 + 3n - 3$$
$$= 3n - 2$$

+3 が $n-1$ 個ある．

(イ) 各行の最も大きい数は．最も小さい数 +2 である。

$n-1$ 行目で最も小さい数は

$$3(n-1) - 2 = 3n - 3 - 2$$
$$= 3n - 5$$

(ア)より n行目の最も小さい数は．
$3n-2$ なので $n-1$行目では

$3(n-1) - 2$

よって，$n-1$ 行目で最も大きい数Qは

$$\underbrace{3n-5}_{最も小さい数} + \underbrace{2}_{+2} = 3n - 3$$

$P + Q = 349$ より

$$3n - 2 + 3n - 3 = 349$$
$$6n = 354 \Rightarrow n = 59$$

59は奇数なので，3列目は最も大きい数である。
n行目の最も小さい数は．$3n-2$ より

$$3 \times 59 - 2 = 175$$ ⇐ 59行目の最も小さい数．

よって，最も大きい数は．$175 + 2 = 177$

最も小さい数+2

第三問

1.(1) $(a, a) = (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$

$(b, 0) = (1,0)\ (2,0), (3,0), (4,0)$

(a, a) と $(b, 0)$ は重なることがないので、

$\triangle OPQ$ は全部で $4 \times 4 = 16$ 通り

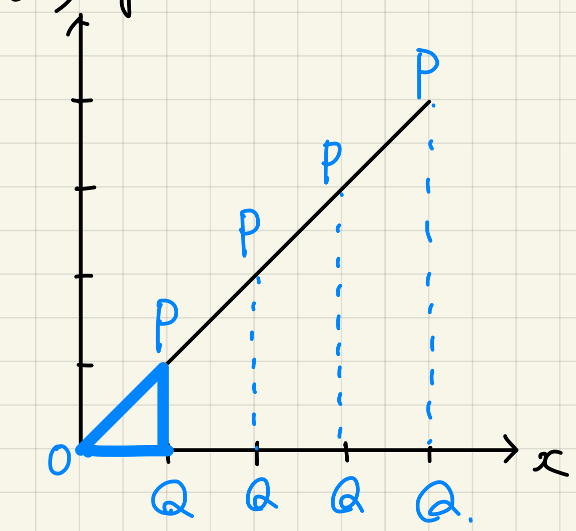
(注) $(a, a) = (1,1)$ に対して、

$(b, 0) = (1,0), (2,0), (3,0), (4,0)$ の

4通り。(a, a) の組は4通りあるので、

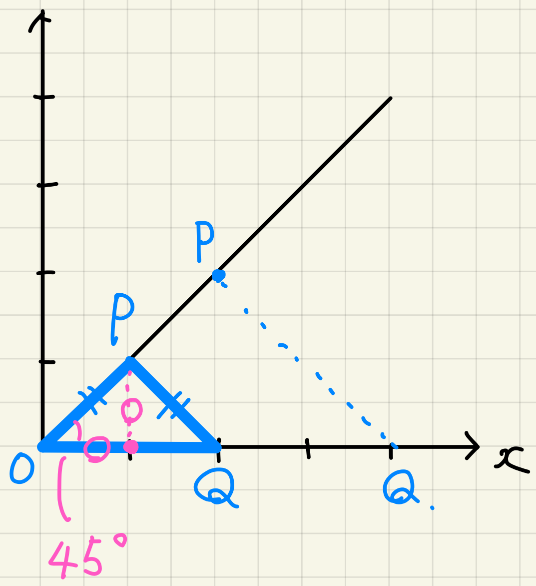
$4 \times 4 = 16$ 通り

(2)



① 左図のように、Pのx座標とQのx座標が等しいとき、(すなわち $a = b$)、$\triangle OPQ$ は直角三角形になる。

このときの場合の数は4通り



② 左図のように、$OP = OQ$ となるとき、

$\angle POQ = \angle PQO = 45°$

であるから、$\angle OPQ = 90°$

よって、$\triangle OPQ$ は直角三角形であり、このときの場合の数は2通り

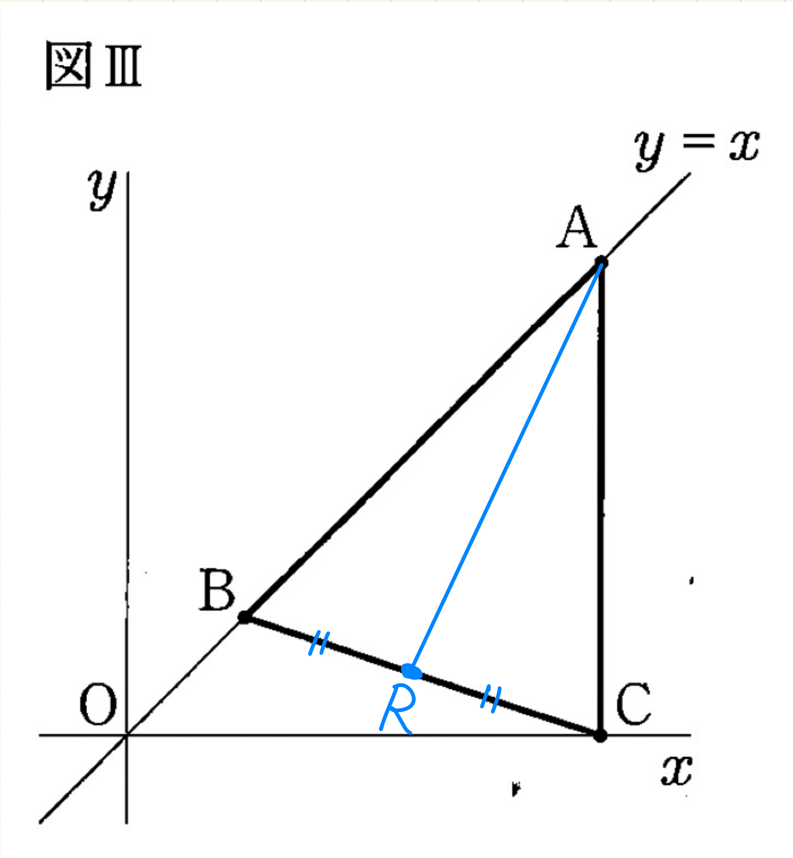
①, ② より △OPQ が直角三角形となるのは

$4 + 2 = 6$ 通り

よって求める確率は

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

2. (1)



辺BCの中点をRとする。
△ABRと△ACRにおいて，底辺をBR, CRとすると，高さは等しいので，面積比は底辺比と等しい。

よって，

△ABR : △ACR = 1 : 1

∴ △ABRと△ACRの面積は等しい。

ゆえに，頂点Aと辺BCの中点を通る直線は △ABCを2等分する。

エ

(2). B, Cを通る直線の式を $y=ax+b$ とおく。
1次関数では、傾き＝変化の割合なので、

$$a=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

$$=\frac{0-1}{4-1}$$ …B(1,1)→C(4,0)の増加量

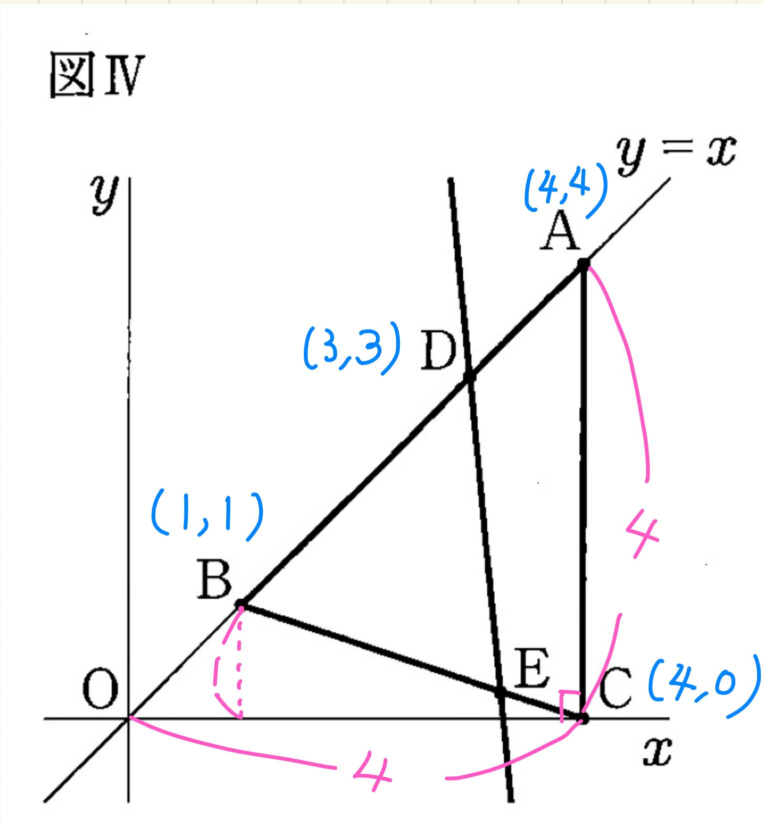
$$=-\frac{1}{3}$$

よって、$y=-\frac{1}{3}x+b$ で、C(4,0)を通るので、

$$0=-\frac{1}{3}\times 4+b \quad \Rightarrow b=\frac{4}{3}$$

したがって、求める直線は、$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

(3)



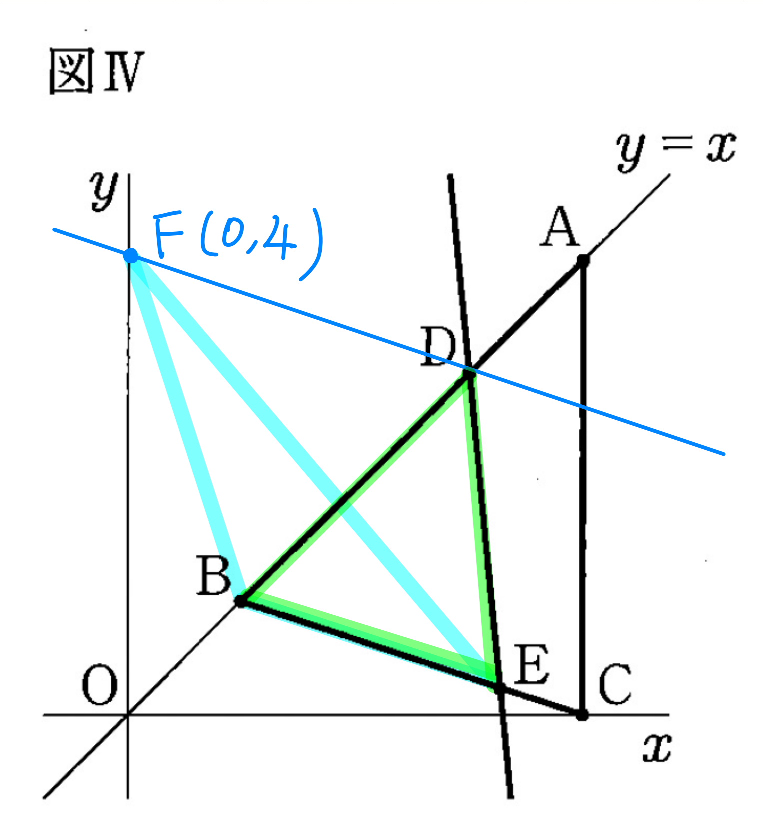
$$\triangle ABC=\triangle AOC-\triangle BOC$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\times 4\times 4}_{\triangle AOC}-\underbrace{\frac{1}{2}\times 4\times 1}_{\triangle BOC}$$

$$=8-2=6$$

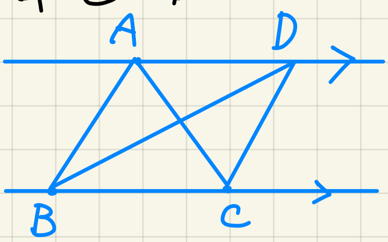
直線DEは、△ABCを2等分するので、

$$\triangle DBE=\underbrace{6}_{\triangle ABC}\times\frac{1}{2}=3 \quad \text{―― ㋐}$$



また、点Dを通り、BCに平行な直線をひく。この直線とy軸との交点をFとする。

等積変形より、△FBEと△DBEの面積は等しい。―①



△ABC=△DBC

直線FDの式を $y = mx + n$ とおくと、BCと平行であるから、$m = -\frac{1}{3}$

BCの式と傾きが等しい。

よって、$y = -\frac{1}{3}x + n$ で、D(3, 3)を通るので、

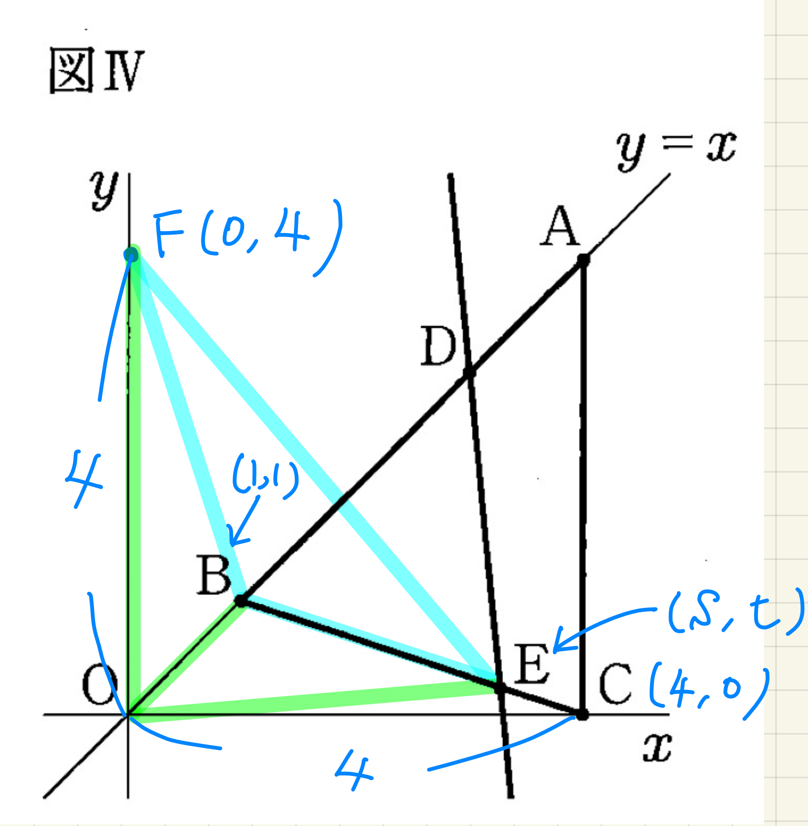
$$3 = -\frac{1}{3} \times 3 + n \quad \Rightarrow \quad n = 4$$

よって、直線FDの式は、

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

ゆえに、Fの座標は、(0, 4)

$y = -\frac{2}{3}x + 4$の切片



点Eの座標を(S, t)とする。

$\triangle FBE = \triangle FOE - (\triangle FOB + \triangle BOE)$

$\triangle FOE$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times S = 2S$$

$\triangle FOB$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$$

$\triangle BOE$

$$\triangle BOE = \triangle BOC - \triangle EOC$$
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 1 - \frac{1}{2} \times 4 \times t$$
$$= 2 - 2t$$

よって,

$$\triangle FBE = \triangle FOE - (\triangle FOB + \triangle BOE)$$
$$= 2s - (2 + 2 - 2t)$$
$$= 2s + 2t - 4 \quad —— ①$$

ここで,点Eは,直線BC : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ 上にあり.

E(s, t) から

$$t = -\frac{1}{3}s + \frac{4}{3} \quad —— ②$$

これを①式に代入して.

$$\triangle FBE = 2s + 2\left(-\frac{1}{3}s + \frac{4}{3}\right) - 4$$
$$= 2s - \frac{2}{3}s + \frac{8}{3} - 4$$
$$= \frac{4}{3}s - \frac{4}{3}$$

㋐,①より △FBE = 3 なので.

$$\frac{4}{3}s - \frac{4}{3} = 3$$
$$\frac{4}{3}s = \frac{13}{3}$$
$$s = \frac{13}{4}$$

$$\frac{4}{3}s = \frac{4}{3} + 3$$
$$= \frac{13}{3}$$

$$4s = 13$$
$$s = \frac{13}{4}$$

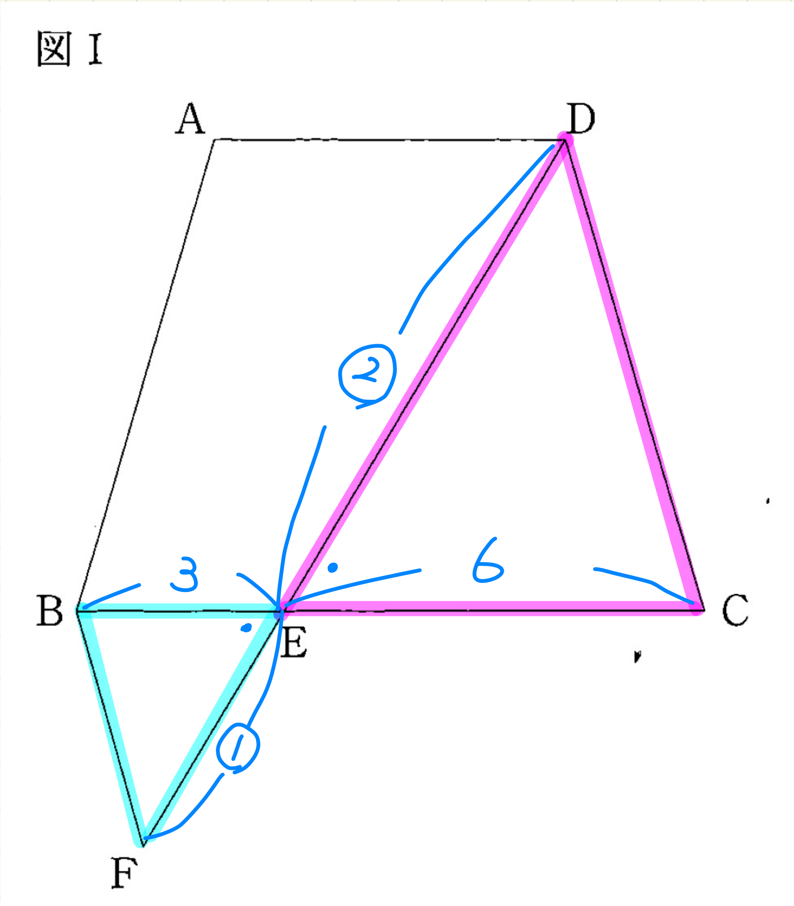
$s = \frac{13}{4}$ を ② に代入して.

$$t = -\frac{1}{3} \times \frac{13}{4} + \frac{4}{3}$$
$$= \frac{-13+16}{12}$$
$$= \frac{3}{12}$$
$$= \frac{1}{4}$$

よって, 点 E の 座標は. $\left(\frac{13}{4}, \frac{1}{4}\right)$

第四問

1.



△CDE と △BFE において, 仮定より

DE : FE = 2 : 1 —①

BC = 9cm, BE = 3cm より

CE = 6cm なので.

CE : BE = 2 : 1

①,② より

DE : FE = CE : BE —③

また，対頂角は等しいから

$\angle CED = \angle BEF$ —④

③，④より2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle CDE \backsim \triangle BFE$（証明終わり）

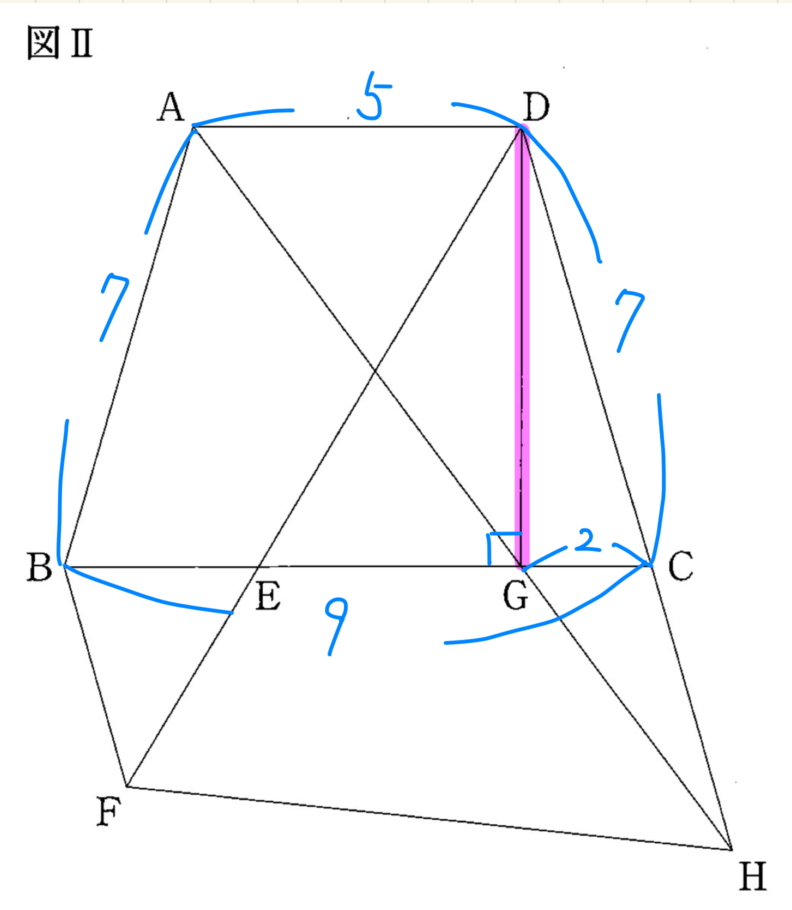
2.

1.より $\triangle CDE \backsim \triangle BFE$ で相似比は $2:1$。
対応する辺の比は等しいから

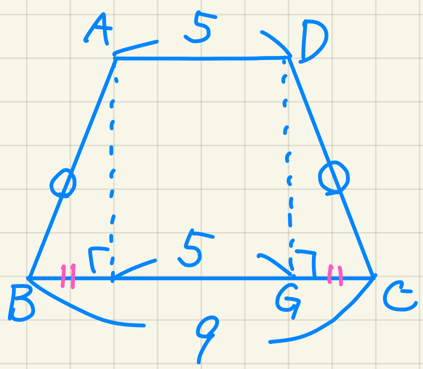
$\underbrace{CD}_{7cm} : BF = 2:1$

$\therefore 2BF = 7 \Rightarrow BF = \frac{7}{2}$ cm

3.(1)



□ABCDは等脚台形であるから，CG＝2cm



$CG = \frac{9-5}{2} = 2$cm.

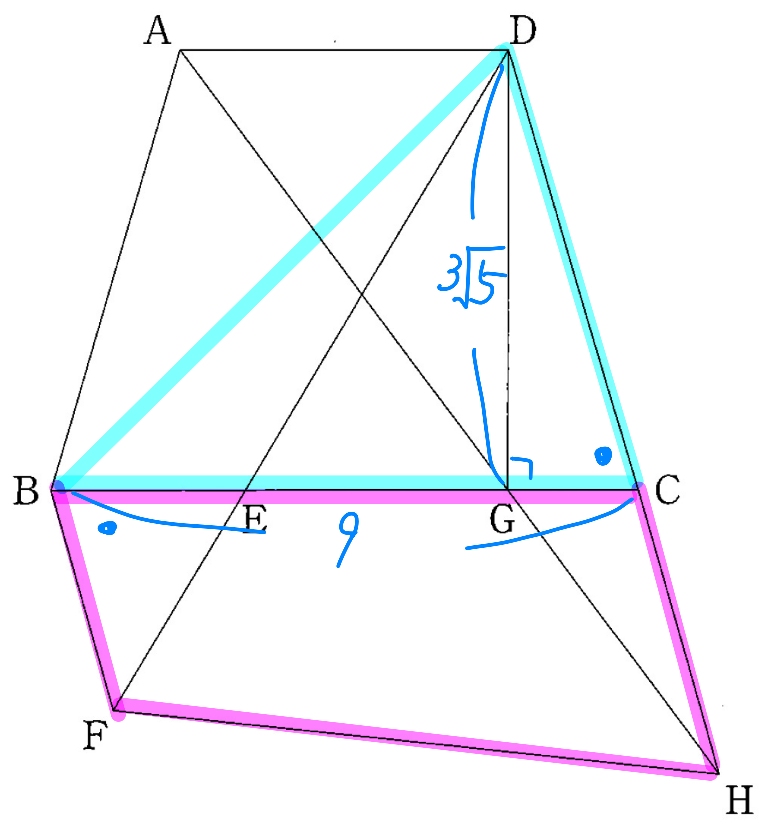
よって、△DGCで三平方の定理より

$$DG = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$= 3\sqrt{5}\ \text{cm}$$

(2) 難問

図Ⅱ



$$\triangle DBC = \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{5} = \frac{27\sqrt{5}}{2}$$

また、△CDE ∽ △BEF より、対応する角は等しいから

$\angle DCE = \angle EBF$

よって、錯角が等しいので、

$BF \parallel DH$

ゆえに□BFHCは、$BF \parallel HC$ の台形である。

△DBCの底辺をDC、□BFHCの上底と下底をそれぞれBF、CHとすると、△DBCと□BFHCの高さは等しい。この高さをh cmとすると、

$$\triangle DBC = \frac{1}{2} \times DC \times h$$

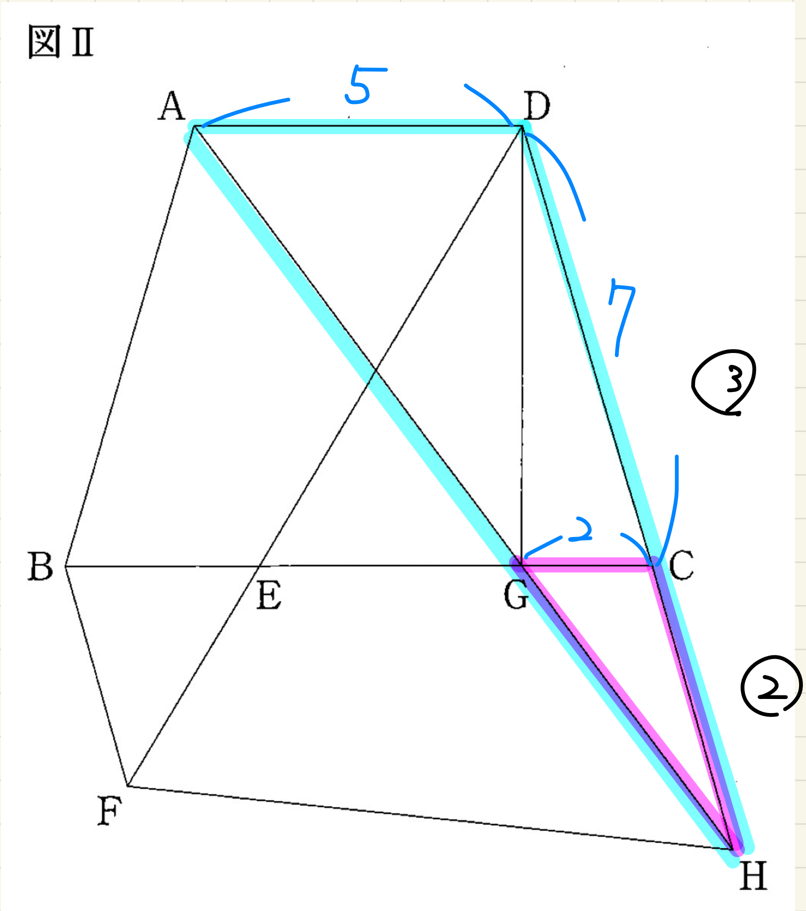
$$\square BFHC = \frac{1}{2} \times (BF + HC) \times h$$

よって,

$$\triangle DBC : \square BFHC = \frac{1}{2}DC\times h : \frac{1}{2}(BF+HC)\times h$$

$$= DC : (BF+HC)$$

HCについて



△HCGと△HDAにおいて, CG // DAより

$\angle HCG = \angle HDA$ —①

$\angle HGC = \angle HAD$ —②

①,②より2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle HCG \sim \triangle HDA$

対応する辺の比は等しいから

$HC : HD = 2 : 5$

$HD = HC + CD = HC + 7$ より

$$HC : HC+7 = 2 : 5$$

$$5HC = 2(HC+7)$$

$$3HC = 14$$

$$HC = \frac{14}{3}$$

よって

$$\underbrace{\triangle DBC}_{\frac{27\sqrt{5}}{2}} : \square BFHC = DC : (BF + HC)$$

$$= 7 : \left(\frac{7}{2} + \frac{14}{3}\right)$$

$$= 7 : \frac{21 + 28}{6}$$

$$= 7 : \frac{49}{6}$$

したがって

$$\frac{27\sqrt{5}}{2} : \square BFHC = 7 : \frac{49}{6}$$

$$7 \times \square BFHC = \frac{27\sqrt{5}}{2} \times \frac{49}{6}$$

$$\therefore \square BFHC = \frac{27\sqrt{5}}{2} \times \frac{49}{6} \times \frac{1}{7}$$

$$= \frac{9\sqrt{5} \times 7}{2 \times 2}$$

$$= \frac{63\sqrt{5}}{4} \text{ cm}^2$$

※

$$\frac{\overset{9}{\cancel{27}}\sqrt{5}}{2} \times \frac{\overset{7}{\cancel{49}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{9\sqrt{5} \times 7}{2 \times 2} = \frac{63\sqrt{5}}{4}$$