2021年度 秋田県

数学

Km Km

1.

(1) 与式 $= 4-(-12)$
$= 4+12$
$= 16$

(2) 与式 $= \dfrac{3(x-2y)-(3x-y)}{6}$
$= \dfrac{3x-6y-3x+y}{6}$
$= -\dfrac{5}{6}y$

(3) 与式 $= x^2+xy-12y^2-xy$
$= x^2-12y^2$

(4) $a^2+2a = a(a+2)$ より $a=\sqrt{3}-1$ を代入して
$a(a+2) = (\underbrace{\sqrt{3}-1}_{a})(\underbrace{\sqrt{3}-1}_{a}+2)$
$= (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$
$= 3-1$
$= 2$

(4) $\dfrac{3}{2}x+1 = 10$ 両辺 $\times 2$

$3x+2 = 20$
$3x = 18$ $\qquad x = 6$

(6) ミルクティーをつくるのに，牛乳をx mL使うとする。紅茶：牛乳＝5：3であり紅茶を450mL使うので．

$$450 : x = 5 : 3$$
$$5x = 1350$$
$$x = 270$$

牛乳は180mLあるので，残り必要な牛乳は．

$$270 - 180 = 90\text{ mL}$$

(7) $\begin{cases} x + 4y = -1 & \text{—— ①} \\ -2x + y = 11 & \text{—— ②} \end{cases}$

① × 2 + ② より

$$\begin{array}{rrrl} & 2x & + 8y & = -2 \\ +) & -2x & + y & = 11 \\ \hline & & 9y & = 9 \\ & & y & = 1 \end{array}$$

$y=1$ を ① に代入して

$$x + 4 \times 1 = -1$$
$$x = -1 - 4$$
$$= -5$$

よって，$x = -5$，$y = 1$

(8) 解の公式より

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(9)

ア：$\dfrac{1\times1+2\times2+3\times3+4\times4+6\times5+3\times6+1\times7}{20}$

$=\dfrac{1+4+9+16+30+18+7}{20}$

$=\dfrac{85}{20}=4.25$ 冊

イ：データを小さい順に並べると、

1 2 2 3 3 3 4 4 4 4　5 5 5 5 5 5 6 6 6 7

中央値 $=\dfrac{4+5}{2}=4.5$ 冊

ウ：最も度数が大きいのは、6人の5冊

よって、値が最も大きいのは、ウ

(10) $10<\sqrt{n}<11$ を $\sqrt{7}$ 倍すると

$10\sqrt{7}<\sqrt{7n}<11\sqrt{7}$。これを2乗して、

$700<7n<847$

○²の形をしている

$\sqrt{7n}$ が整数となるには、$7n$ が平方数であれば良い。

700より大きく847未満の平方数は、

$729\ (=27^2)$、$784\ (=28^2)$、$841\ (=29^2)$

である。

・$7n=729$ のとき

$$n=\frac{729}{7}=104.41\cdots$$

で、n は整数でないので不適

・$7n=784$ のとき

$$n=\frac{784}{7}=112$$

n は整数なので適する

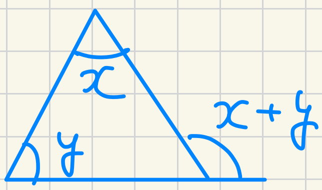
・$7n=841$ のとき

$$n=\frac{841}{7}=120.14\cdots$$

で n は整数でないので不適。

よって、$n=112$

(11) 外角の定理より $\angle x=44+62=106°$



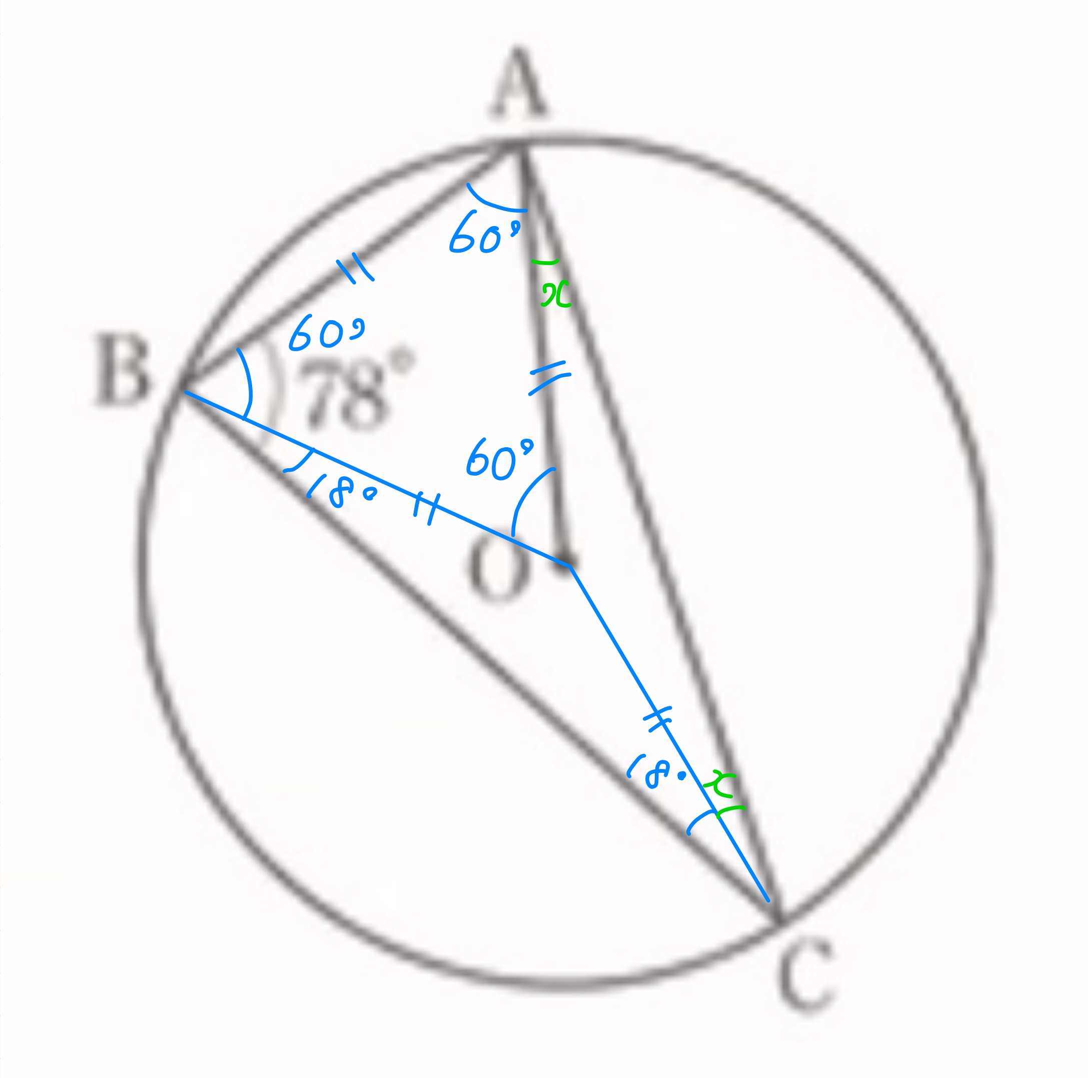
(12) おうぎ形の面積 $=$ 半径 $\times$ 半径 $\times\pi\times\dfrac{\text{中心角}}{360°}$

$$=5\times5\times\pi\times\frac{240}{360}$$

$$=25\pi\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{50\pi}{3}\ \mathrm{cm}^2$$

(13)



OB、OCを結ぶ
OA、OB、OCは円Oの半径なので
OA = OB = OC
仮定より
AB = OA
よって、△OABは正三角形なので、
∠OAB = ∠ABO = ∠BOA = 60°

よって、∠OBC = 78° − 60° = 18°
△OBCは、OB = OCの二等辺三角形なので
∠OCB = 18°
∠OAC = x°とおくと、△OACは、OA = OCの二等辺三角形なので、
∠OCA = x°
△ABCで、内角の和は180°なので、

$$\underbrace{x+60}_{\angle CAB} + \underbrace{78}_{\angle ABC} + \underbrace{18+x}_{\angle BCA} = 180$$

$$2x = 180° - 60° - 78° - 18°$$
$$= 24$$

$\therefore\ x = 12°$

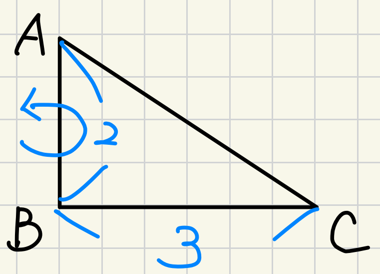
よって、

$\angle BAC = x + 60°$

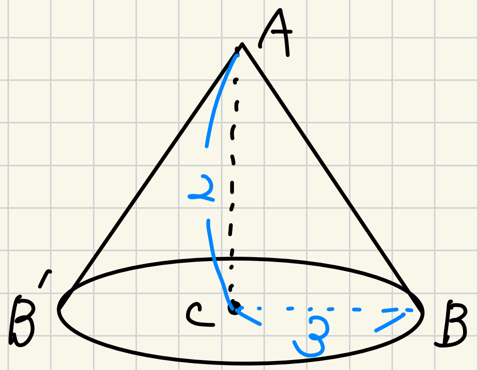
$= 12° + 60°$

$= 72°$

(14)

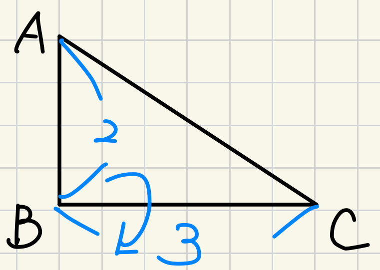


$\Rightarrow$

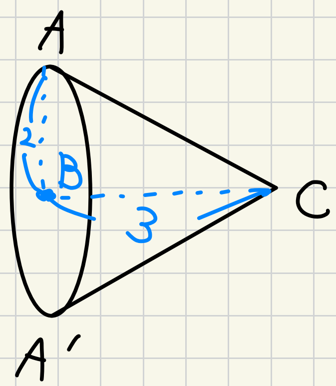


ABを軸として回転させてできる円錐の体積は

$$3 \times 3 \times \pi \times 2 \times \frac{1}{3} = 6\pi\ cm^3$$



$\Rightarrow$



BCを軸として回転させてできる円錐の体積は

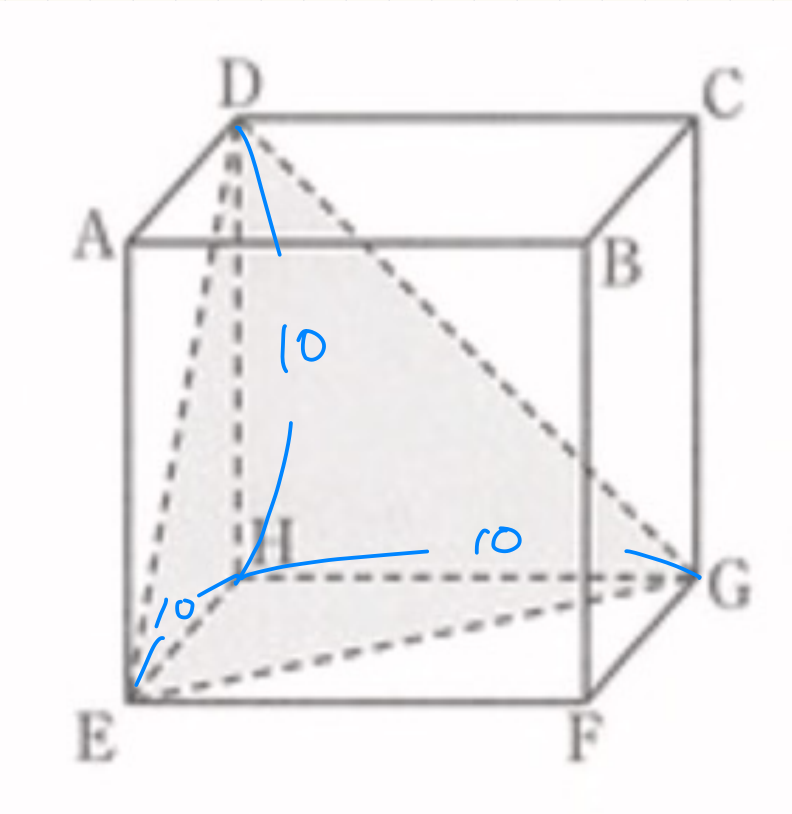
$$2 \times 2 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3} = 4\pi$$

$6\pi = A \times 4\pi$

$A = \frac{6\pi}{4\pi} = \frac{3}{2}$

よって、ABを軸としてできる体積は、BCを軸としてできる体積の $\frac{3}{2}$ 倍

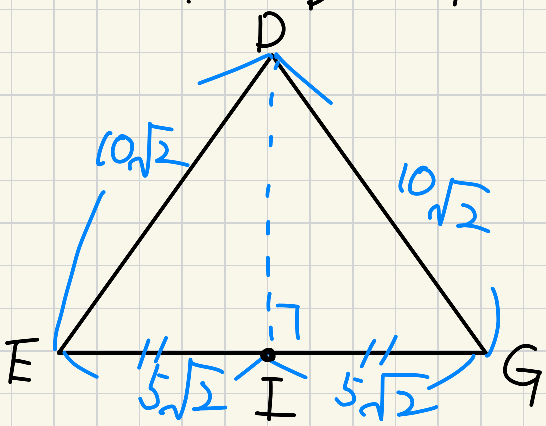
(15)



立方体ABCD-EFGHの体積は
$1000\,cm^3 = 10^3\ cm^3$
より、一辺の長さは、
10cmである。
三角錐H-DEGにおいて、△HEGを底面としたとき、
三角錐の体積は、

$$\underbrace{10 \times 10 \times \frac{1}{2}}_{\triangle HEG} \times \underbrace{10}_{高さ} \times \frac{1}{3} = \frac{500}{3}\ cm^3$$

ここで、三平方の定理より
$DE = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$
$EG = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$
$GD = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$
なので、△DEGは正三角形である



点DからEGに垂線を下ろした足をIとすると、
$EI = GI = 5\sqrt{2}$

△DEIで三平方の定理より

$$DI = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{200 - 50}$$
$$= \sqrt{150}$$
$$= 5\sqrt{6}\ \text{cm}$$

よって.△DEGの面積は

$$\frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times 5\sqrt{6} = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

三角錐H-DEGの体積は$\frac{500}{3}$ cm^3より.

△DEGを底面としたときの高さをx cmとすると.

$$\underbrace{50\sqrt{3}}_{\triangle DEG} \times \underbrace{x}_{高さ} \times \frac{1}{3} = \frac{500}{3}$$

$$\therefore 50\sqrt{3} \times x = 500$$
$$x = \frac{500}{50\sqrt{3}}$$
$$= \frac{10}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{10\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}$$

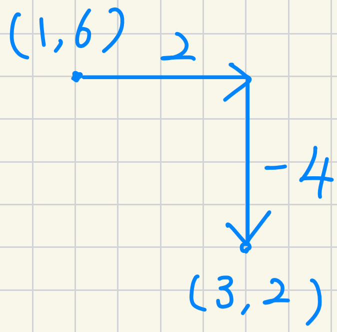
$$\frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

2.

(1)

① $x=1$ のとき $y=\frac{6}{1}=6$

$x=3$ のとき $y=\frac{6}{3}=2$



よって，変化の割合は．

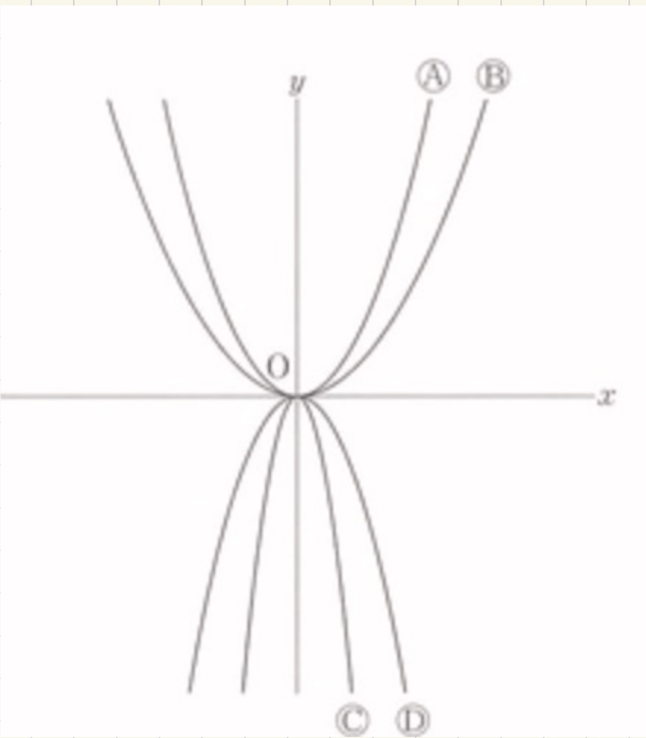
$$変化の割合 = \frac{yの増加量}{xの増加量}$$

$$= \frac{2-6}{3-1}$$

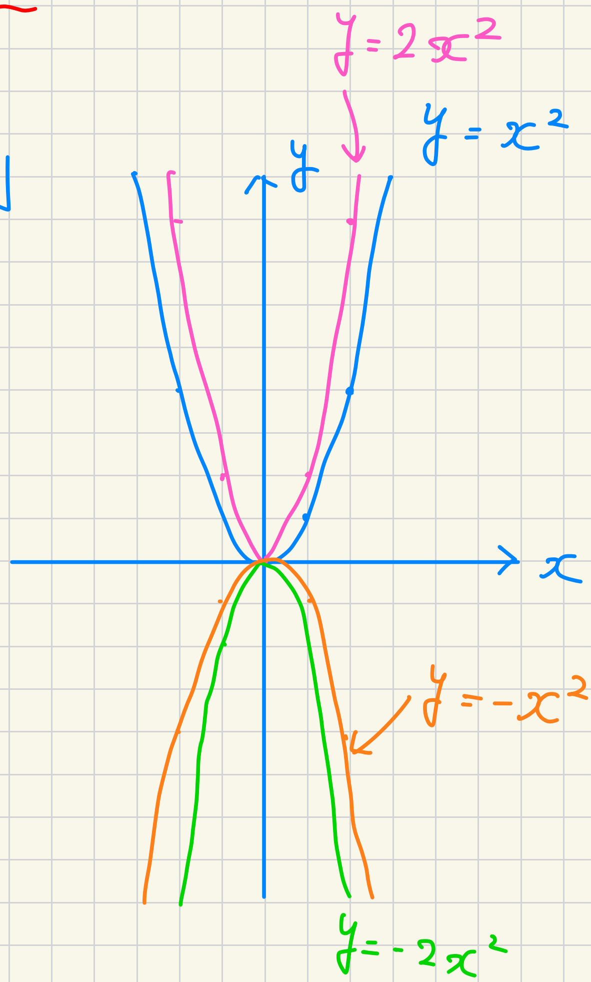
$$= \frac{-4}{2}$$

$$= -2$$

②



例



左図と例の図を見比べると、

$-2 < -1 < 1 < 2$

Ⓒ Ⓓ Ⓑ Ⓐ

よって、答えは エ

(2)

①

	1列目	2列目	3列目	4列目	5列目
1行目	1	2	3	4	5
2行目	10	9	8	7	6
3行目	11	12	13	14	15
4行目	20	19	18	17	16
5行目	21	22	23	24	25
6行目	30	29	28	27	26

よって答えは 30

②

	1列目	2列目	3列目	4列目	5列目
1行目	1	2	3	4	5
2行目	10	9	8	7	6
3行目	11	12	13	14	15
4行目	20	19	18	17	16
5行目	21	22	23	24	25
6行目	30	29	28	27	26
⋮			⋮		
n行目			○		

+5 +5 +5 +5 +5 +5

$3 = 5 \times 1 - 2$

$8 = 5 \times 2 - 2$

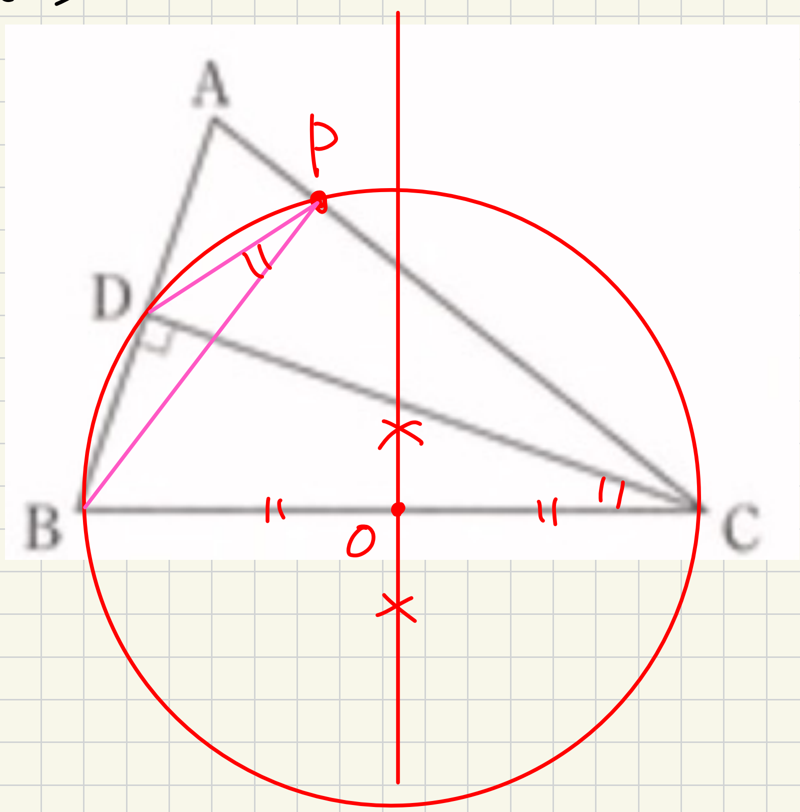
$13 = 5 \times 3 - 2$

⋮

$\bigcirc = 5 \times n - 2$

$= 5n - 2$

(3)



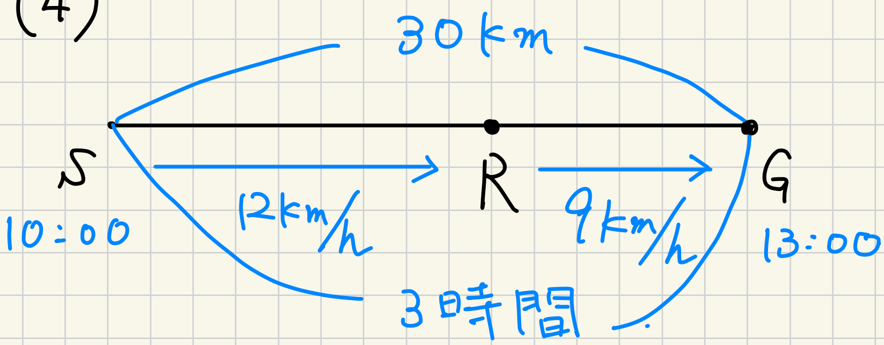
① BCの垂直二等分線を描く

② ①とBCの交点をOとし、Oを中心として半径OBの円を描く.

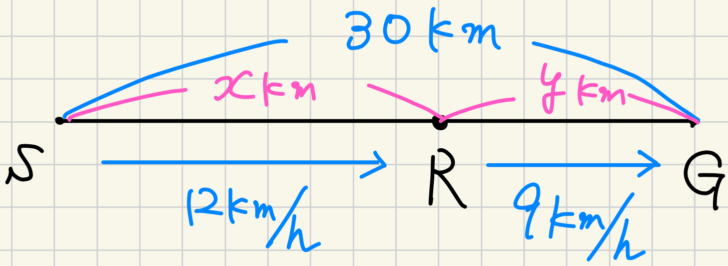
③ ∠BDC＝90°より
DはBCを直径とする円上にある.
⇒B, C, Dは同じ円上にある.

④ 円とACの交点がPである.
⇒ $\overset{\frown}{BD}$ に対して，円周角の定理より
$\angle BCD = \angle BPD$

(4)



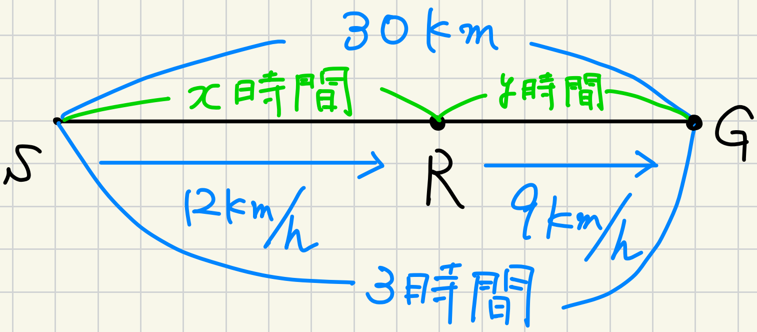
（麻衣さん）



$$x + y = 30 \quad ㋐$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{x}{12}}_{S\to R\text{の時間}} + \underbrace{\frac{y}{9}}_{R\to G\text{の時間}}}_{} = \underbrace{3}_{S\to G\text{の時間}} \quad ㋑$$

（飛鳥さん）

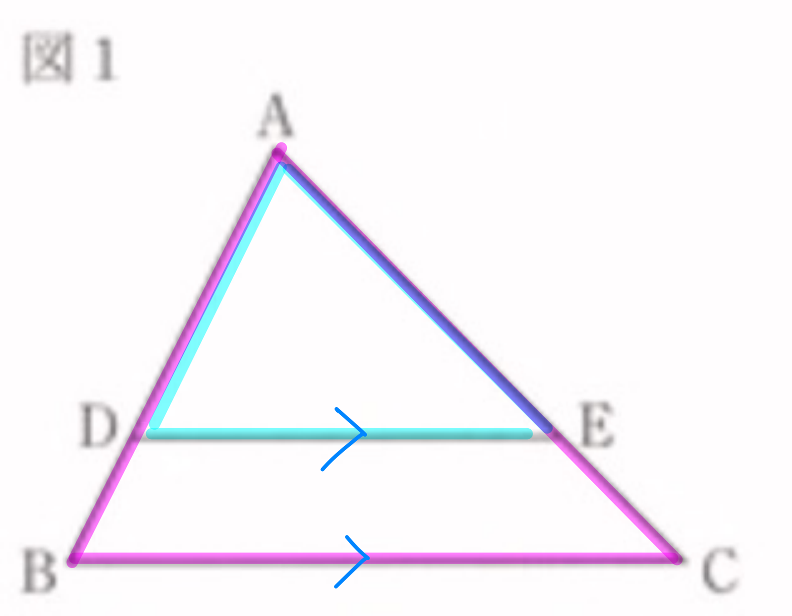


$$x + y = 3 \quad ㋒$$

$$\underbrace{\underbrace{12x}_{S\to R\text{の距離}} + \underbrace{9y}_{R\to G\text{の距離}}}_{} = \underbrace{30}_{S\to G\text{の距離}} \quad ㋓$$

3.

(1)



△ABCと△ADEにおいて，DE//BCより同位角が等しいので

∠ABC＝∠ADE ―①

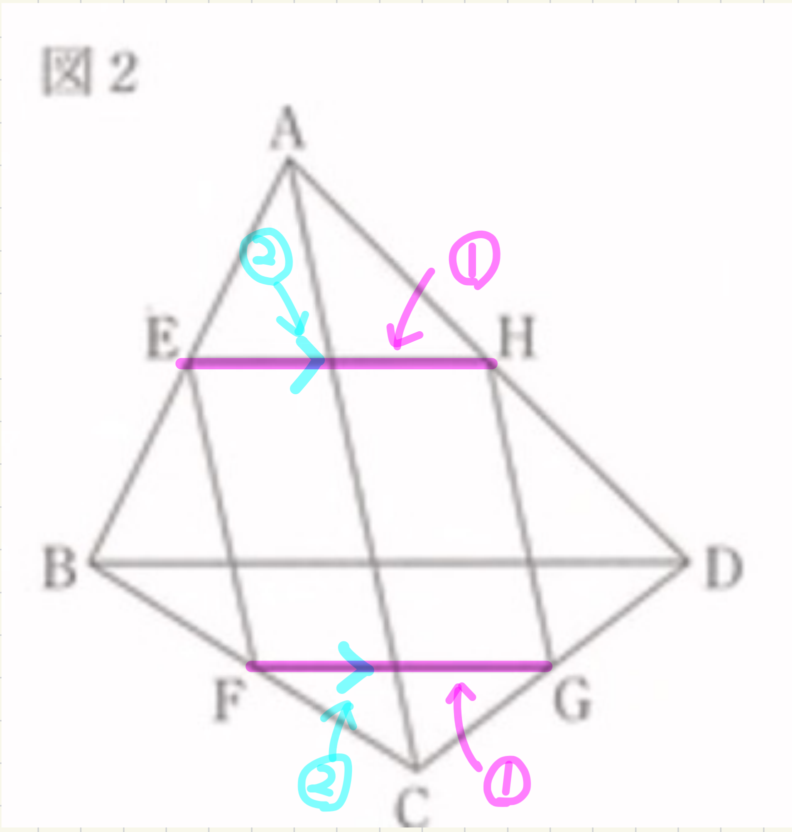
∠ACB＝∠AED ―②

①，②より2組の角がそれぞれ等しいので

△ABC ∽ △ADE（証明終わり）

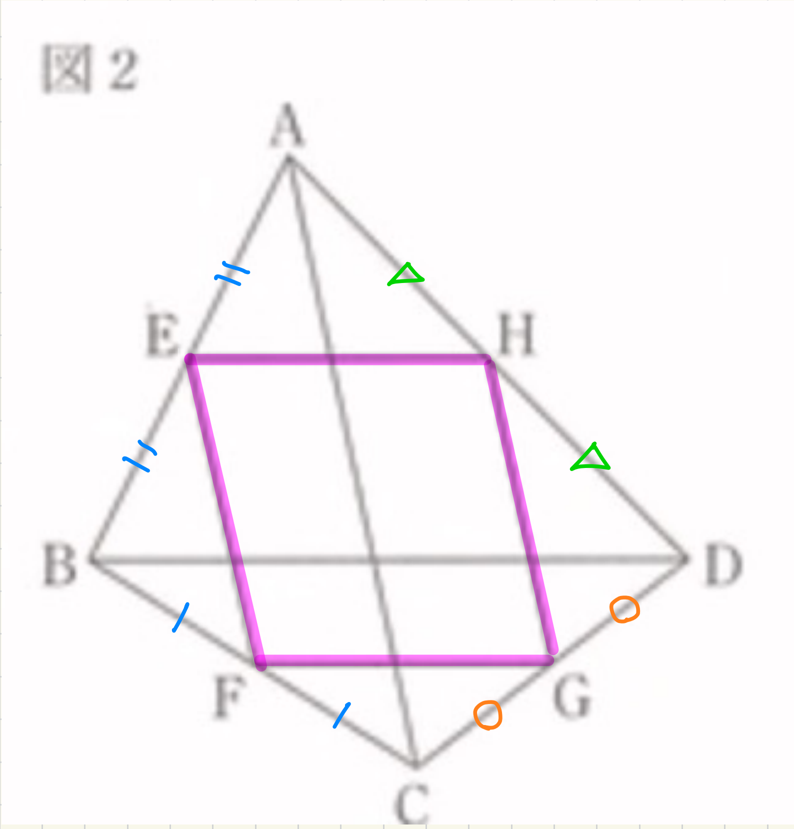
(2)

①



①，②より1組の対辺が平行で，その長さが等しい

②



ひし形になる条件
4つの辺が全て等しい四角形

□EHGHがひし形になるには、
$EF = HG = EH = FG$
となれば良い

$AE = EB$, $BF = CF$ より△ABCで中点連結定理より

$EF = \frac{1}{2}AC$ ——㋐

①と仮定より

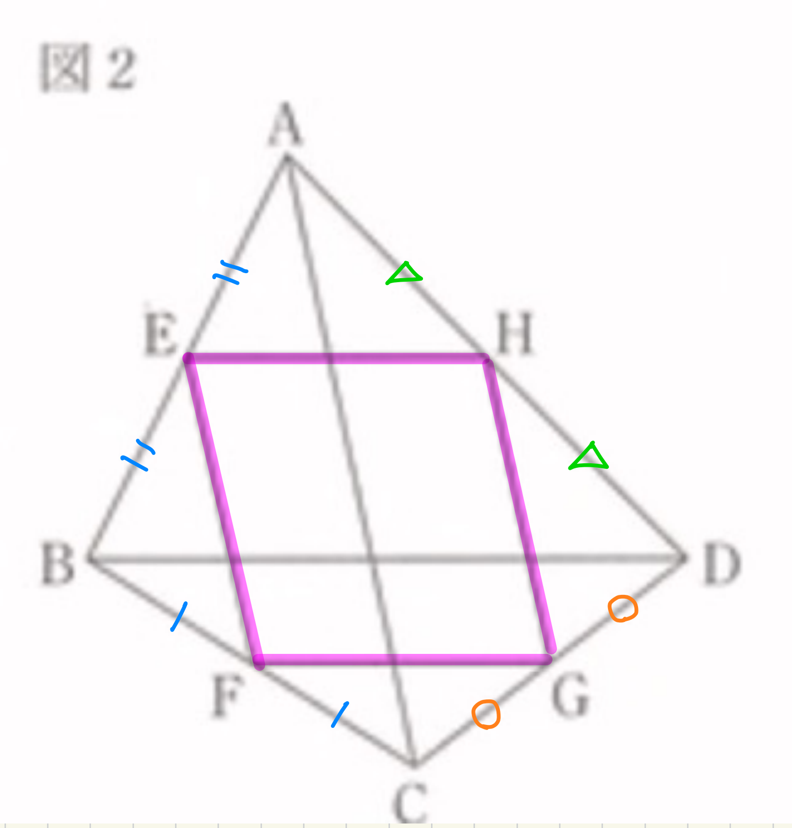
$EH = \frac{1}{2}BD$ ——㋑, $EH \parallel BD$

⇒△ABDで中点連結定理より点HはADの中点。∴ $AH = HD$

同様に、①と仮定より

$FG = \frac{1}{2}BD$ ——㋒, $FG \parallel BD$

⇒△BCDで中点連結定理より点GはCDの中点。∴ $CG = GD$



ゆえに、△ACDで中点連結定理より

$HG = \frac{1}{2}AC$ —— ㊁

㋐〜㊁より

$EF = \frac{1}{2}AC$

$EH = \frac{1}{2}BD$

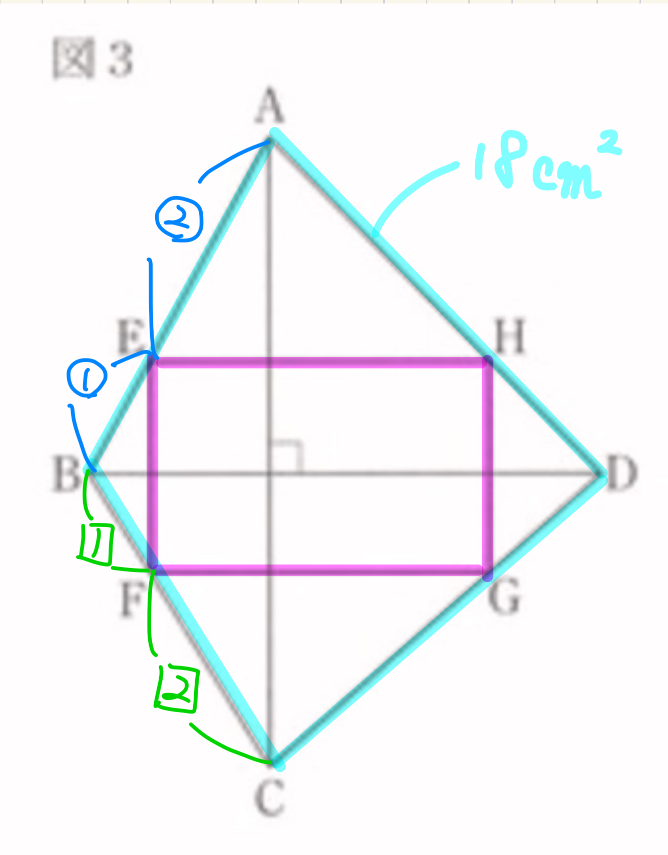
$FG = \frac{1}{2}BD$

$HG = \frac{1}{2}AC$

よって、

$EF = FG = GH = HE$ となるには $AC = BD$ ㊁ であれば良い。

(3)



$AC \perp BD$ より □ABCD の面積は

$\frac{1}{2} \times AC \times BD = 18$

$\therefore AC \times BD = 36$ —— ㋐

△BEFと△BACにおいて、

$BE : BA = 1 : 3$ —— ①

$BF : BC = 1 : 3$ —— ②

共通な角は等しいから

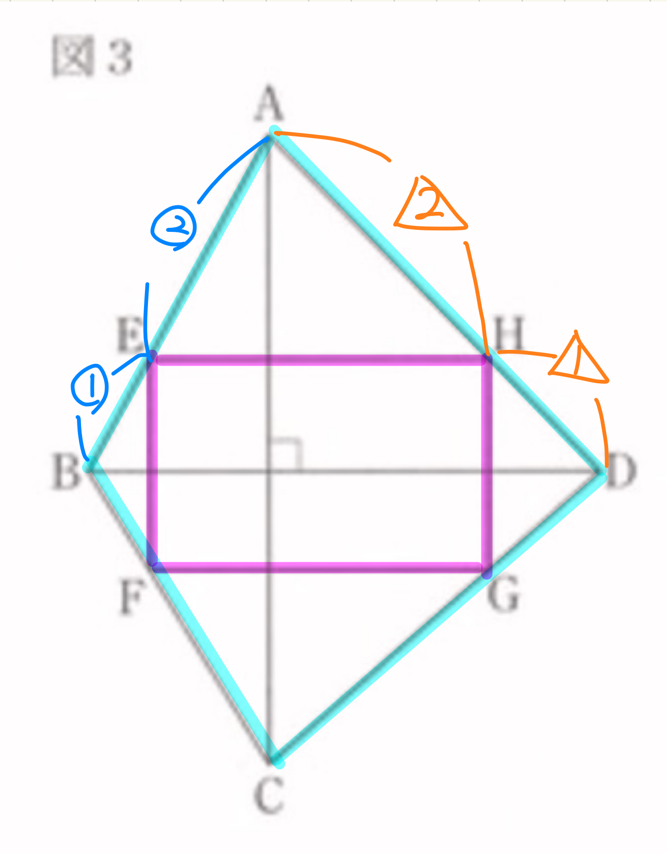
$\angle EBF = \angle ABC$ —— ③

①, ②, ③ より2組の辺の比と、その間の角が等しいので、$\triangle BEF \backsim \triangle ABC$

対応する辺の比は等しいから

$$EF : AC = BE : BA$$
$$= 1 : 3$$

$$\therefore 3EF = AC \Rightarrow EF = \frac{1}{3}AC \text{ —— ①}$$



EH // BD より

$$AH : HD = AE : EB$$
$$= 2 : 1$$
$$\therefore AH : AD = 2 : 3$$

$\triangle AEH$ と $\triangle ABD$ において、

$$AE : AB = 2 : 3 \text{ —— ④}$$
$$AH : AD = 2 : 3 \text{ —— ⑤}$$

共通な角は等しいので、

$$\angle EAH = \angle BAD \text{ —— ⑥}$$

④, ⑤, ⑥ より2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、$\triangle AEH \backsim \triangle ABD$

対応する辺の比は等しいので

$$EH : BD = AE : AB$$
$$= 2 : 3$$

$$\therefore 3EH = 2BD \Rightarrow EH = \frac{2}{3}BD \text{ —— ⑦}$$

よって，□EFGHの面積は

$$EF\times EH=\underbrace{\frac{1}{3}AC}_{イ}\times\underbrace{\frac{2}{3}BD}_{ア}$$

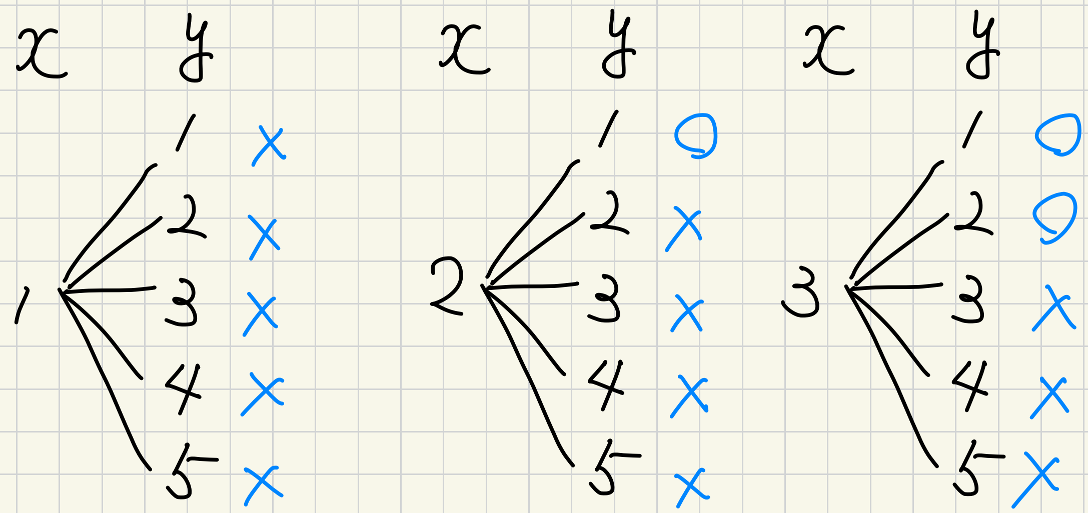
$$=\frac{2}{9}\underbrace{AC\times BD}_{ア\text{より}36}$$

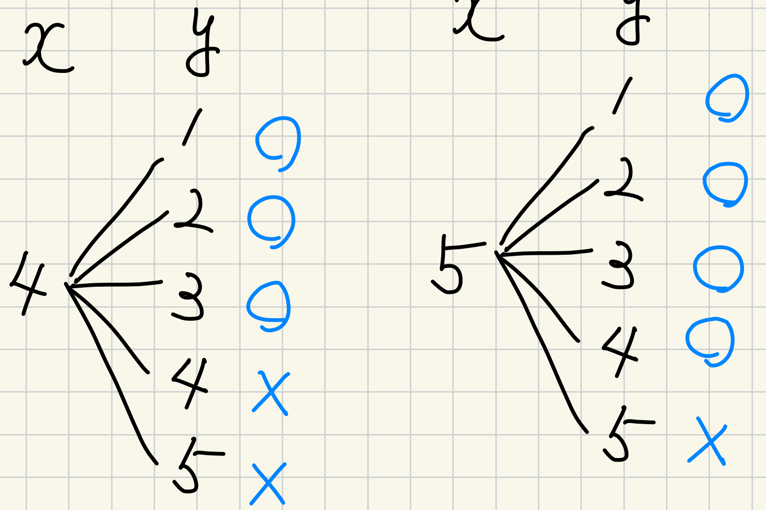
$$=\frac{2}{9}\times 36=8\ cm^2$$

4

(1)

① 樹形図は以下の通り





玉の取り出し方は全部で25通り。
$x>y$ となるのは10通り。よって求める確率は

$$\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

② 玉の取り出し方は、以下の通り

(1回目, 2回目) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)
(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5)
(3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)

玉の取り出し方は、全部で20通り。そのうち、少なくとも1つの玉が偶数となるのは14通り。
よって、求める確率は

$$\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

(2)

3けたの自然数の百の位の数をa、十の位の数をb、一の位の数をcとすると、3けたの自然数は、$100a + 10b + c$ と表すことができる。各位の数の和をひくと、

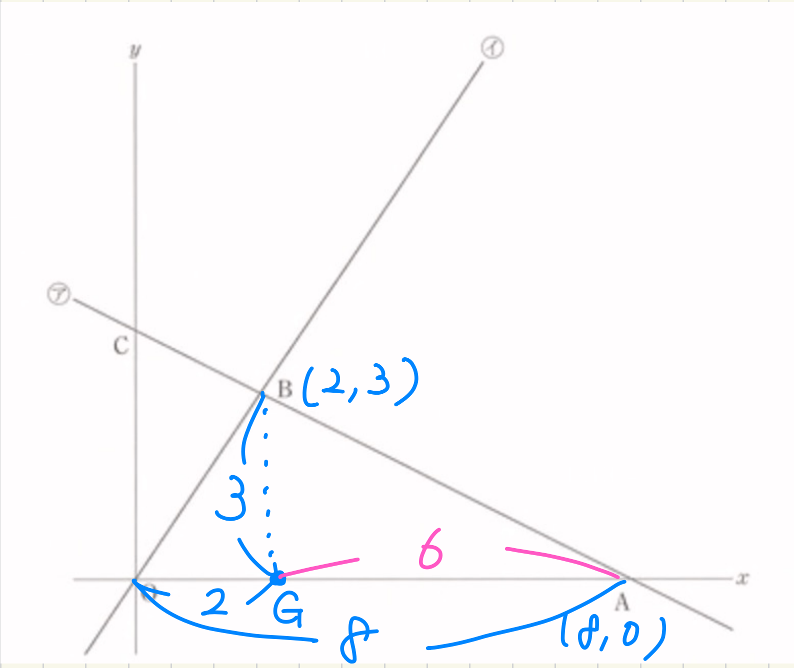
$$100a + 10b + c - (a + b + c)$$
$$= 100a + 10b + c - a - b - c$$
$$= 99a + 9b$$
$$= 9(11a + b)$$

$11a + b$ は整数だから、$9(11a + b)$ は9の倍数となる。

したがって、3けたの自然数から、その数の各位の数の和をひくと、9の倍数になる。

5. − I

(1)



点Bからx軸に垂線を下ろした足をGとする。

$BG = 3$,

$AG = 8 - 2 = 6$

より△BGAで三平方の定理より

$AB = \sqrt{3^2 + 6^2}$

$= 3\sqrt{5}$ cm

$= \sqrt{9 + 36}$

$= \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$

(2)

㋐はA(8, 0), B(2, 3)を通る。㋐の式を$y = ax + b$とおくと。

$$
\begin{array}{rl}
0 = 8a + b & \text{— ①} \\
-)\ \ 3 = 2a + b & \text{— ②} \\
\hline
-3 = 6a & \\
a = -\frac{1}{2} &
\end{array}
$$

$a = -\frac{1}{2}$ を②に代入して

$3 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b$

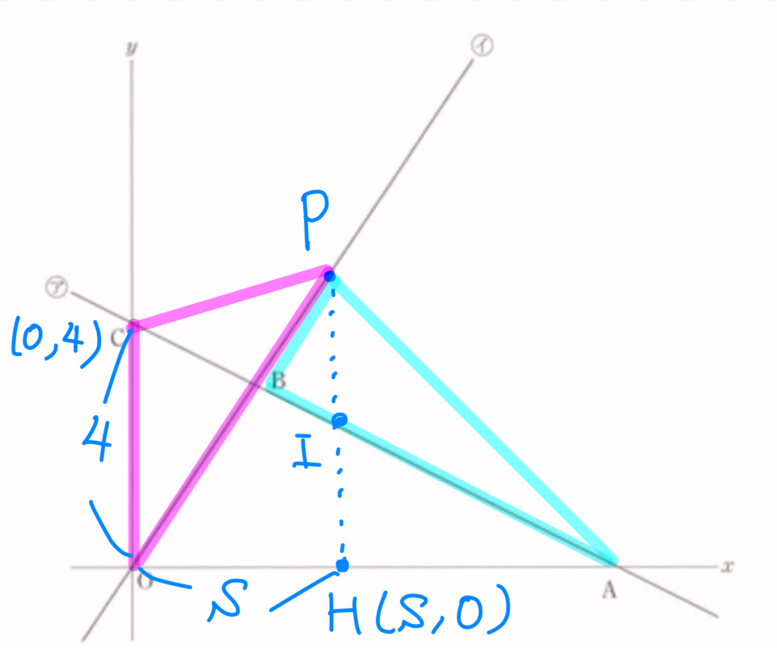
$\therefore b = 3 + 1$

$= 4$

よって、㋐の式は

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

(3)



点Pからx軸に垂線を下ろした足をHとする。
また、PHと㋐の交点をIとする。
さらに、点Pのx座標をSとする。

点Cは㋐のy切片なので、(2)より C(0, 4)
よって、

$\triangle COP = \frac{1}{2} \times 4 \times S = 2S$

また、Iは㋐上にあり、$x = S$ なので、

$y = -\frac{1}{2}S + 4 \quad \therefore I(S, -\frac{1}{2}S + 4)$

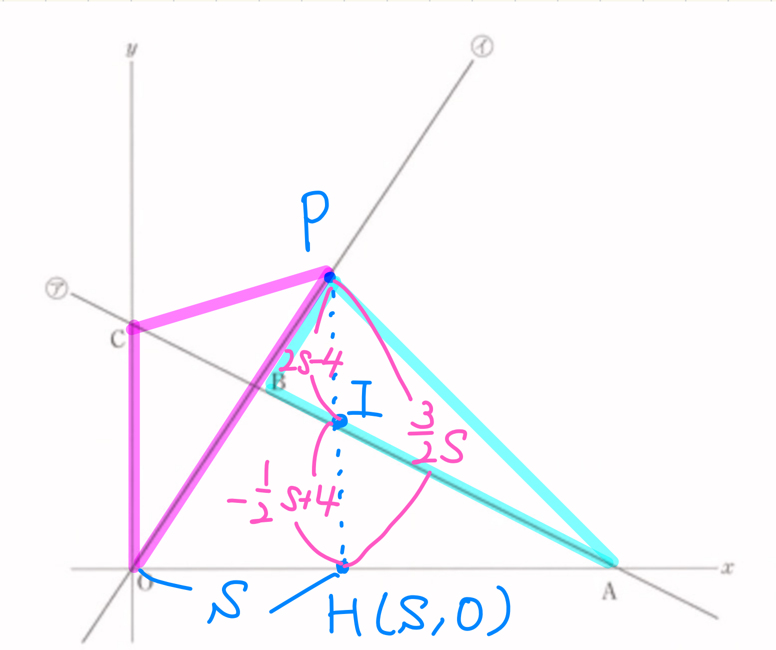
①の式を $y = ax$ とおくと、B(2, 3)を通るので、

$3 = 2a \quad \therefore a = \frac{3}{2}$

よって、① : $y = \frac{3}{2}x$

点Pは①上にあり、$x = S$ なので、

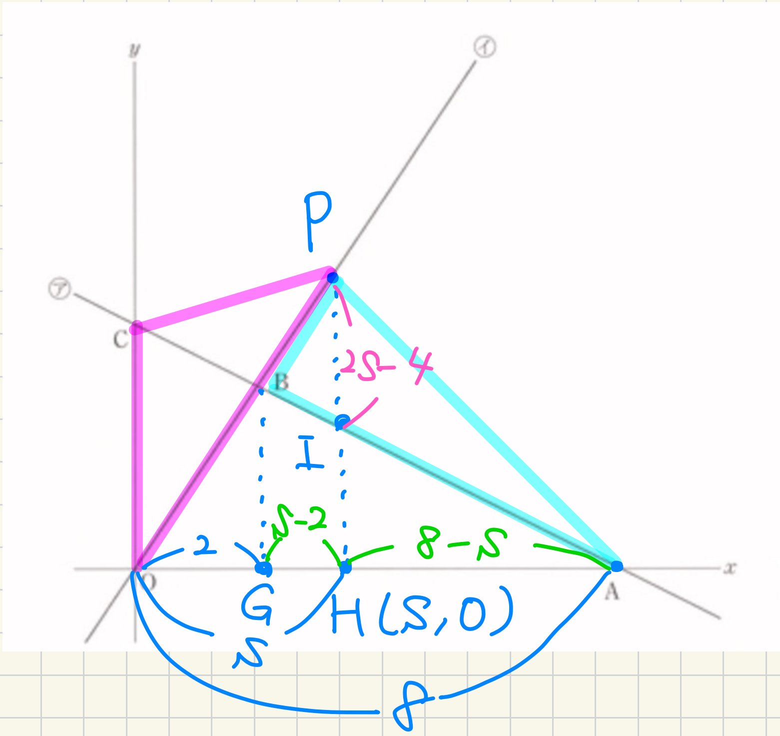
$y = \frac{3}{2}S \quad \therefore P(S, \frac{3}{2}S)$



$PH = \frac{3}{2}s,\ IH = -\frac{1}{2}s + 4$

より

$$
\begin{aligned}
PI &= PH - IH \\
&= \frac{3}{2}s - \left(-\frac{1}{2}s + 4\right) \\
&= \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}s - 4 \\
&= 2s - 4
\end{aligned}
$$



また、左図より

$HG = s - 2$

$AH = 8 - s$

以上より

$$
\begin{aligned}
\triangle BAP &= \triangle BIP + \triangle PIA \\
&= \frac{1}{2} \times (2s-4) \times (s-2) + \frac{1}{2} \times (2s-4) \times (8-s) \\
&= \frac{1}{2}(2s-4)\{(s-2) + (8-s)\} \\
&= (s-2) \times 6 \\
&= 6s - 12
\end{aligned}
$$

$\triangle COP = \triangle BAP$ より

$$2s = 6s - 12$$

$$-4s = -12 \quad \therefore s = 3$$

よって、点Pのx座標は 3である.

5. −Ⅱ

(1) 点Cは ①: $y = 3x - 5$ 上にあり $y = 0$ なので.

$$0 = 3x - 5 \qquad \therefore x = \frac{5}{3}$$

よって. $C\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

BCを通る直線の式を$y = ax + b$とおくと.
$B(0, 3)$, $C\left(\frac{5}{3}, 0\right)$を通るので.

$$\begin{cases} 3 = 0 + b & \text{―― ①} \\ 0 = \frac{5}{3}a + b & \text{―― ②} \end{cases}$$

① より $b = 3$、これを② に代入して.

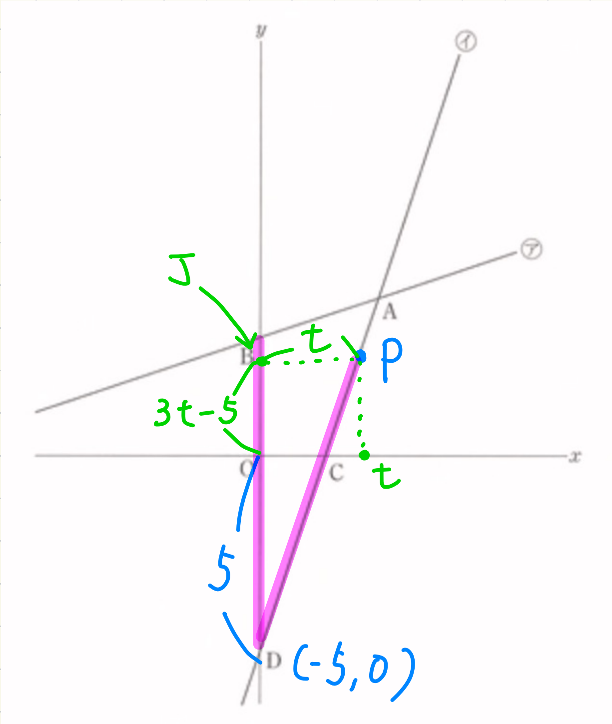
$$0 = \frac{5}{3}a + 3$$

$$-\frac{5}{3}a = 3 \quad \therefore a = -\frac{9}{5}$$

よって. $y = -\frac{9}{5}x + 3$

(2)

① 難問



B(0,3), D(0,−5) より

BD = 8

よって、PD = 8 となれば良い。

点Pからy軸に垂線を下ろした足をJとする。また、点Pのx座標をtとする

点Pは ① : $y = 3x - 5$ 上にあるので

$y = 3t - 5$　　∴ $P(t, 3t-5)$

よって、

$JO = 3t - 5$, $CD = 5$ より

$BD = 3t - 5 + 5 = 3t$

また、PJ = t なので、△PJDで三平方の定理より

$PD^2 = s^2 + (3s)^2$

$= 10s^2$

PD = 8 より、$PD^2 = 8^2 = 64$。よって

$10s^2 = 64$

$s^2 = \dfrac{32}{5}$

点Pのx座標は正であるから、s>0。よって

$$s = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{5}}$$

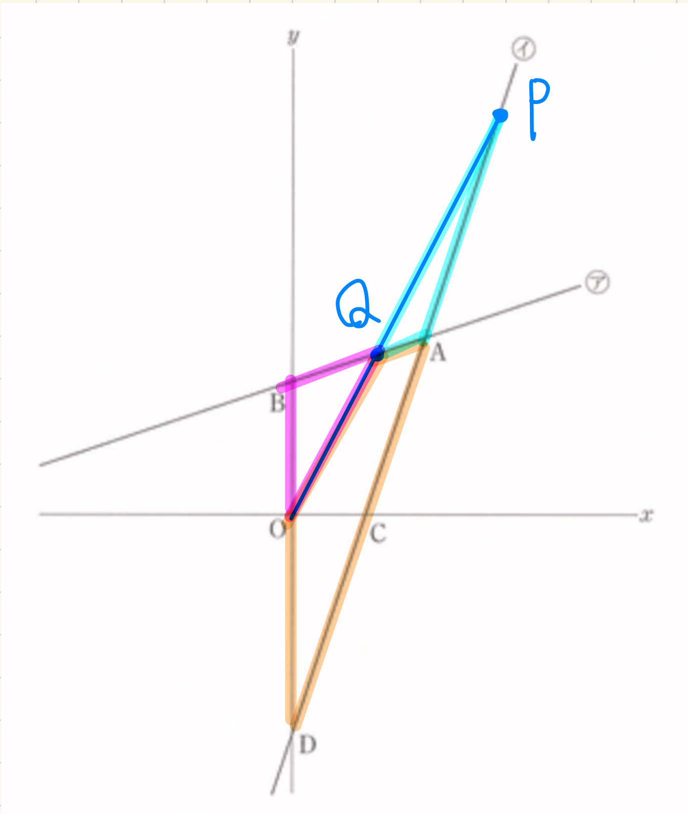
$$= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

② 難問

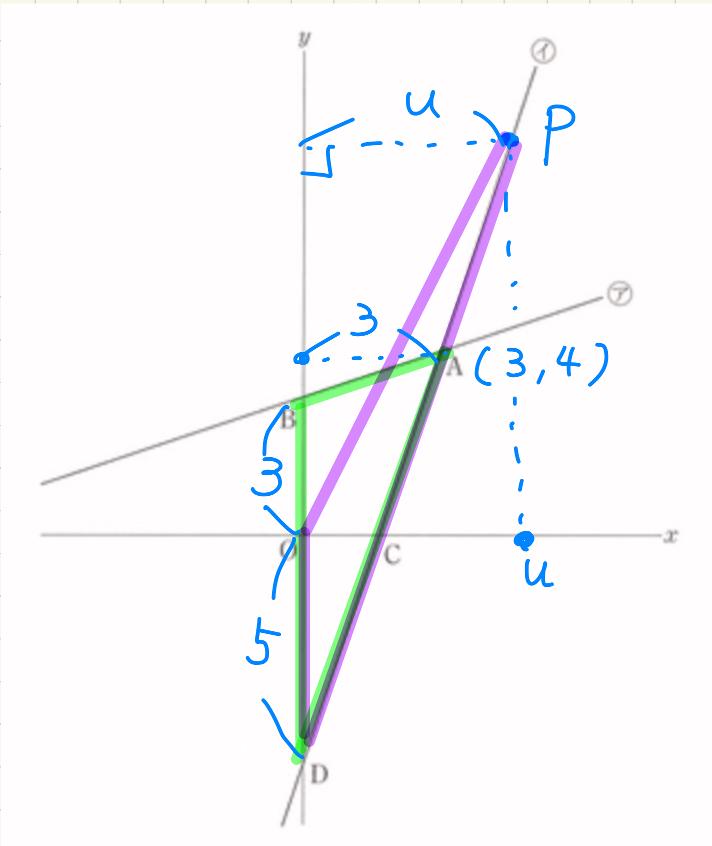


△ABD = △OBQ + □AQOD

△POD = △APQ + □AQOD

△OBQ = △APQ より

△ABD = △POD



$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$

点Pのx座標をuとすると.

$\triangle POD = \frac{1}{2} \times 5 \times u = \frac{5}{2}u$

$\triangle ABD = \triangle POD$より

$12 = \frac{5}{2}u \qquad \therefore u = \frac{24}{5}$

よって,点Pのx座標は$\frac{24}{5}$