2022年度　大分県
数学

kmkm

[1]

(1)

① 与式 $= -13$

② 与式 $= 7 + 3 \times (-4)$

$= 7 - 12$

$= -5$

③ 与式 $= \dfrac{3(x-y) + 4(x+2y)}{12}$

$= \dfrac{3x - 3y + 4x + 8y}{12}$

$= \dfrac{7x + 5y}{12}$

④ 与式 $= \dfrac{4x^2 \times (-9y)}{6xy}$

$= -6x$

$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2}$

$= \sqrt{6}$

⑤ 与式 $= 2\sqrt{6} - \sqrt{6}$

$= \sqrt{6}$

(2) 解の公式より

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$

(3) $x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$

$x = \sqrt{7} + 4$ を代入して

$(\sqrt{7} + 4 - 2)(\sqrt{7} + 4 - 6)$

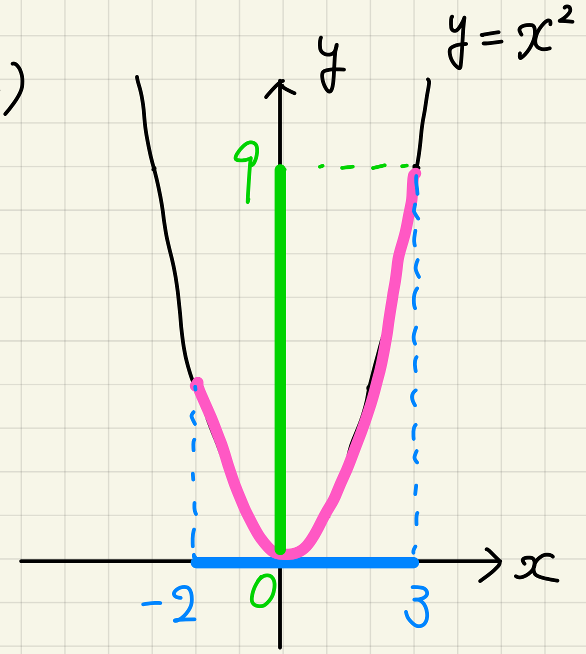
$= (\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)$

$= \sqrt{7}^2 - 2^2$

$= 7 - 4$

$= 3$

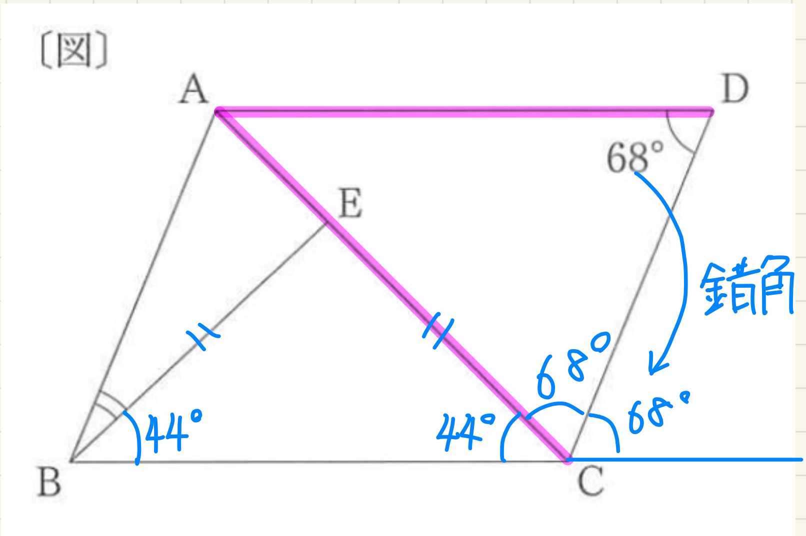
(4)



左図のグラフより

$0 \leqq y \leqq 9$

(5)



AC = AD より △ACD は二等辺三角形。

よって、∠ACD = 68°

$\angle ACB = 180° - (68° + 68°)$

$= 44°$

EB = EC より、△EBC は二等辺三角形.

よって、∠EBC = 44°

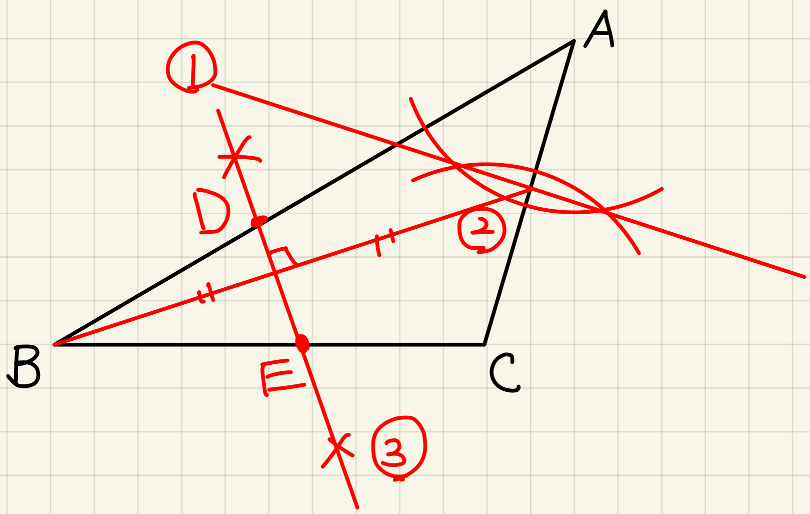
平行四辺形の向かい合う角は等しいから.

$\angle ABC = 68°$

よって、

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC$$
$$= 68° - 44°$$
$$= 24°$$

(6)



① ACの垂直二等分線を作図

② ACと①の交点と、Bを結ぶ

③ ②の線分の垂直二等分線を作図

④ ABと③の交点がD，BCと③の交点がEである。

[2]

(1) 点Aは $y = x + 5$ 上にあり、$x = 1$ なので、

$$y = 1 + 5$$
$$= 6 \qquad \therefore A(1, 6)$$

また，点Aは $y = \dfrac{a}{x}$ 上にあり、$x = 1$，$y = 6$ なので、

$$6 = \frac{a}{1} \Rightarrow a = 6$$

(2) 点Cは、$y=x+5$ 上にあり $y=0$ なので

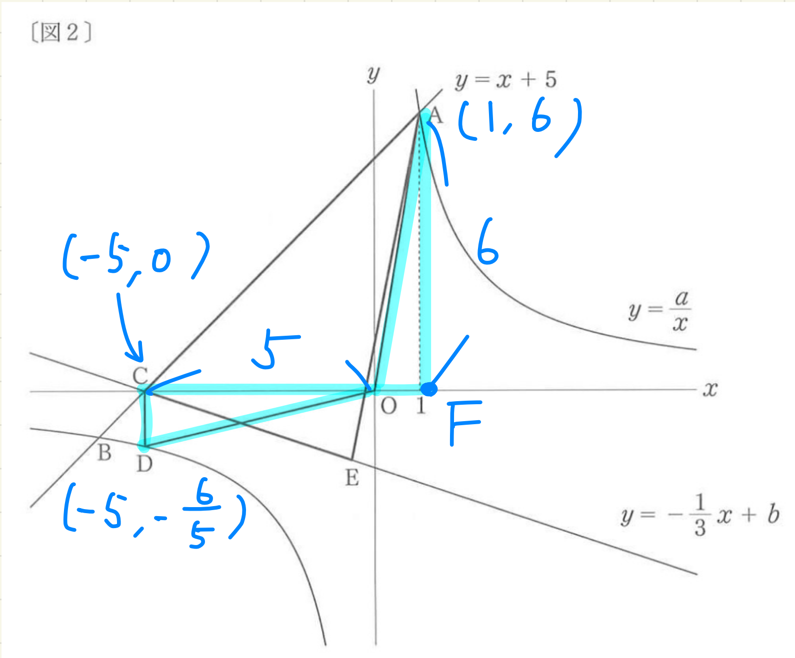
$$0=x+5$$

$$\therefore x=-5 \qquad \therefore C(-5,0)$$

また、点Cは $y=-\frac{1}{3}x+b$ 上にあり、$x=-5,\ y=0$ なので

$$0=-\frac{1}{3}\times(-5)+b \Rightarrow b=-\frac{5}{3}$$

(3) 難問



点Dは $y=\frac{6}{x}$ 上にあり、$x=-5$ なので

$$y=\frac{6}{-5}$$

$$=-\frac{6}{5}$$

$$\therefore D\left(-5,-\frac{6}{5}\right)$$

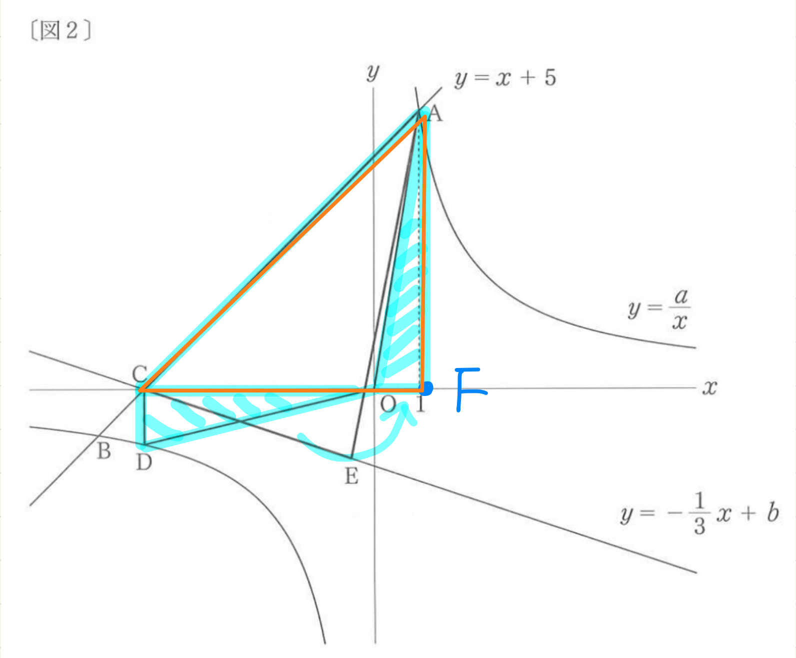
点Aのx座標の点をFとする。

$$\triangle OCD=\frac{1}{2}\times5\times\frac{6}{5}=3$$

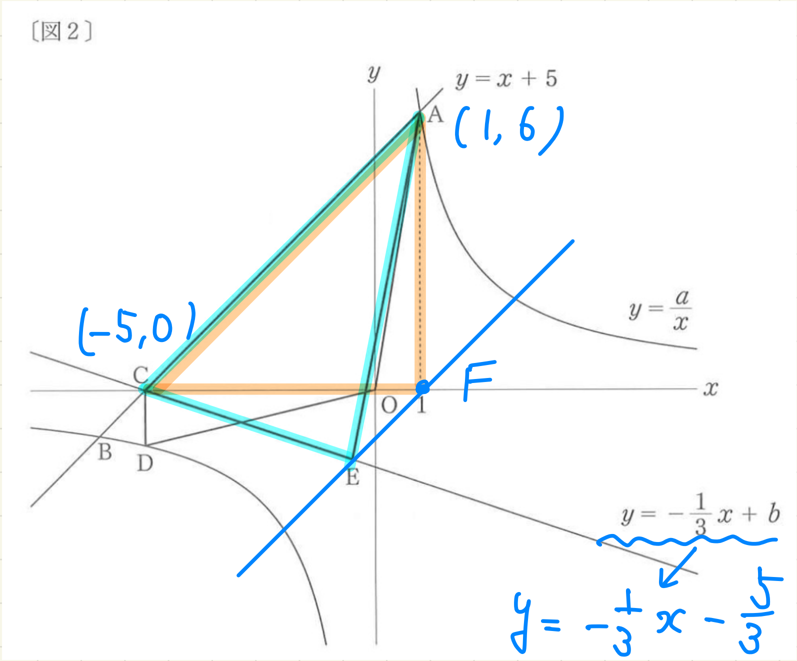
$$\triangle AOF=\frac{1}{2}\times1\times6=3$$

よって、

$$\triangle OCD=\triangle AOF$$



□ACDO
= △ACO + △CDO
= △ACO + △AOF
= △ACF ——①



仮定より
□ACDO = △ACE
であるから ①より
△ACF = △ACE
よって、等積変形から
AC // EF
である。

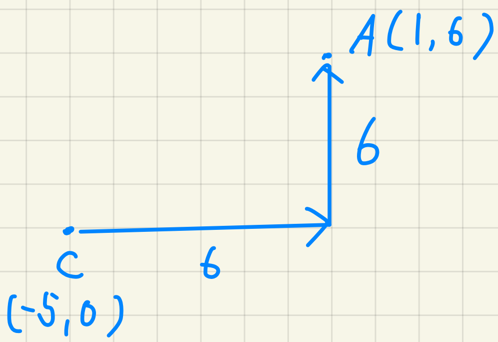
直線ACの傾きをaとおくと、傾き＝変化の割合なので

$$a = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

$$= \frac{6-0}{1-(-5)}$$

$$= \frac{6}{6}$$

$$= 1$$



平行な直線の傾きは等しいので、直線EFの傾きも1である。直線EFの式を $y=x+n$ とおくと、$F(1,0)$ を通るので

$$0=1+n \Rightarrow n=-1$$

よって、直線EFは、$y=x-1$ である

点Eは、$y=x-1$ と $y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$ の交点なので、

$$\begin{cases} y=x-1 & \text{——①} \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3} & \text{——②} \end{cases}$$

①を②に代入して、

$$x-1=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$$

$$x+\frac{1}{3}x=1-\frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{3}x=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2}$$

よって、点Eの x 座標は、$-\frac{1}{2}$

(参考)

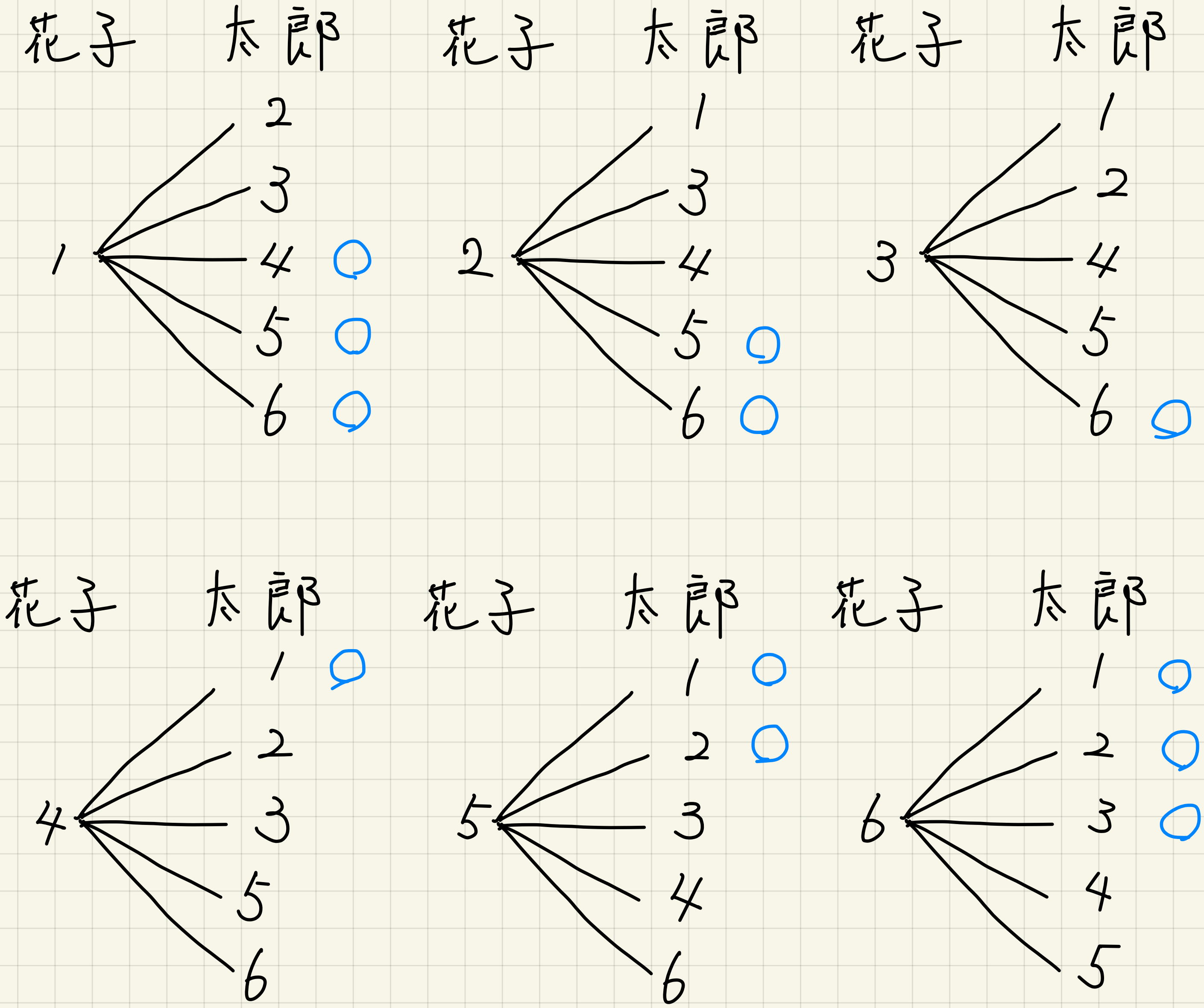
$x=-\frac{1}{2}$ を①に代入して、

$$y=-\frac{1}{2}-1$$

$$=-\frac{3}{2} \qquad \therefore E\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

[3] (1)

① 樹形図は以下の通り



よって 30通り

② ①の樹形図より、花子さんと太郎さんの間に空席が2つ以上あるときの座り方は、全部で12通り

よって、求める確率は

$$\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

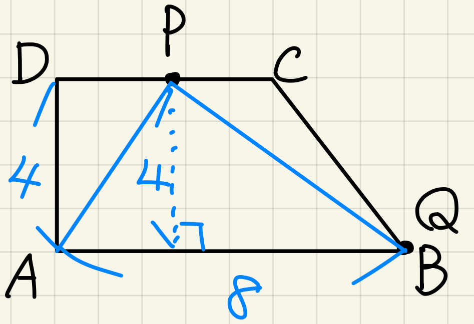
(2)

① 点Qは分速2mの速さで，辺AB上を点Bに着くまで移動し，その後停止する。
辺AB $= 8m$ なので，点Qが A → B に移動する時間は，

$$8 \div 2 = 4 \text{分}$$

したがって，4分以降は，点Qは移動しない。

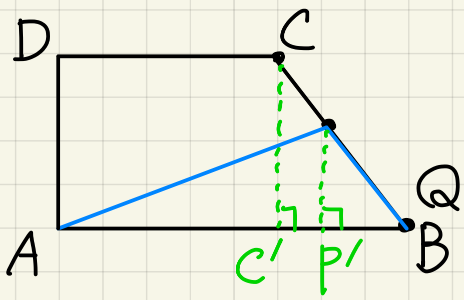
(i) $4 \leqq x \leqq 9$ のとき
点Pは辺DC上にある。



よって，△AQPの面積yは

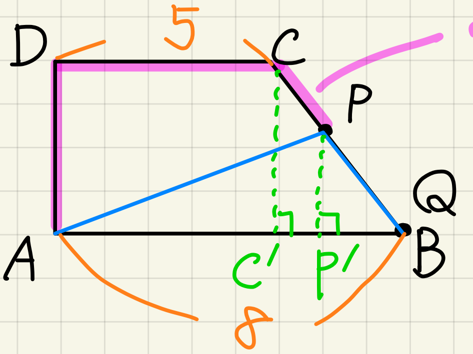
$$y = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$$

(ii) $9 \leqq x \leqq 14$ のとき．
点Pは辺CB上にある．



点CからABに垂線を下ろした足をC′
点PからABに垂線を下ろした足をP′
とする。
△CC′Bと△PP′Bにおいて，
CC′ // PP′ より同位角が等しいので．

$\angle CC'B = \angle PP'B$ —— ①
$\angle C'CB = \angle P'PB$ —— ②
①, ②より2組の角がそれぞれ等しいので、
$\triangle CC'B \backsim \triangle PP'B$
対応する辺の比は等しいので、
$CC' : PP' = CB : PB$ —— ③



ここで、$AC' = 5m$、$AB = 8m$ より
$C'B = 8 - 5 = 3m$
であり、$CB = 5m$ であるから

$\triangle CC'B$ で三平方の定理より

$CC' = \sqrt{5^2 - 3^2}$ $= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$
$= 4m$

また、$AD + DC + CB = 4 + 5 + 5 = 14m$、
$AD + DC + CP = x\,m$ であるから
$PB = 14 - x\ m$
よって③より

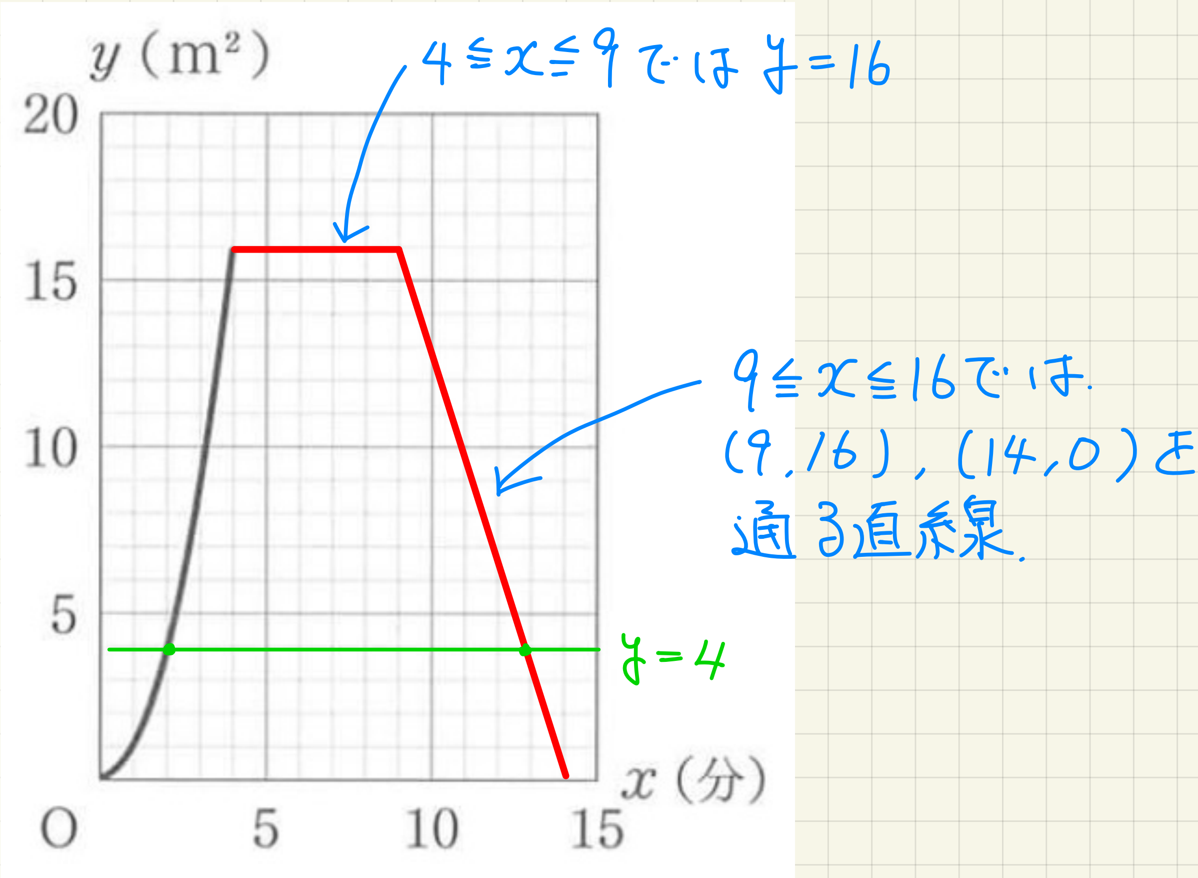
$$\underbrace{4}_{CC'} : PP' = \underbrace{5}_{CB} : \underbrace{14 - x}_{PB}$$

$$5PP' = 4(14 - x)$$
$$PP' = \frac{4}{5}(14 - x)$$
$$= -\frac{4}{5}x + \frac{56}{5}$$

したがって、△AQPの面積yは

$$y=\frac{1}{2}\times 8\times\left(-\frac{4}{5}x+\frac{56}{5}\right)$$
$$=-\frac{16}{5}x+\frac{224}{5} \quad ――④$$

④は右下がりの直線であり、$x=9$のとき、$y=16$。
$x=14$のとき$y=0$を通る。
以上より、グラフは以下の通り。



② ①のグラフより、$y=4$となるのは、$0\leqq x\leqq 4$、
$9\leqq x\leqq 16$のときである。

(i) $0\leqq x\leqq 4$のとき、

$y=ax^2$とおくと、$(4,16)$を通るので、

$$16=a\times 4^2$$
$$=16a \qquad \therefore a=1$$

よって $y=x^2$ で、$y=4$ のとき、

$$4=x^2 \quad \therefore \quad x=\pm 2$$

$x>0$ であるから、$x=2$

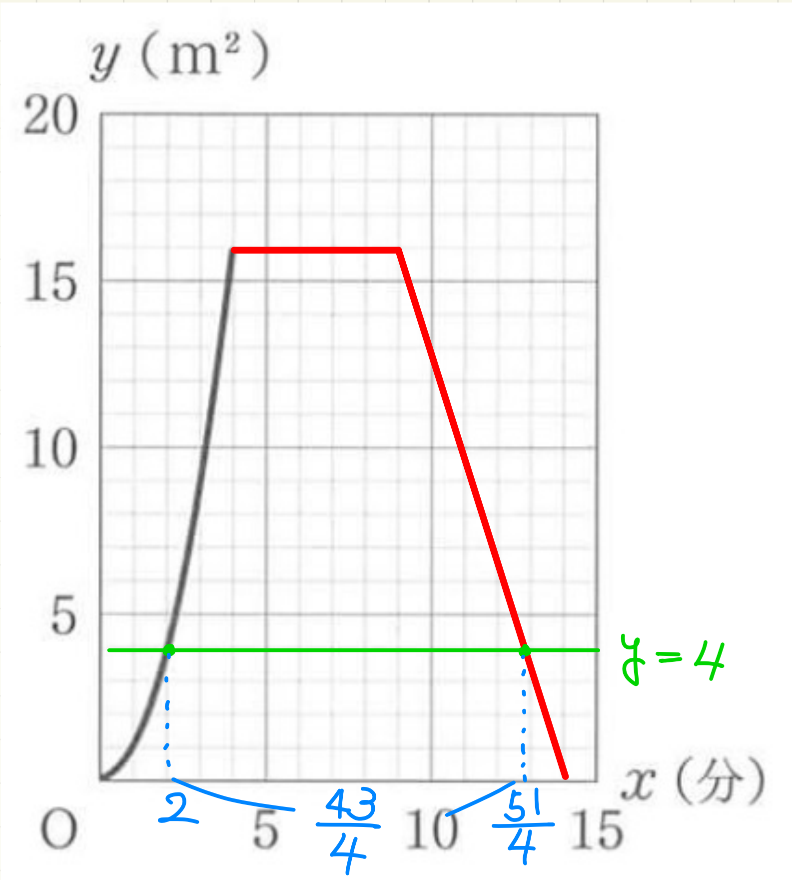
(ii) $9 \leqq y \leqq 16$ のとき、

$y=-\dfrac{16}{5}x+\dfrac{224}{5}$ に $y=4$ を代入して、

$$4=-\frac{16}{5}x+\frac{224}{5}$$

$$\frac{16}{5}x=\frac{224}{5}-4=\frac{224-20}{5}=\frac{204}{5}$$

$$\therefore x=\frac{204}{5}\times\frac{5}{16}=\frac{51}{4}$$



よって、求める時間は

$$\frac{51}{4}-2=\frac{51-8}{4}=\frac{43}{4}=10\frac{3}{4}\text{分}$$

ここで $\frac{3}{4}$分 $=45$秒 なので

10分45秒

$\times\frac{3}{4}$ 1分 $=60$秒 $\times\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$分 $=$?秒

$\therefore ?=60\times\frac{3}{4}=45$

[4]

(1) 表2より、平均値は

$$\frac{3.4\times1+3.6\times1+3.9\times5+4.0\times6+4.1\times5+4.5\times2}{20}$$

$$=\frac{3.4+3.6+19.5+24.0+20.5+9.0}{20}$$

$$=\frac{80}{20}$$

$$=4.0\ \text{km}$$

(2)

① 表1より、1人が1km移動するときの自家用車のCO_2排出量は、130gなので、
20人全員が自家用車に乗った場合のCO_2排出量は、

$$130\text{g}\times20\text{人}\times4\text{km}=10400\text{g}$$

ある人数を路線バスでの通勤に変更したときの方が、20人全員が自家用車で通勤したときよりも36.5%削減できたので、

$$10400\times0.365=3796\text{g}$$

②

㋐ CO_2排出量で式を作る。
表1より、1人が1km移動するときの路線バスのCO_2排出量は57g、自家車用は130gなので、CO_2の総排出量は

$$57 \times x \times 4 + 130 \times y \times 4$$
$$= 228x + 520y$$

問題文より CO_2 の削減量は 36.5% なので、
変更したときの CO_2 排出量の割合は、

$$100\% - 36.5\% = 63.5\%$$

よって、CO_2 排出量は、

$$10400 \times 0.635 = 6604$$

以上より

$$228x + 520y = 6604$$

①、⑦

$$\begin{cases} x + y = 20 & \text{——①} \\ 228x + 520y = 6604 & \text{——②} \end{cases}$$

② ÷ 4 より

$$57x + 130y = 1651 \quad \text{——③}$$

① × 57 − ③ より

$$\begin{array}{rr} & 57x + 57y = 1140 \\ -) & 57x + 130y = 1651 \\ \hline & -73y = -511 \\ & y = 7 \end{array}$$

$y = 7$ を ① に代入して

$$x + 7 = 20 \quad \therefore x = 13$$

よって、

$$x = 13, \quad y = 7$$

①　⑦

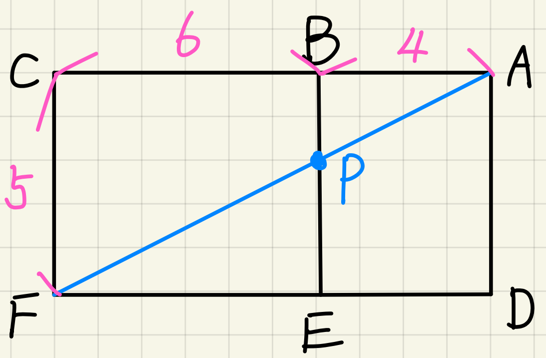
[5]

(1) △ABCで三平方の定理より

$AC = \sqrt{6^2 - 4^2}$ $= \sqrt{36-16}$

$= 2\sqrt{5}$ cm $= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(2) AP, PFを含む面の展開図で考える.



AP+PFがもっとも短くなるのは, A, P, Fが1つの直線上にあるときである。

△ABPと△ACFにおいて

BP // CFより同位角が等しいので,

$\angle ABP = \angle ACF$ —— ①

$\angle APB = \angle AFC$ —— ②

①, ②より 2組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle ABP \backsim \triangle ACF$

対応する辺の比は等しいので,

$AB : AC = AP : AF$ —— ③

ここで, △ACFで三平方の定理より

$AF = \sqrt{10^2 + 5^2}$ $= \sqrt{100+25}$

AP+PF

$= 5\sqrt{5}$ $= \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

したがって, ③より

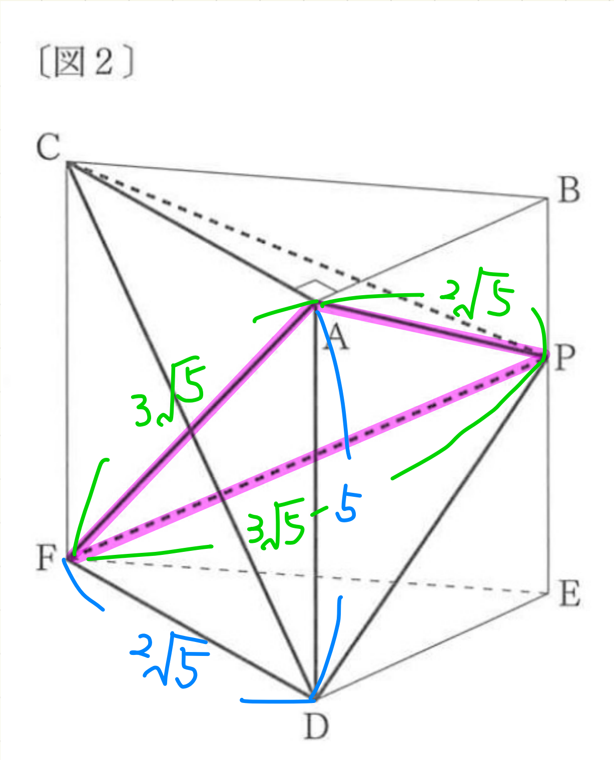
$4 : 10 = AP : 5\sqrt{5}$

$10AP = 20\sqrt{5}$

$AP = 2\sqrt{5}$ cm

(3) 難問

①



△AFDで三平方の定理より

$AF = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 5^2}$ $= \sqrt{20+25}$ $= \sqrt{45}$ $= 3\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5}$ cm

(2)より

$AP + PF = 5\sqrt{5}$ cm

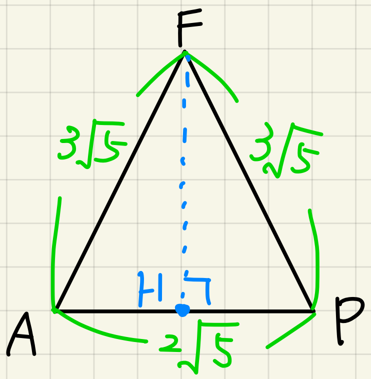
$AP = 2\sqrt{5}$ cm

なので,

$PF = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5}$ cm

よって, △AFP は, AF = PF の二等辺三角形。



FからAPに下ろした垂線の足をHとすると, AH = PH なので.

$AH = \sqrt{5}$ cm

よって, △FAHで三平方の定理より

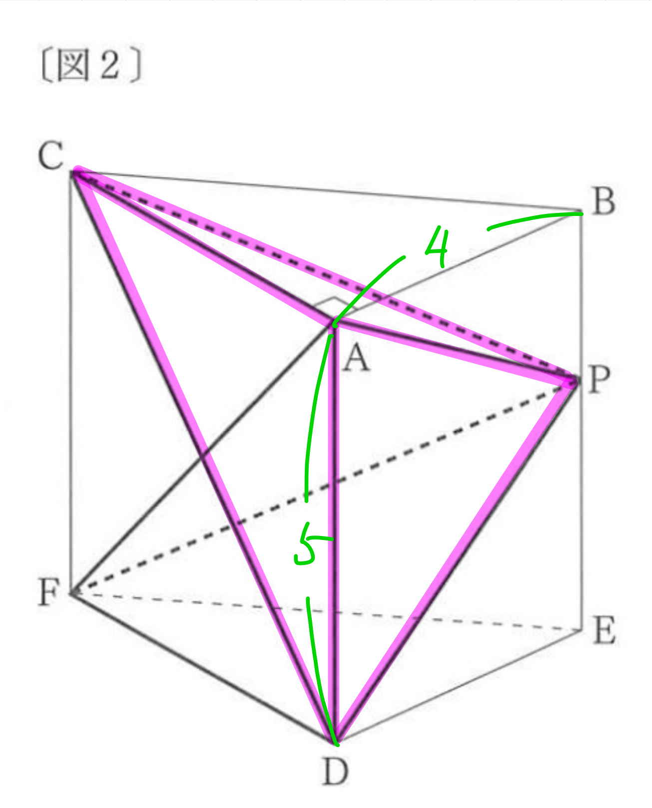
$FH = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - \sqrt{5}^2}$ $= \sqrt{45-5}$ $= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

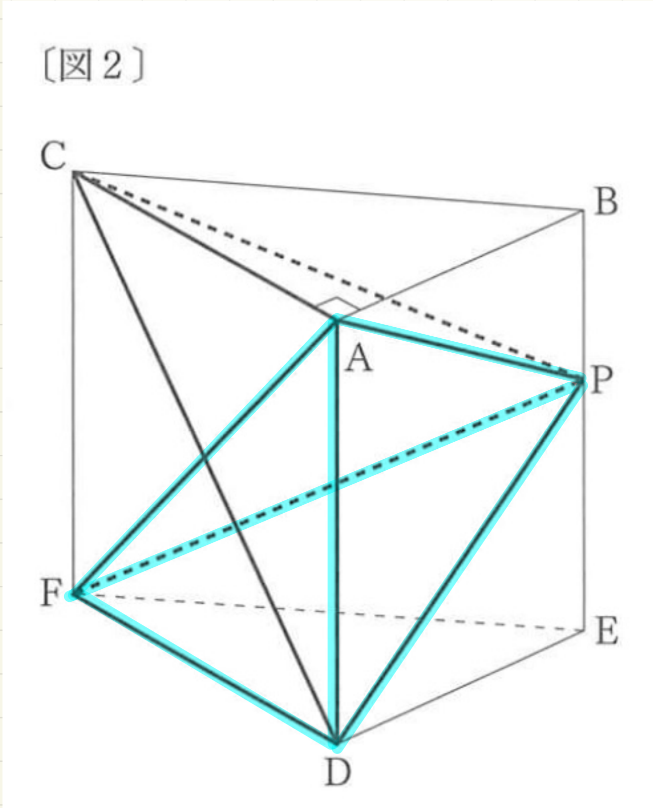
$= 2\sqrt{10}$ cm

したがって, △AFPの面積は, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} = 2\sqrt{50} = 2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ cm^2

②





CF // AD なので、等積変形より三角錐ADPCと三角錐ADPFの体積は等しい。

$\triangle APD$の面積 $= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10\,cm^2$

$AD \perp AC$であるから、三角錐ADPCの体積は、$\triangle APD$を底面として、

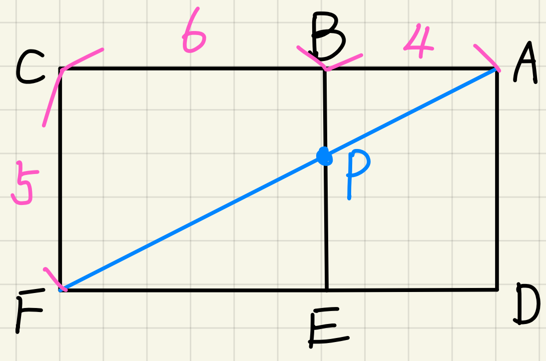
$$\frac{1}{3} \times \underbrace{10}_{\triangle APD} \times \underbrace{2\sqrt{5}}_{AC} = \frac{20\sqrt{5}}{3}\ cm^3 \quad \text{——} \ \text{☆}$$

である。

(i) 三角錐ADPCにおいて、$\triangle APC$を底面としたときの高さ a cm を求める。

(2)の展開図で、$\triangle ABP \backsim \triangle ACF$であるから、

$AB : AC = BP : CF$

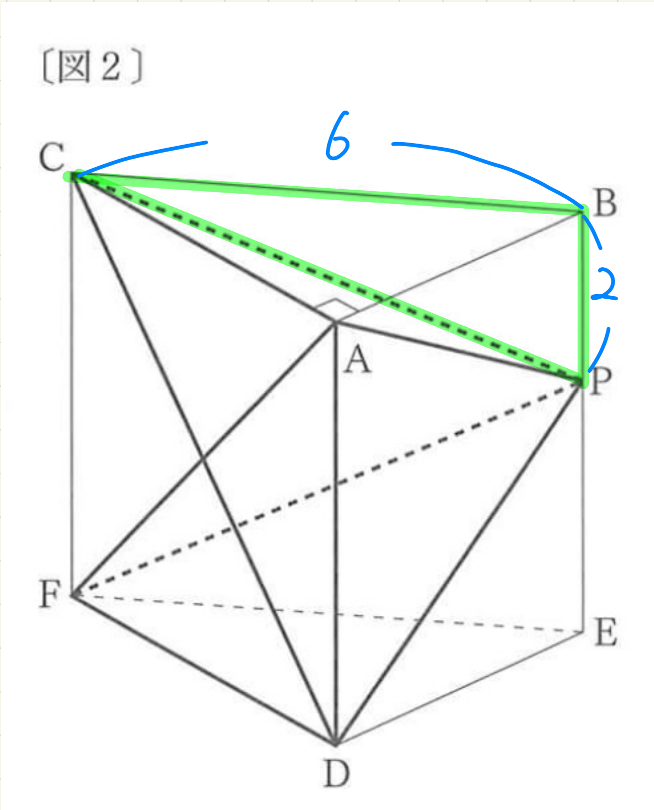


よって，

$4:10 = BP:5$

$10BP = 20$

$BP = 2$ cm



△PBC で三平方の定理より

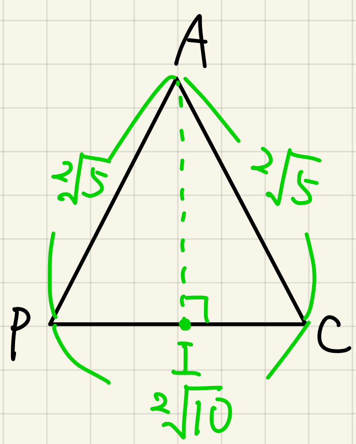
$PC = \sqrt{2^2+6^2}$ $= \sqrt{4+36}$ $= \sqrt{40}$ $= 2\sqrt{10}$

$= 2\sqrt{10}$ cm

(1)，(2) より

$AC = 2\sqrt{5}$ ，$AP = 2\sqrt{5}$

なので，△APC は二等辺三角形である．



点 A から PC に垂線を下ろした足を I とすると，PI = CI なので，

$AI = \sqrt{10}$ cm

よって．△API で三平方の定理より．

$AI = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - \sqrt{10}^2}$ $= \sqrt{20-10}$ $= \sqrt{10}$

$= \sqrt{10}$ cm

よって．△APC の面積は

$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$ cm^2

以上より、△APC を底面としたときの三角錐ADPC の体積は

$$\frac{1}{3} \times \underbrace{10}_{\triangle APC} \times \underbrace{a}_{高さ} = \frac{10a}{3}$$

と表され、★より これが $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm^3 なので、

$$\frac{10a}{3} = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$$a = \frac{20\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{10}$$

$$= 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

(ii) 三角錐ADPF において、△AFP を底面としたときの高さ b cm を求める。

(3) ① より △AFP $= 10\sqrt{2}$ cm^2 なので、三角錐ADPF の体積は

$$\frac{1}{3} \times 10\sqrt{2} \times b = \frac{10\sqrt{2}\,b}{3}$$

と表され、三角錐ADPC と三角錐ADPF の体積が等しいことと、★より

$$\frac{10\sqrt{2}\,b}{3} = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$$b = \frac{20\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{10\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{10}\ \text{cm}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$

よって、

$$\frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$$

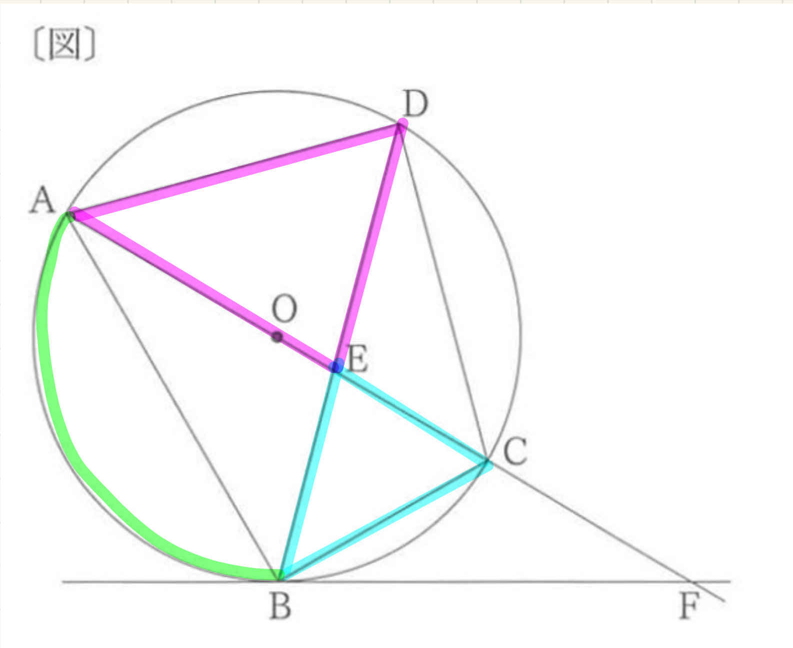
$$= \sqrt{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{50}}{10}$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$$

[6]

(1)



△EAD と △EBCにおいて、

対頂角は等しいので、

∠AED = ∠BEC ―①

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいので、

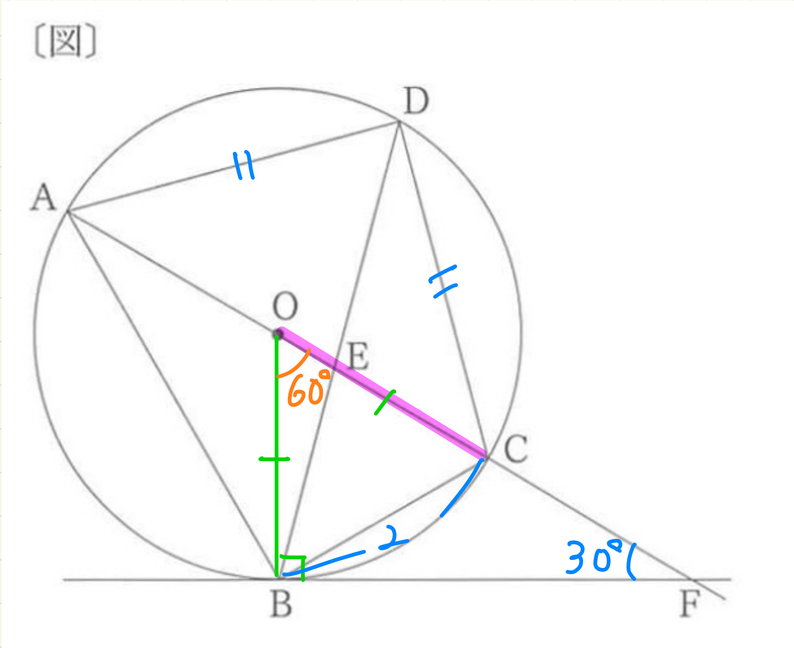
∠ADE = ∠BCE ―②

①, ② より 2組の角がそれぞれ等しいので、

△EAD ∽ △EBC (証明終わり)

(2)

①



点Oと点Bを結ぶ。
OB, OCは円Oの半径なので.

$OB = OC$

また, 半径と接線のなす角は90°なので.

$\angle OBC = 90°$

よって.

$\angle BOF = 180° - (90° + 30°)$

$= 60°$

△OBCは OB = OCの二等辺三角形であるから.

$\angle OBC = (180° - 60°) \div 2$

$= 60°$

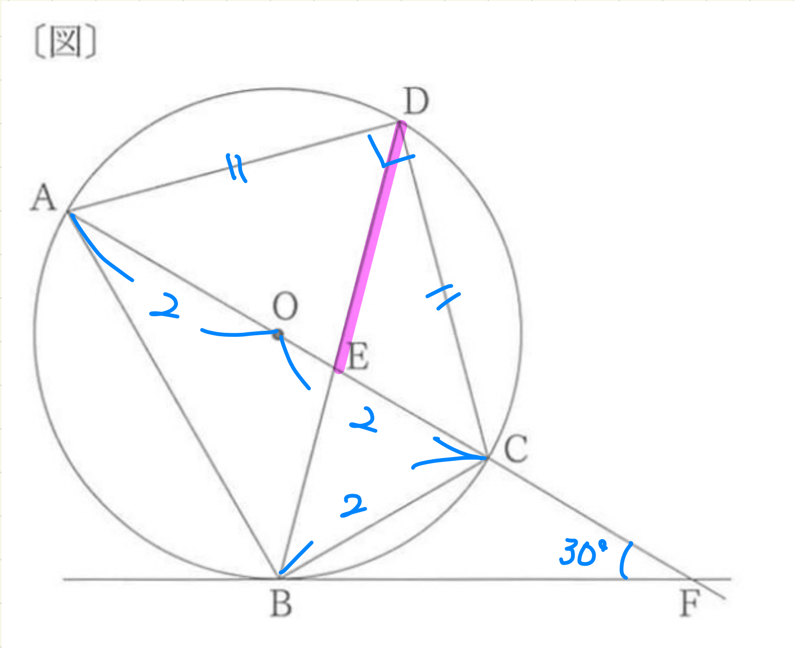
$\angle OCB = 180° - 60° - 60°$

$= 60°$

以上より. △OBCは 内角が全て60°なので.
正三角形である。⇒ $OB = OC = BC$.

$BC = 2cm$ より. $OC = 2cm$.

② 難問



$\angle ADC$ は直径に対する円周角なので.

$\angle ADC = 90°$

また, $DA = DC$ であるから. $\triangle DAC$ は.直角二等辺三角形。よって.

$DA : DC : AC = 1 : 1 : \sqrt{2}$.

① より $OC = 2cm$ なので. $AC = 4cm$ (円の直径)

よって.

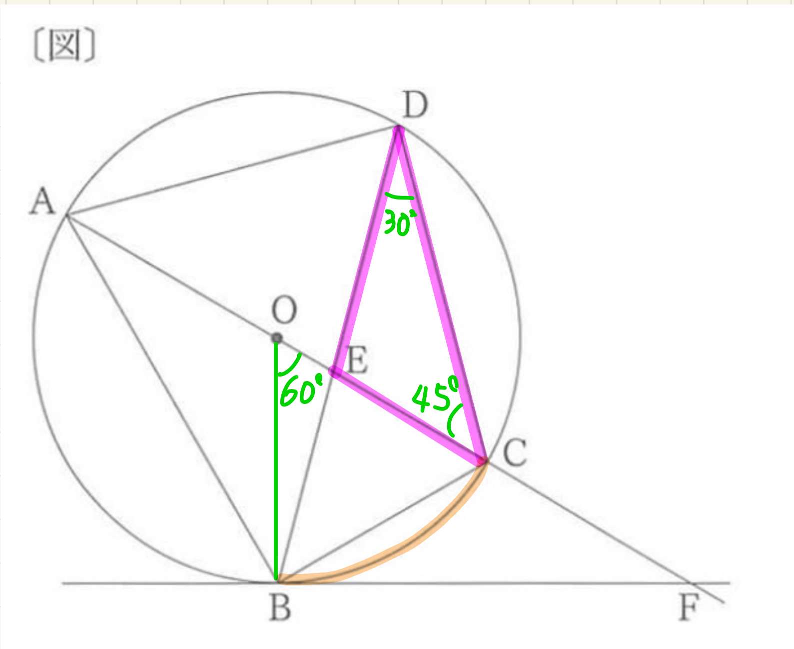
$DC : \underbrace{AC}_{4} = 1 : \sqrt{2}$

$\sqrt{2}\,DC = 4$

$DC = 2\sqrt{2}\ cm$.

$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.



また, $\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角と円周角より

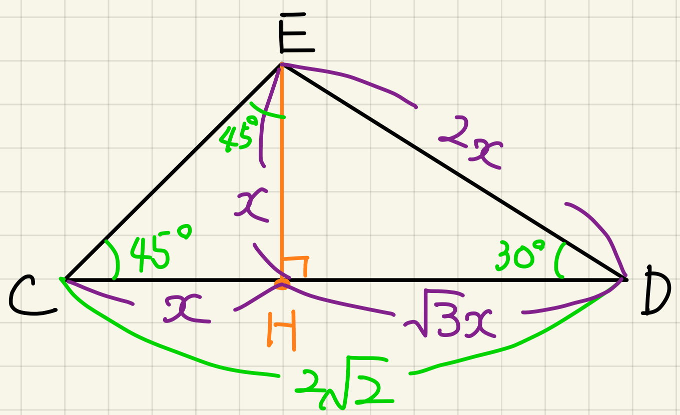
$\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC$

$= \frac{1}{2} \times \underbrace{60°}_{(2)①より}$

$= 30°$

$\triangle DAC$ は直角二等辺三角形なので.

$\angle DCA = 45°$



点EからCDに垂線を下ろした足をHとする。
また、$CH = x$ cm とする。

△ECHにおいて、$\angle CEH = 180° - (90° + 45°) = 45°$ より、直角二等辺三角形なので、

$$HC = HE \quad \therefore HE = x \text{ cm}$$

△EDHは、30°−60°−90°の直角三角形なので、

$$\underbrace{HE}_{x} : ED : HD = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

よって、

$$ED = 2x, \quad HD = \sqrt{3}x$$

となる。

$$HC + HD = CD$$

なので、

$$x + \sqrt{3}x = 2\sqrt{2}$$

$$(1+\sqrt{3})x = 2\sqrt{2}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

有理化

$$= \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{1^2 - \sqrt{3}^2}$$ ※ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{1 - 3}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{-2}$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

よって，求めるEDは，$2x$ cmなので，

$$ED = 2x$$
$$= 2(-\sqrt{2} + \sqrt{6})$$
$$= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \text{ cm}$$