2022年度　福岡県
数学

KmKm

$\boxed{1}$

(1) 与式 $= 6 - 15$

$= -9$

(2) 与式 $= 3a - 12b - 2a - 5b$

$= a - 17b$

(3) 与式 $= \sqrt{18} \div \sqrt{2} + \sqrt{14} \div \sqrt{2}$

$= \sqrt{9} + \sqrt{7}$

$= 3 + \sqrt{7}$

(4) 式を整理すると

$x^2 - 4 = x + 8$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$

$\therefore x = -3, 4$

(5) y は x に反比例するので、$y = \dfrac{a}{x}$ とおく。

$x = 2$, $y = 9$ を代入して

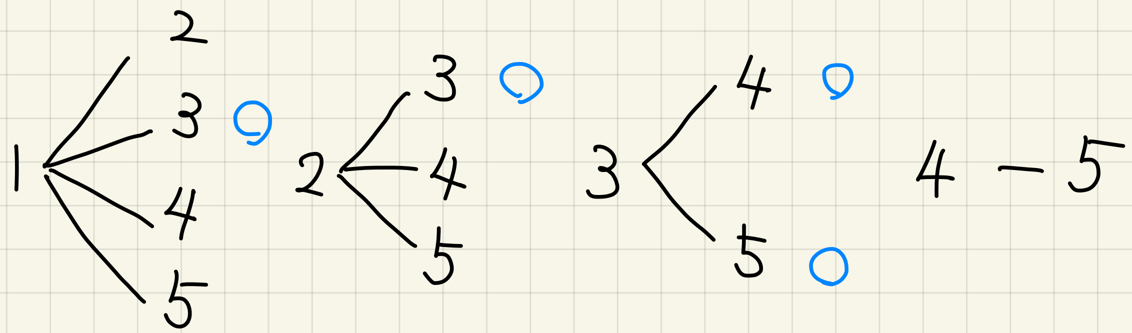
$9 = \dfrac{a}{2} \Rightarrow a = 18$

よって、$y = \dfrac{18}{x}$ で、$x = -3$ なので、

$y = \dfrac{18}{-3}$

$= -6$

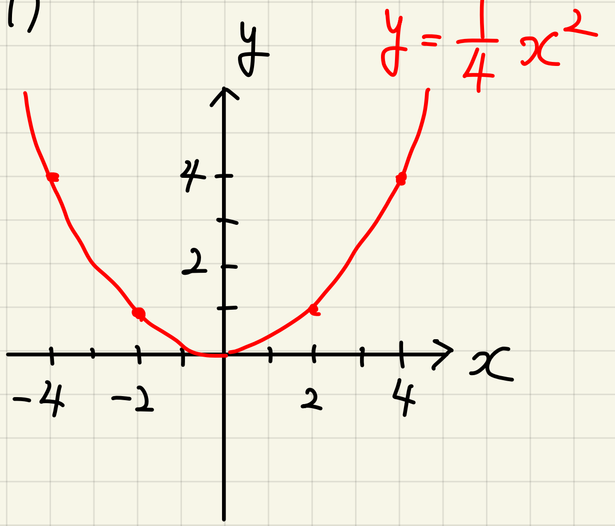
(6) 樹形図は以下の通り



カードの取り出し方は10通り　そのうち、3を含む取り出し方は4通り。よって、求める確率は

$$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

(7)



(8) 5〜10の度数は6人
10〜15の度数は9人
15〜20の度数は17人
よって、20未満の度数は、6+9+17=32人
したがって、20未満の累積相対度数は

$$\frac{32}{60}=0.533\cdots \Rightarrow 0.53$$

(9) 箱に入っているねじの個数をx個とする。

x個の中から30個取り出し印をつけたので、印のあるねじの割合は

$$\frac{30}{x}$$

また50個のねじを取り出したとき、6個に印がついていたので、その割合は

$$\frac{6}{50}$$

これらの割合がおおよそ等しいので、

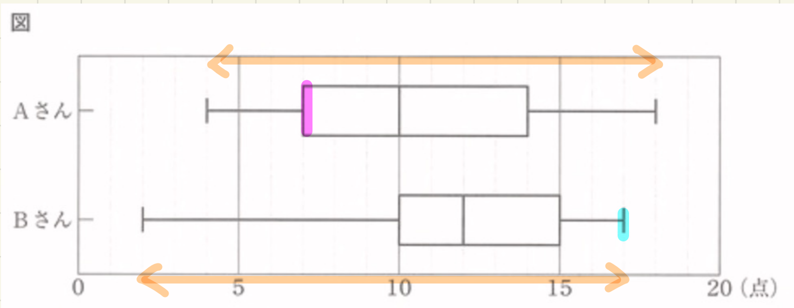
$$\frac{30}{x} = \frac{6}{50} \Leftrightarrow \frac{6}{50}x = 30$$

$$\therefore x = 30 \times \frac{50}{6}$$

$$= 250個$$

$\boxed{2}$

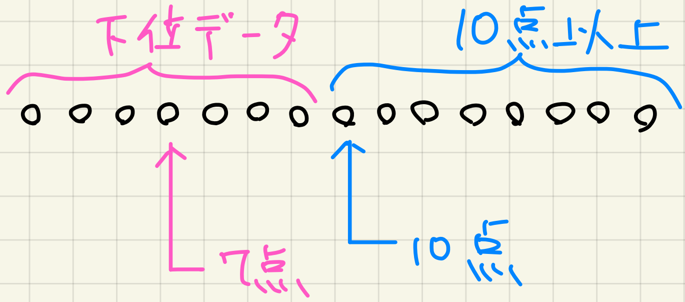
(1)



ア：Aさんの第1四分位数は7点である。よって誤り

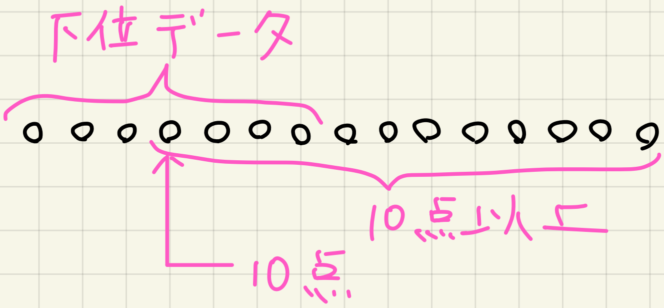
イ：Bさんの最大値は17点である。よって正しい。

ウ：Aさんの中央値は10点であり、第1四分位数は7点である。



⇒ 10点以上は少なくとも8回あるが、12回より少ない。

Bさんの第1四分位数は10点である。



⇒ 少なくとも12回は10点以上

よって、10点以上のデータは、AさんよりBさんの方が多い。⇒ 誤り

エ：データの範囲 = 最大値 − 最小値

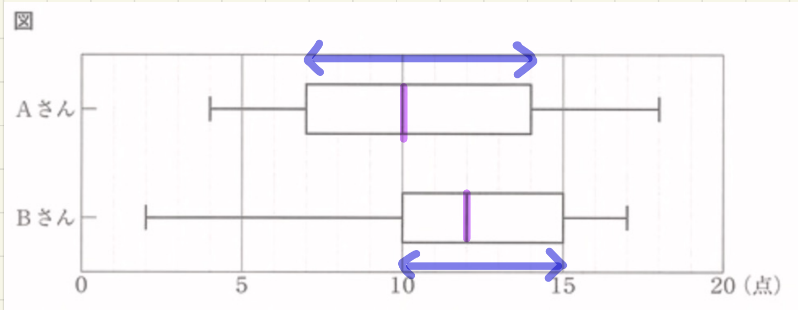
Aさんのデータの範囲 = 18 − 4 = 14

Bさんのデータの範囲 = 17 − 2 = 15

よって、データの範囲は、AさんよりBさんの方が大きい ⇒ 正しい！

以上より、答えは イ, エ

(2)



Aさんの中央値は10点 P、Bさんの中央値は12点 Q

Aさんの四分位範囲は 14−7=7点 R、Bさんの四分位範囲は 15−10=5点 S

よって、②Bさんのデータの方がAさんのデータより中央値は大きく、四分位範囲は小さい。

$\boxed{3}$

(1)

図1の池の面積Aは

$$A = \overset{\text{半円}}{\frac{1}{2}\pi r^2} + \overset{\text{長方形}}{a \times 2r} + \overset{\text{半円}}{\frac{1}{2}\pi r^2}$$

$$= \pi r^2 + 2ar$$

図2の池の面積Bは

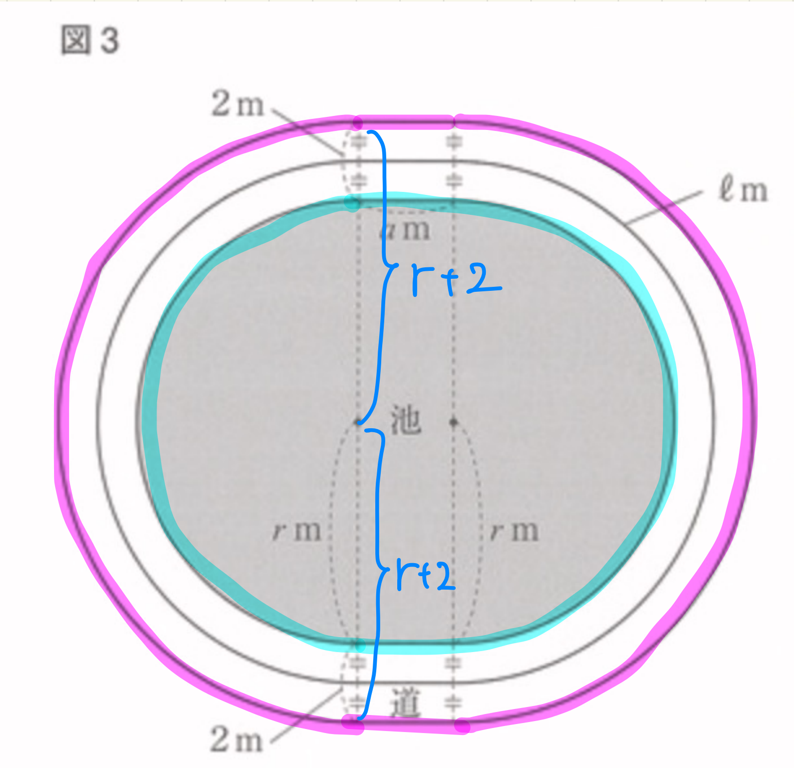
$$B = \overset{\text{半円}}{\frac{1}{2}\pi a^2} + \overset{\text{長方形}}{r \times 2a} + \overset{\text{半円}}{\frac{1}{2}\pi a^2}$$

$$= \pi a^2 + 2ar$$

よって.

$$A - B = \pi r^2 + 2ar - (\pi a^2 + 2ar)$$
$$= \pi r^2 + 2ar - \pi a^2 - 2ar$$
$$= \pi(r^2 - a^2) \quad ウ$$

(2)

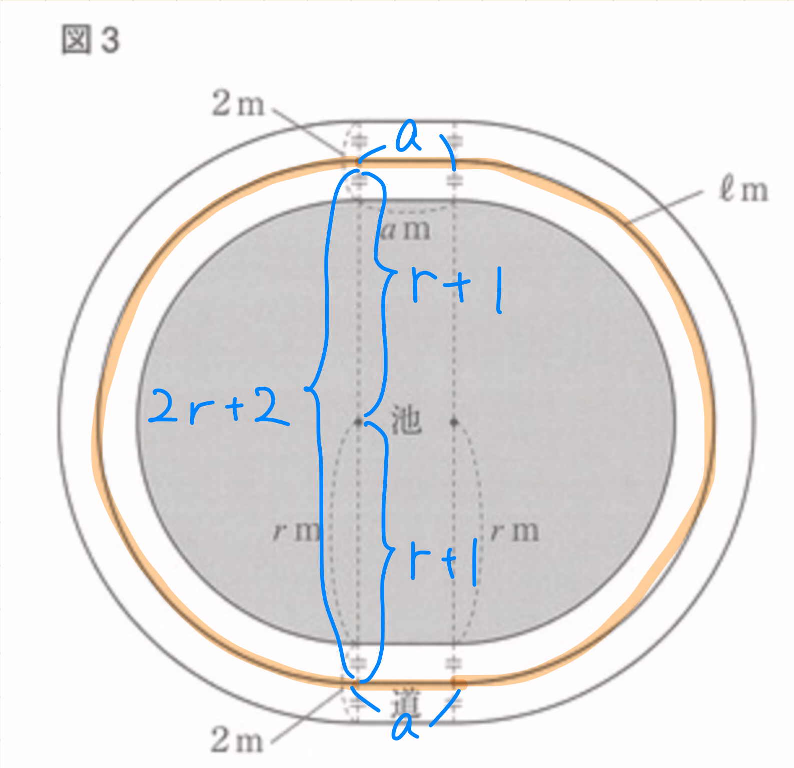


道路の面積 S は

$$S = \Big\{ \underbrace{\tfrac{1}{2}\pi(r+2)^2}_{半円} + \underbrace{a \times (2r+4)}_{長方形} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\pi(r+2)^2}_{半円} \Big\}$$
$$- (\pi r^2 + 2ar)$$

(1) より

$$= \{\pi(r+2)^2 + 2ar + 4a\} - (\pi r^2 + 2ar)$$
$$= \{\pi(r^2 + 4r + 4) + 2ar + 4a\} - (\pi r^2 + 2ar)$$
$$= \pi r^2 + 4\pi r + 4\pi + 2ar + 4a - \pi r^2 - 2ar$$
$$= 4a + 4\pi r + 4\pi \quad エ$$



また、道のまん中を通る線ℓは.

$$\ell = \frac{1}{2}\pi(2r+2) + a + a + \frac{1}{2}\pi(2r+2)$$

$$= \pi(2r+2) + 2a$$

$$= 2a + 2\pi r + 2\pi$$ Y

よって、

$$S = 4a + 4\pi r + 4\pi$$

2でくくる

$$= 2(\underbrace{2a + 2\pi r + 2\pi}_{\ell})$$

$$= 2\ell$$

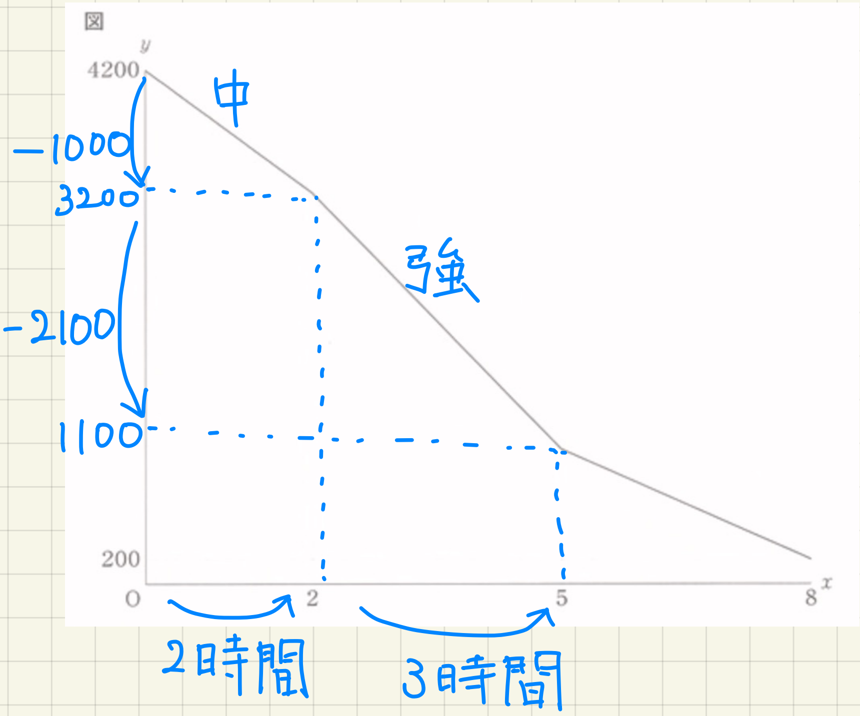
$$\therefore\ S = 2\ell$$ Z

$\boxed{4}$

(1) 正午から午後1時30分まで、加湿器Aは「中」で使用していた。
「中」では1時間あたり500mLの水を消費するので、1時間30分(=1.5時間)では、

$500 \times 1.5 = 750\text{mL}$

(2)



最初の2時間では「中」であり、1時間あたり500mL使用するので、2時間では、

$500 \times 2 = 1000\text{mL}$

の水を使用する。
したがって、午後2時の水の残量は、

$4200 - 1000 = 3200$

また、午後2時から午後5時までの3時間では、「強」であり、1時間あたり700mL使用するので、3時間では

$700 \times 3 = 2100\text{mL}$

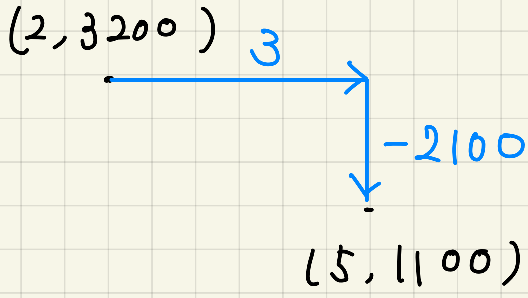
の水を使用する。したがって午後5時の水の残量は、

$3200 - 2100 = 1100$

以上より、$2 \leqq x \leqq 5$ では $(2, 3200)$、$(5, 1100)$ を通る。

$2 \leqq x \leqq 5$ のとき，$y = ax + b$ とおくと，1次関数では傾き＝変化の割合なので

$$a = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$



$$= \frac{1100 - 3200}{5 - 2}$$

$$= \frac{-2100}{3}$$

$$= -700$$

よって，$y = -700x + b$ で $(2, 3200)$ を通るので．

$$3200 = -700 \times 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4600$$

以上より $y = -700x + 4600$

(3)

加湿機Bのグラフの式を $y = mx + n$ とおくと，$(2, 4200)$，$(7, 200)$ を通るので．

$$m = \frac{200 - 4200}{7 - 2}$$

$$= \frac{-4000}{5}$$

$$= -800$$

よって，$y = -800x + n$ で $(7, 200)$ を通るので．

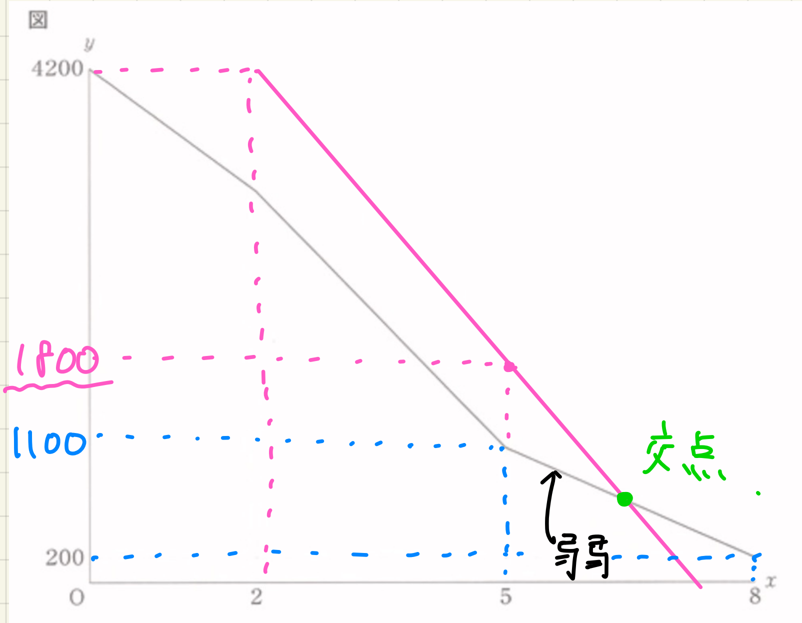
$$200 = -800 \times 7 + n \quad \Rightarrow \quad n = 5800$$

以上より加湿機Bのグラフの式は．

$y = -800x + 5800$ —— ①

$x = 5$ のとき、

$$y = -800 \times 5 + 5800$$
$$= -4000 + 5800$$
$$= 1800$$



左図より、加湿機AとBの水の残量が等しくなるのは、$5 \leqq x \leqq 8$ のときである。このとき、加湿器Aは「弱」で使用している。「弱」のときのグラフの式を $y = ax + b$ とおくと、

$(5, 1100)$、$(8, 200)$ を通るので、

$$a = \frac{200 - 1100}{8 - 5}$$
$$= \frac{-900}{3}$$
$$= -300$$

よって、$y = -300x + b$ で、$(8, 200)$ を通るので、

$$200 = -300 \times 8 + b \Rightarrow b = 2600$$

以上より $5 \leqq x \leqq 8$ のときの加湿機Aのグラフの式は、

$y = -300x + 2600$ —— ②

水の残量が等しくなるのは、①, ② の交点であるから

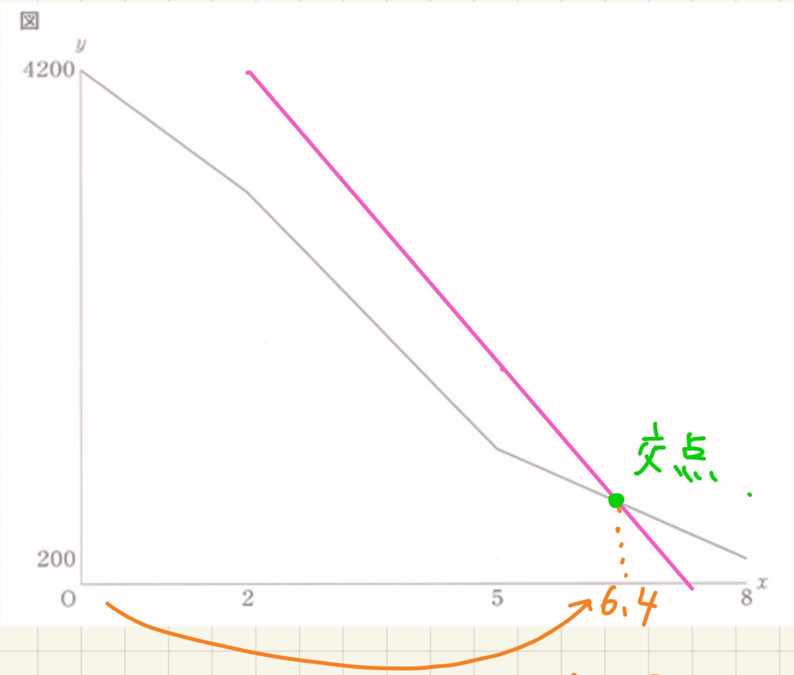
$$\begin{cases} y = -800x + 5800 & \text{——①} \\ y = -300x + 2600 & \text{——②} \end{cases}$$

の連立方程式を解けば良い。① を②に代入して

$$-800x + 5800 = -300x + 2600$$

$$-500x = -3200$$

$$x = 6.4$$



正午から6.4時間後

ここで 0.4時間を分に直すと

$$0.4 \times 60 = 24\text{分}$$

注

$\times 0.4$ (1時間 = 60分) $\times 0.4$ ⇒ ? = 60×0.4

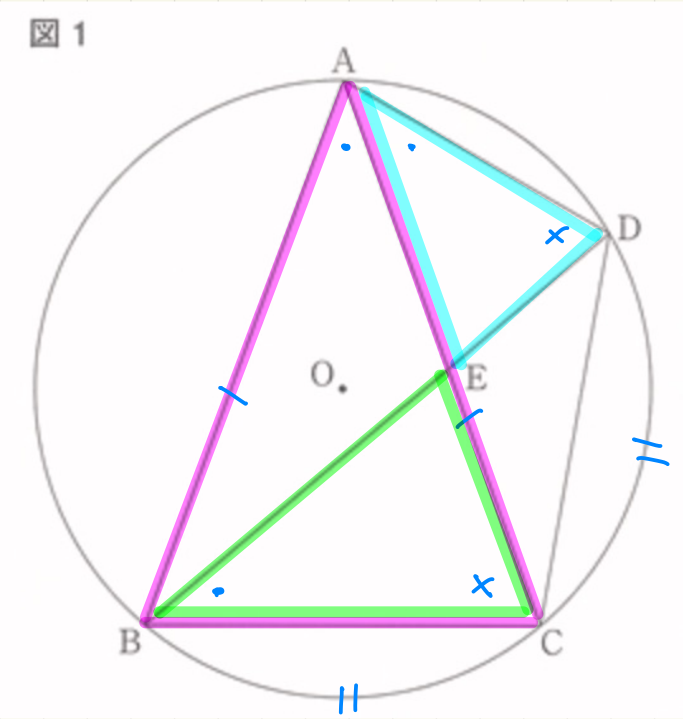
0.4時間 = ?分 　　　= 24

したがって、水の残量が等しくなるのは

午後6時24分

$\boxed{5}$

(1)



△AED 又は △BEC

・△ABC ∽ △AED の理由

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ より円周角は等しいから

∠BAC = ∠EAD ― ①

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいから

∠BCA = ∠EDA ― ②

①, ② より 2組の角がそれぞれ等しい.

・△ABC ∽ △BEC の理由

共通な角は等しいから

∠BCA = ∠ECB ― ③

$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角は等しいから

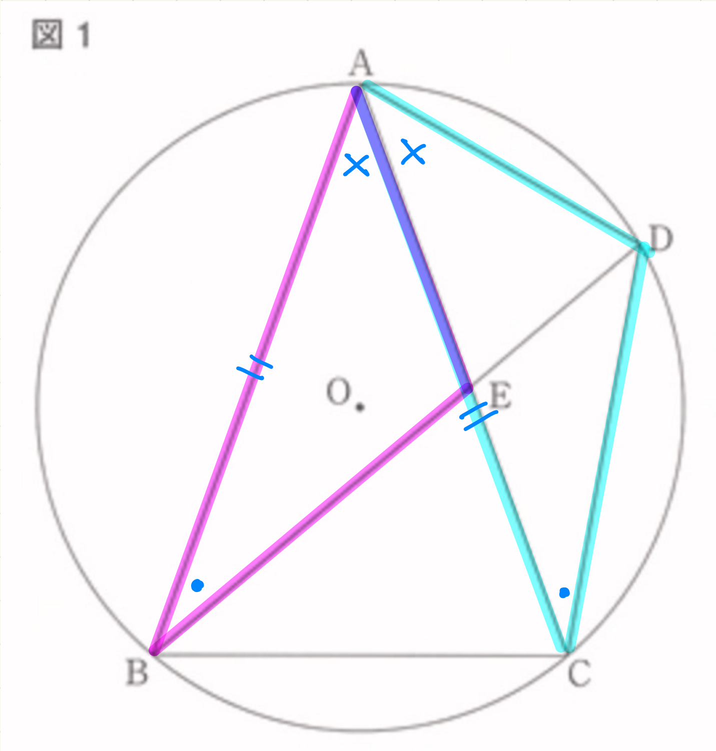
∠CAD = ∠EBC ― ④

①, ④ より

∠BAC = ∠EBC ― ⑤

③, ⑤ より 2組の角がそれぞれ等しい.

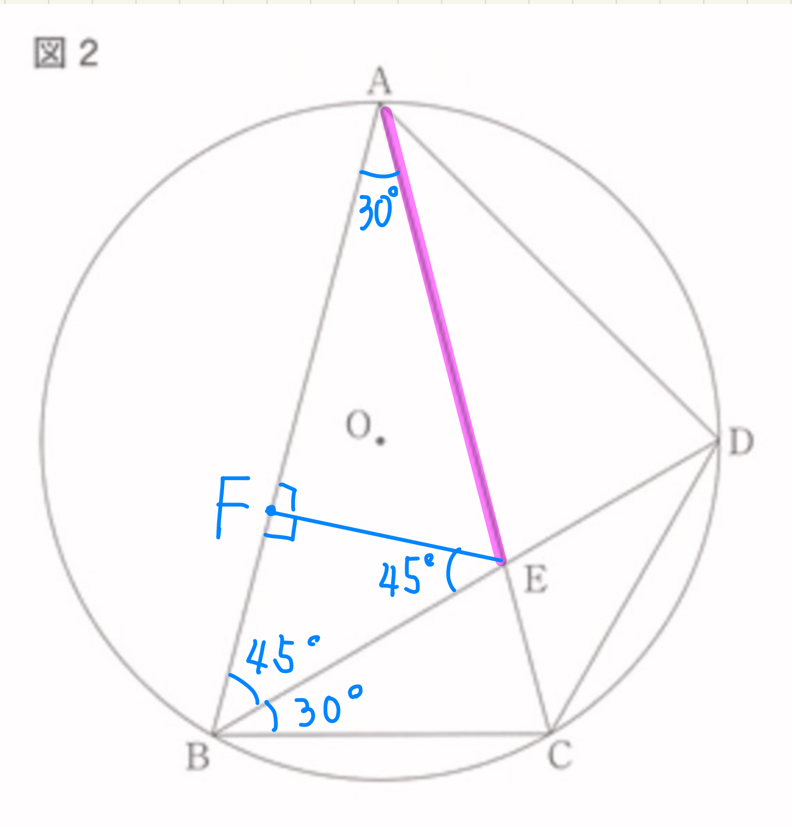
(2)



△ABEと△ACDにおいて、
仮定から
AB＝AC ―― ①
$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいから
∠ABE＝∠ACD ― ②
$\overset{\frown}{BC}$＝$\overset{\frown}{CD}$から
∠BAE＝∠CAD ―― ③

①、②、③より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、
△ABE ≡ △ACD （証明終わり）

(3) やや難問



点EからABに垂線を下ろした足をFとする。
(1)より△ABC ∽ △BEC
なので、対応する角は等しい。
よって、
∠BAC＝∠EBC
∴ ∠EBC＝30°
△ABCは、AB＝ACの二等辺三角形なので、
∠ABC＝(180°－30°)÷2
＝75°

よって，

$\angle FBE = \angle ABC - \angle EBC$

$= 75° - 30°$

$= 45°$

また，

$\angle FEB = 180° - (90° + 45°)$

$= 45°$

よって，△FBE は 45°-45°-90° の直角二等辺三角形であるから

$FB : FE : \underbrace{BE}_{4cm} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

$\Rightarrow FE : 4 = 1 : \sqrt{2}$

$\sqrt{2}FE = 4$

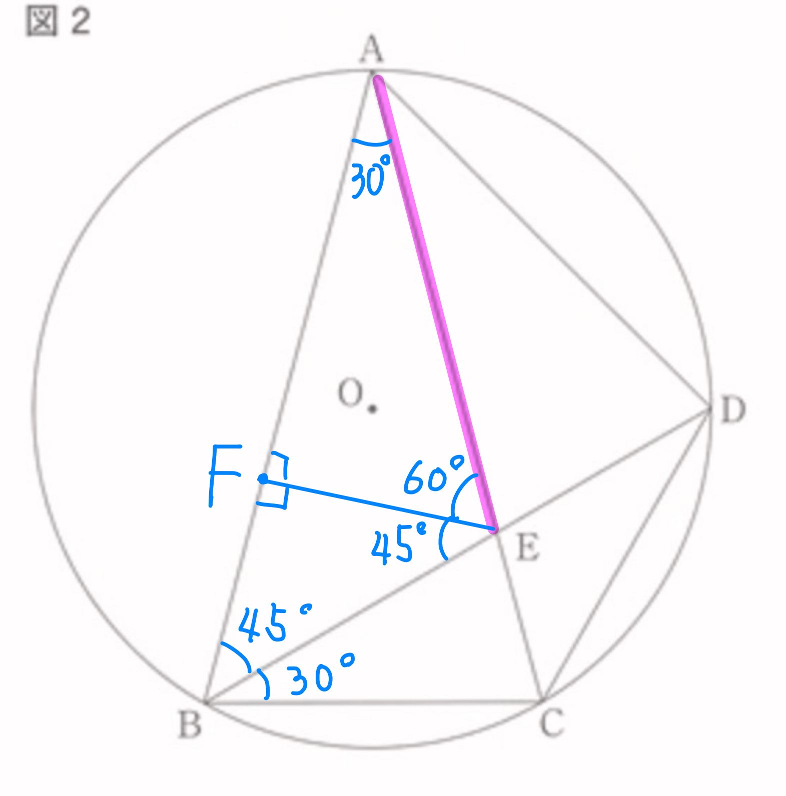
$FE = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

$= 2\sqrt{2}$

$\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2}$

$= 2\sqrt{2}$

図 2



また，△ABE で，

$\angle BEA = 180° - (30° + 75°)$

$= 105°$

$\angle FEB = 45°$ であるから

$\angle FEA = 105° - 45°$

$= 60°$

よって、△AFE は、30°-60°-90° の直角三角形であるから

$FE : AE : AF = 1 : 2 : \sqrt{3}$

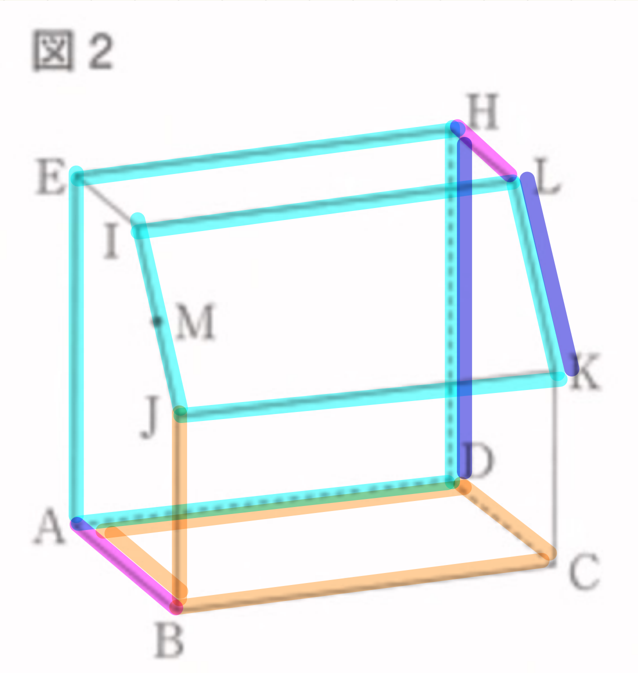
$\underbrace{FE}_{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2} : AE = 1 : 2$

$\therefore AE = 4\sqrt{2}$ cm

$\boxed{6}$

(1)



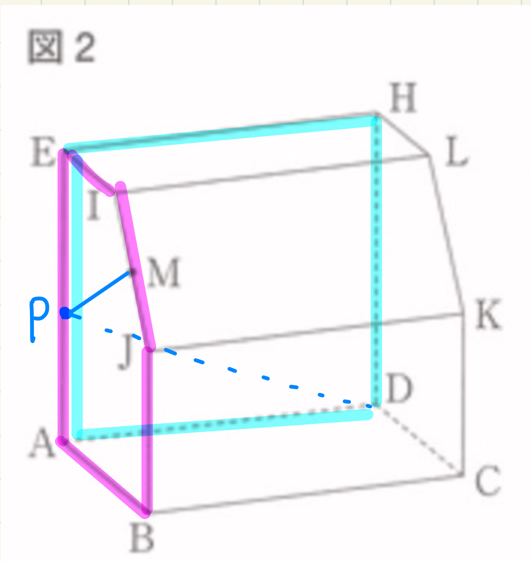
ア：AB // HL なので正しい

イ：面ADHE と面JKJI は平行でないので、誤り。

ウ：面ABCD ⊥ 辺BJ なので正しい

エ：辺DH と辺KL を延長すると、交わるので誤り。

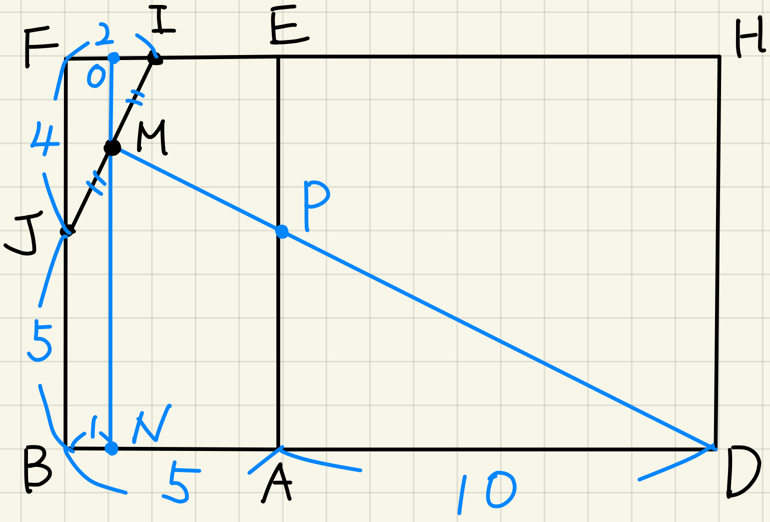
(2)



線分MP、PD を含む面

⇒面IJBAE、面EADH

の展開図で考える



展開図よりMP＋PDの長さが最も短くなるのは、M, P, Dが一直線になるときである。

点MからBAに垂線を下ろした足をN
点MからFEに垂線を下ろした足をO
とする。

OM // FJ、点MはIJの中点であるから、
中点連結定理より

$$OM = \frac{1}{2}FJ = 2\text{ cm} \qquad IO = \frac{1}{2}IF = 1\text{ cm}$$

よって、

$$MN = 9 - 2 = 7\text{cm}$$

$$DN = \underbrace{10+5}_{DB} \underbrace{-1}_{BN} = 14\text{ cm}$$

△DPAと△DMNにおいて、
PA // MNより同位角が等しいので、

∠DPA = ∠DMN ―①
∠DAP = ∠DNM ―②

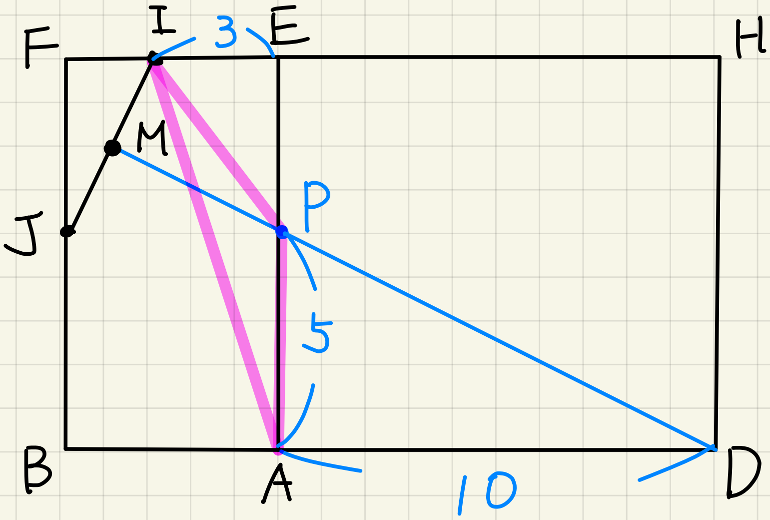
①、②より2組の角がそれぞれ等しいので、
△DPA ∽ △DMN

対応する辺の比は等しいから

$DA : DN = PA : MN$
$\quad 10 \quad\; 14 \qquad\qquad\; 7$

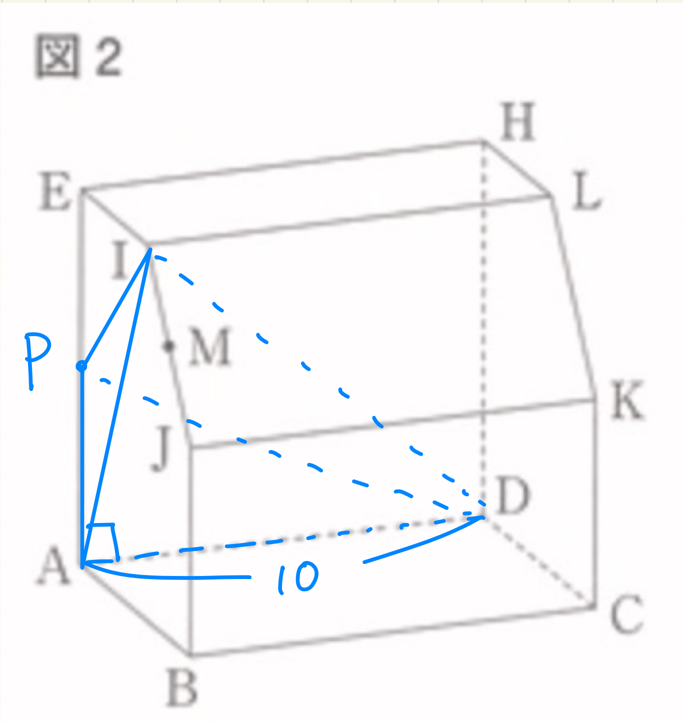
$\therefore\ 14PA = 70$

$PA = 5$ cm



よって、△IPAの面積は

$\frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2}$



面ADHE⊥面ABJIE

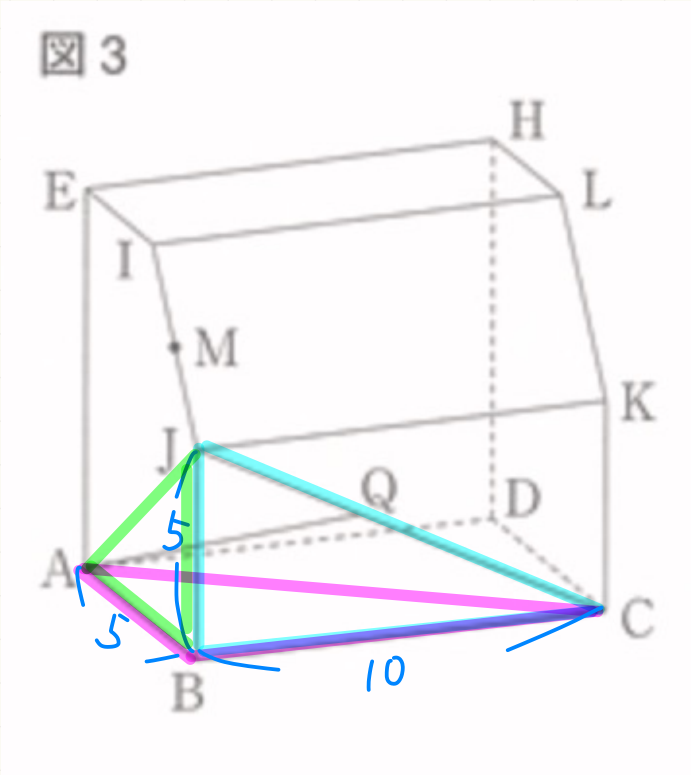
であるから、PA⊥AD

よって、三角すいAIPDは、

底面を△IPAとすると、高さはADである。ゆえに、体積は

$\frac{15}{2} \times 10 \times \frac{1}{3} = 25$ cm^3

(3) 難問



△ABCで三平方の定理より

$AC = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}$

△JBCで三平方の定理より

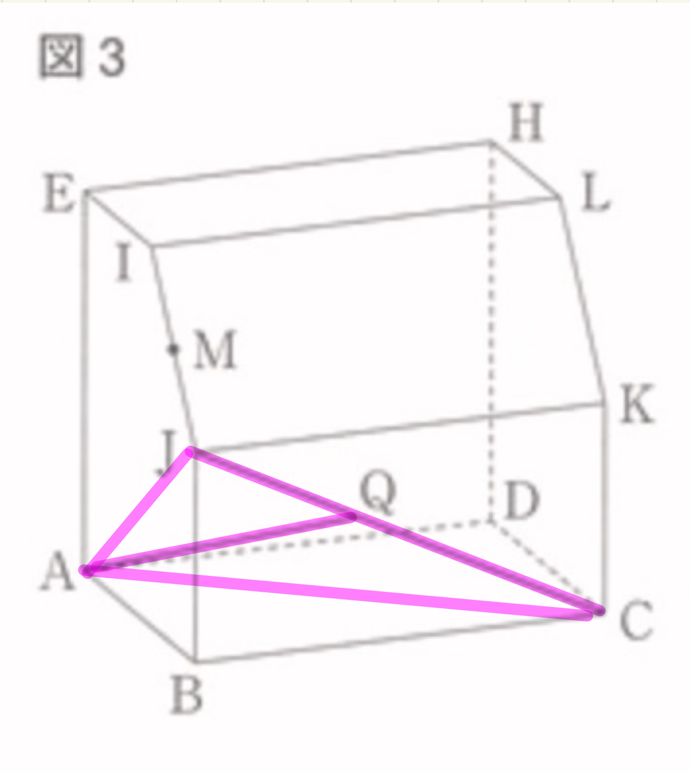
$JC = \sqrt{5^2 + 10^2}$

$= 5\sqrt{5}$

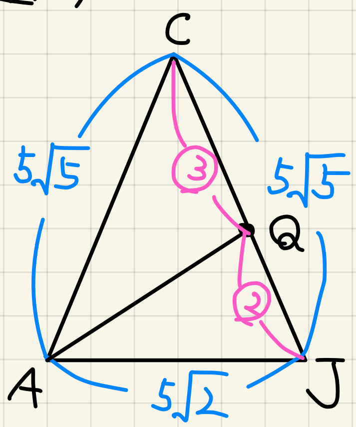
△ABJで三平方の定理より

$AJ = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}$



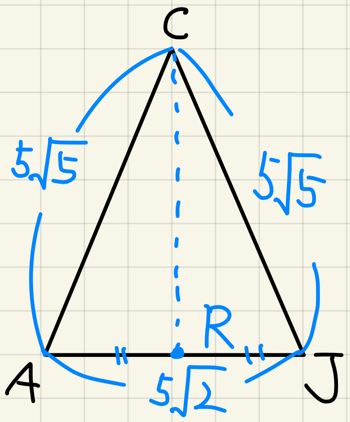
△CAJを抜き出すと，以下の通り



⇒ △CAJと△AQJにおいて，底辺をそれぞれCJ，QJとすると，高さは等しいので，面積比は底辺比となる。

$\therefore$ △CAJ : △AQJ = CJ : QJ

= 5 : 2 —— ☆



点Cから辺AJに垂線を下ろした足をRとする。△CAJは二等辺三角形なので、

$$AR = RJ \Rightarrow AR = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

よって、△CARで三平方の定理より

$$CR^2 = (5\sqrt{5})^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= 125 - \frac{25}{2}$$

$$= \frac{225}{2}$$

$$\therefore CR = \sqrt{\frac{225}{2}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

よって、△CAJの面積は

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times \frac{15\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{75 \times 2}{4}$$

$$= \frac{75}{2}$$

よって ☆ より

$\triangle CAJ : \triangle AQJ = 5 : 2$

$\Rightarrow 5 \times \triangle AQJ = 2 \times \triangle CAJ$

$\triangle AQJ = \frac{2}{5} \times \triangle CAJ$

$= \frac{2}{5} \times \frac{75}{2}$

$= 15 \text{ cm}^2$