2021年度　福島県

数学

KmKm

1.

(1)

① 与式 $= \underline{-24}$

② 与式 $= \dfrac{3-5}{6}$

$= -\dfrac{2}{6}$

$= \underline{-\dfrac{1}{3}}$

③ 与式 $= \dfrac{-8x^3 \times (-x)}{4x^2}$

$= \underline{2x^2}$

④ 与式 $= 5\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= \underline{6\sqrt{2}}$

(2) n角形の内角の和は $180(n-2)$ より.

六角形の内角の和は.

$180 \times (6-2)$

$= 180 \times 4$

$= \underline{720^\circ}$

2.

(1) $3^2 = 9$, $(2\sqrt{2})^2 = 8$ なので、$9 > 8$.

$\therefore 3 > 2\sqrt{2}$

負の数であることに注意して

$-3 < -2\sqrt{2}$

(2) 徒歩通学 : 自転車通学 $= 5 : 2$ より、

自転車通学している生徒の人数は、

$$126 \times \frac{2}{5+2} = 126 \times \frac{2}{7}$$

$$= 36人$$

(別解1)

自転車通学の生徒の人数を x 人とすると、

徒歩通学の生徒の人数は、$126 - x$ 人。

$$(126 - x) : x = 5 : 2$$

$$\therefore 5x = 2(126 - x)$$

$$5x = 252 - 2x$$

$$7x = 252$$

$$x = 36$$

(別解2)

自転車通学の生徒の人数を x 人、徒歩通学の生徒の人数を y 人とする。

$$\begin{cases} x + y = 126 & \text{—— ①} \\ y : x = 5 : 2 & \text{—— ②} \end{cases}$$

②より

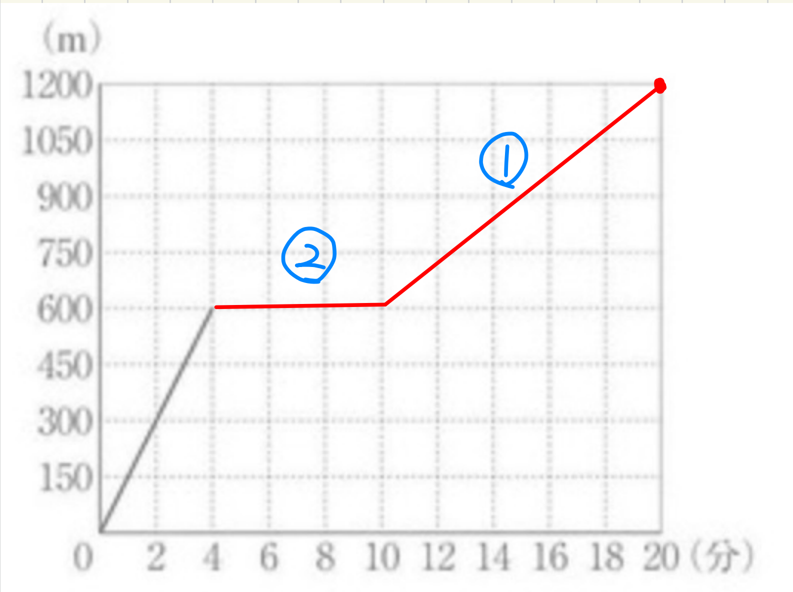
$$5x = 2y \iff y = \frac{5}{2}x$$

これを①に代入して

$$x + \frac{5}{2}x = 126$$

$$\frac{7}{2}x = 126 \qquad \therefore \ x = 36$$

(3)



①→②の順でグラフを書く。

① $x = 20$ のとき、$y = 1200$ を通る。また、毎分60mで進んだので、グラフの傾きは60である。

② ①のグラフは、$y = 600$ のとき、$x = 10$ を通る。

花屋までの道のり。

よって、えりかさんは、4分〜10分まで、花屋に立ち寄ったことになる。この間、えりかさんは移動していないので、$y = 600$ のグラフを書く。

(4) $y=ax^2$ において、x が p から q まで変化するときの変化の割合は $a(p+q)$ で表される。

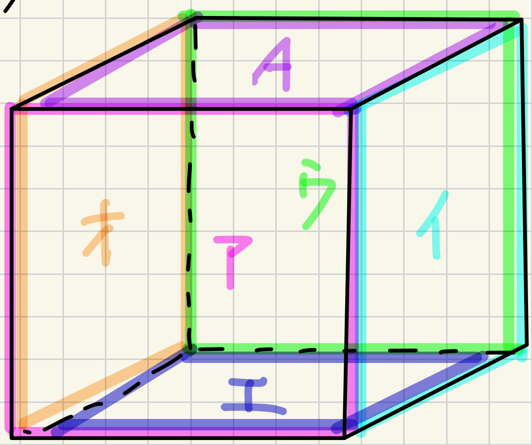
$y=ax^2$ において、x が 2 から 6 まで変化するときの変化の割合が -4 なので、

$$a(2+6)=-4$$

$$8a=-4$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}$$

(5)



A と平面な面は、エ

3.

(1)

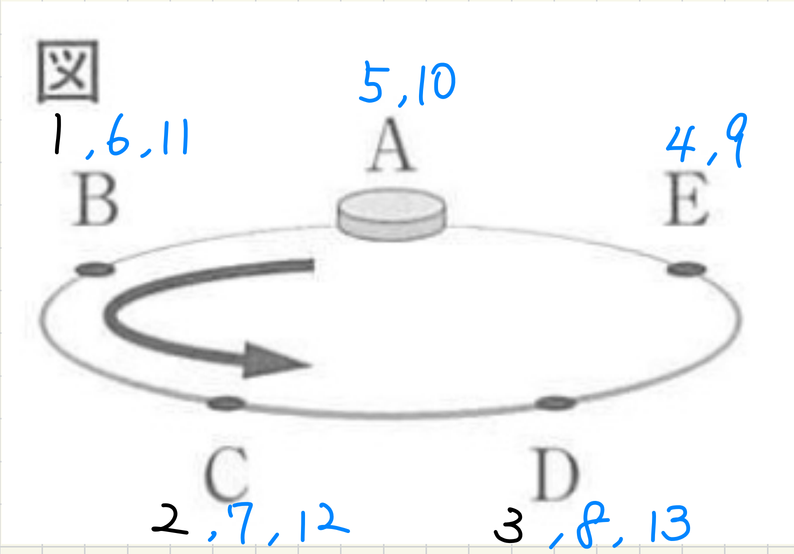
①

・$2a+b$ が最小となるのは、

箱P から 1 $(a=1)$、箱Q から 2 $(b=2)$ の玉を取り出したときなので、

$$2\times1+2=4$$

・$2a+b$が最大となるのは、
箱Pから4 $(a=4)$、箱Qから5 $(b=5)$
の玉を取り出したときなので、
$2\times4+5=13$



コインが点Dにとまるのは、$2a+b=8, 13$のときである。

(i) $2a+b=8$のとき、
$(a,b)=(2,4),(3,2)$の2通り

(ii) $2a+b=13$のとき
$(a,b)=(4,5)$の1通り

よって、コインが点Dにとまる場合は、3通り

②

Aにとまるとき、
$2a+b=5, 10$なので、
$2a+b=5 \Rightarrow (a,b)=(1,3)$
$2a+b=10 \Rightarrow (a,b)=(3,4),(4,2)$
の3通り。

Bにとまるとき.

$2a+b=6, 11$なので.

$2a+b=6 \Rightarrow (a, b)=(1, 4), (2, 2)$

$2a+b=11 \Rightarrow (a, b)=(3, 5), (4, 3)$

の4通り.

Cにとまるとき

$2a+b=7, 12$なので.

$2a+b=7 \Rightarrow (a, b)=(1, 5), (2, 3)$

$2a+b=12 \Rightarrow (a, b)=(4, 4)$

の3通り

Dにとまるとき.

①より3通り

Eにとまるとき

$2a+b=4, 9$なので.

$2a+b=4 \Rightarrow (a, b)=(1, 3)$

$2a+b=9 \Rightarrow (a, b)=(2, 5), (3, 3)$

の3通り

よって, 場合の数が最も大きいのは. Bにとまるときの4通り。

玉の取り出し方は. $4\times4=16$通り

したがって, 求める確率は

$$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

(2)

①

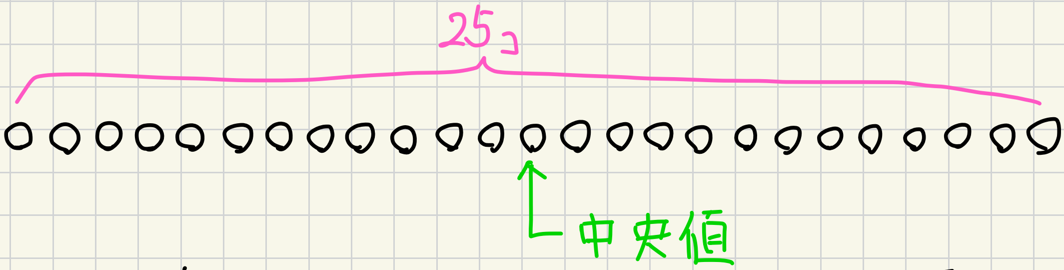
最小値 ←→ 最大値

?　範囲 = 31m　46m

よって

最小値 = 46 − 31 = 15m

②



データ数が25個のとき，中央値はデータを小さい順に並べたときの13番目の値である．

表2

記録（m） 以上　未満	A班 度数（回）	B班 度数（回）
15 ～ 20	2	3
20 ～ 25	5 ↑7	3 ↑6
25 ～ 30	7 ↑14	5 ↑11
30 ～ 35	4	8 ↑19
35 ～ 40	5	5
40 ～ 45	1	1
45 ～ 50	1	0
合計	25	25

A班の中央値は．

25 ～ 30m

B班の中央値は

30 ～ 35m

したがって，中央値を比べると，B班の方が大きい

4.

十の位の数を x，一の位の数を y とする。
百の位の数が，十の位の数より 2 大きいから，
百の位の数は，$(x+2)$ と表される。

各位の数の和が 18 だから，

$$\underbrace{(x+2)}_{\text{百の位}} + \underbrace{x}_{\text{十の位}} + \underbrace{y}_{\text{一の位}} = 18$$

これを整理して，

$$2x + y = 16 \quad \text{——} \ ①$$

はじめの自然数は，

$$100(x+2) + 10x + y = 110x + y + 200$$

百の位の数と一の位の数を入れかえてできる
自然数は

$$100y + 10x + (x+2) = 11x + 100y + 2$$

この自然数は，はじめの自然数より 99 小さいので，

$$\underbrace{11x + 100y + 2}_{\text{入れかえた自然数}} = \underbrace{110x + y + 200}_{\text{はじめの自然数}} - 99$$

これを整理して，

$$99x - 99y = -99$$

$$\therefore x - y = -1 \quad \text{——} \ ②$$

①，② を連立して，

$$\begin{array}{rrcrl} & 2x + y & = & 16 & \text{——} \ ① \\ +) & x - y & = & -1 & \text{——} \ ② \\ \hline & 3x & = & 15 & \end{array}$$

$x=5$。これを②に代入して

$5-y=-1$

$-y=-6$ $\therefore y=6$

これらは問題に適している。よって

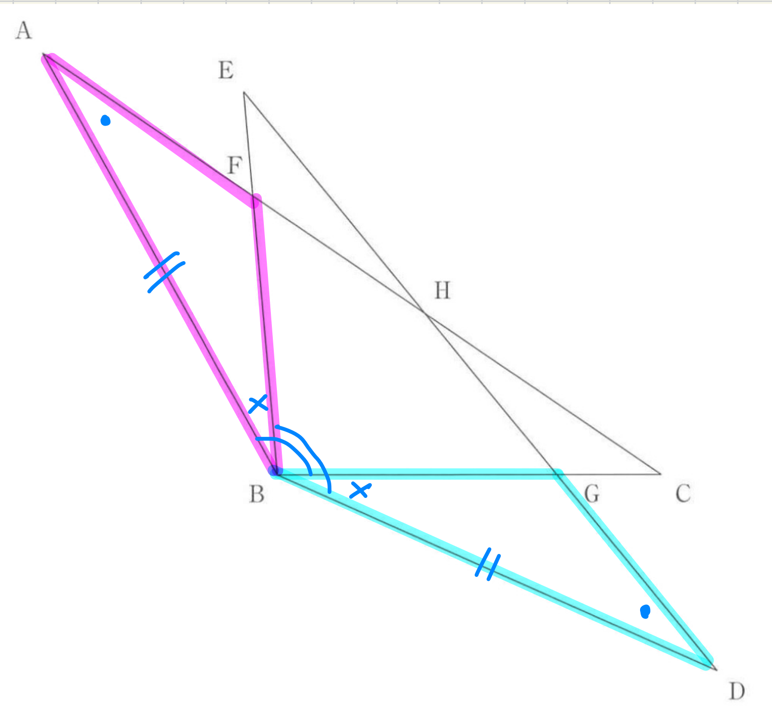
百の位の数 $=5+2=7$

十の位の数 $=5$

一の位の数 $=6$

より求める自然数は 756

5



△ABF と △DBG において、

仮定より

$AB=DB$ ― ①

$\angle BAF=\angle BDG$ ― ②

$\angle ABC=\angle DBE$ ― ③

$\angle ABF=\angle ABC-\angle CBE$ ― ④

$\angle DBG=\angle DBE-\angle CBE$ ― ⑤

③、④、⑤より

$\angle ABF=\angle DBG$ ― ⑥

①、②、⑥より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle ABF \equiv \triangle DBG$

合同な図形の対応する辺は等しいから

$AF = DG$ （証明終わり）

6.

(1) 点Pは直線 ℓ と m の交点なので

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 & \text{—— ①} \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 & \text{—— ②} \end{cases}$$

① + ② より

$$2y = 6 \qquad \therefore\ y = 3$$

$y = 3$ を ① に代入して

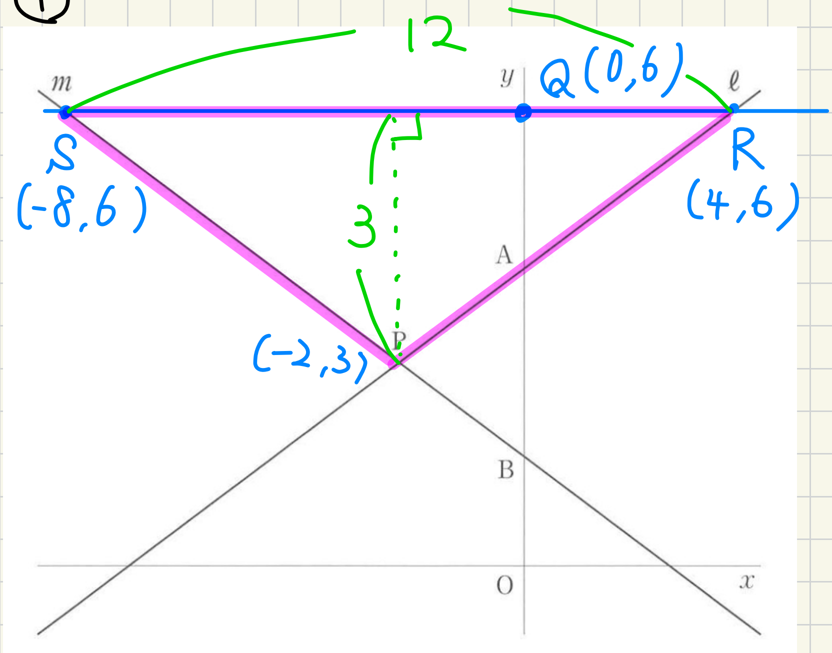
$$3 = \frac{1}{2}x + 4$$

$$-\frac{1}{2}x = 1 \qquad \therefore\ x = -2$$

よって、P $(-2, 3)$

(2)

①



点Qはy軸上にあり、y座標が6なので、

Q(0,6)

R, SはQを通りx軸に平行な直線と、ℓ, mの交点なので、R, Sのy座標は6。

・Rについて、

ℓ上にあり、$y=6$なので、

$$6 = \frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x = 2 \quad \therefore x = 4 \quad \therefore R(4,6)$$

・Sについて、

m上にあり、$y=6$なので、

$$6 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{1}{2}x = -4 \quad \therefore x = -8 \quad \therefore S(-8,6)$$

△PRSの

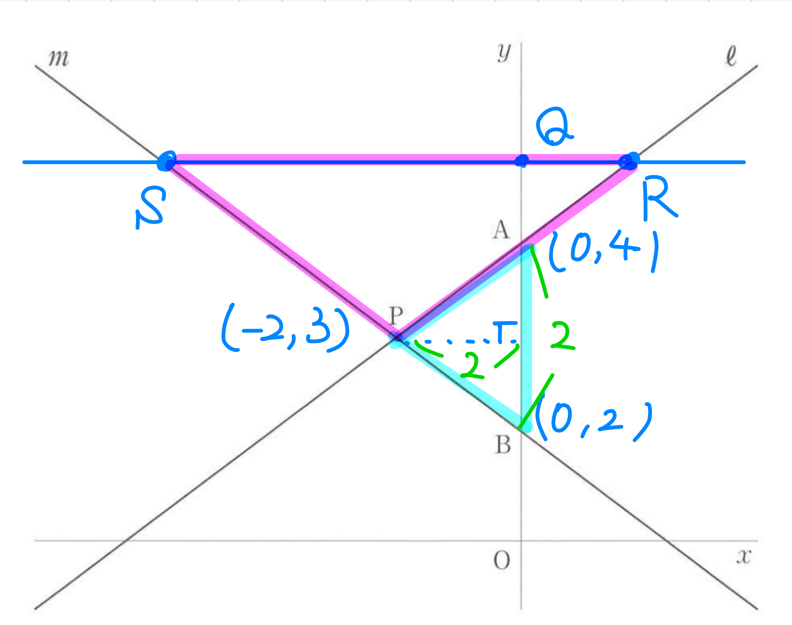
底辺：$4-(-8) = 12$

高さ：$6-3 = 3$

よって、△PRSの面積は

$$\frac{1}{2}\times 12\times 3 = 18$$

②

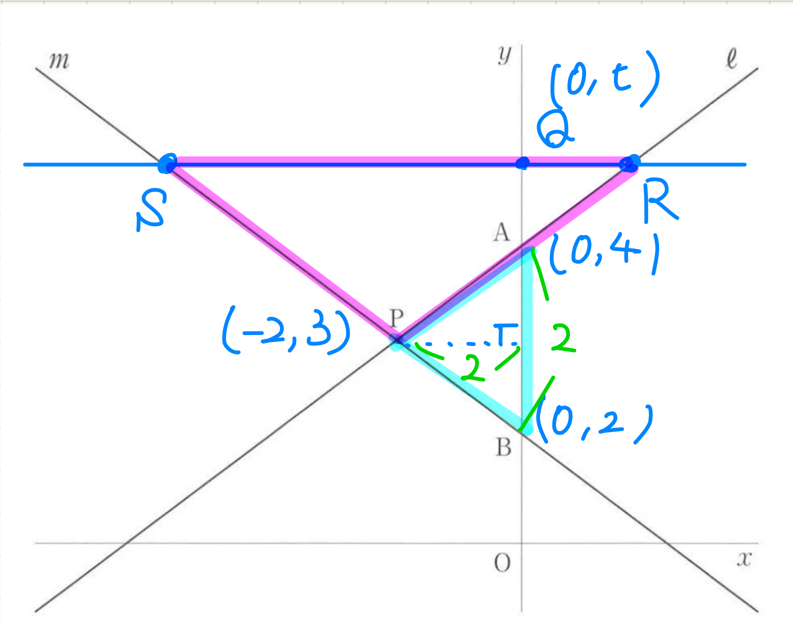


・点Aについて、
直線ℓの切片なので、
A(0, 4)

・点Bについて
直線mの切片なので、
B(0, 2)

△ABPの
底辺 : $4-2=2$
高さ : $0-(-2)=2$

$$\therefore\ \triangle ABP = \frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$$



点Qはy軸上にあり、
y座標がtなので、
Q(0 t)
R, SはQを通り
x軸に平行な直線と、
ℓ, mの交点なので、
R, Sのy座標はt.

・Rについて.

ℓ 上にあり. $y=t$ なので.

$$t=\frac{1}{2}x+4$$

$$\frac{1}{2}x=t-4 \qquad \therefore x=2(t-4)$$

$$\therefore R(2(t-4),t)$$

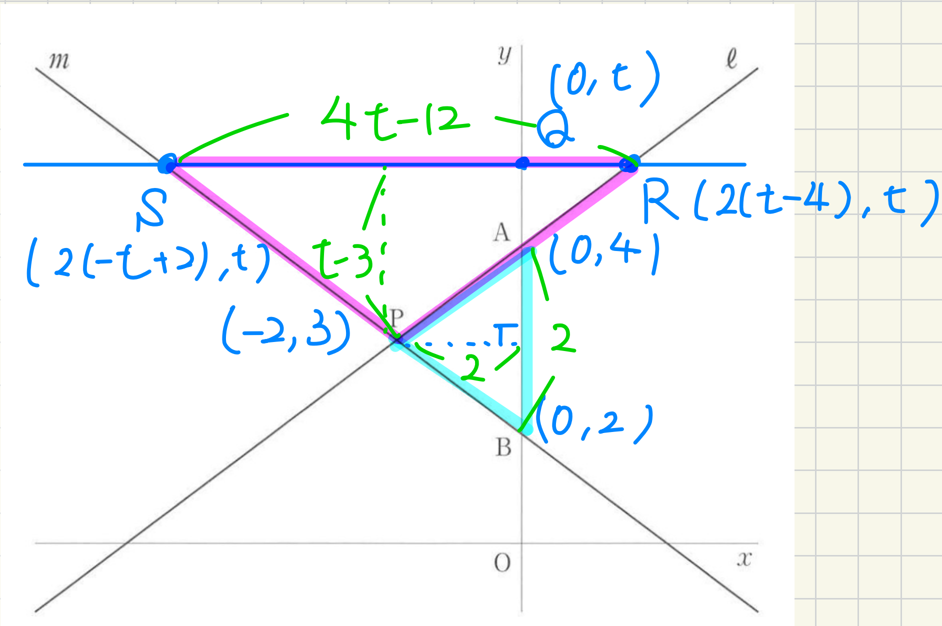
・Sについて.

m 上にあり. $y=t$ なので.

$$t=-\frac{1}{2}x+2$$

$$\frac{1}{2}x=-t+2 \qquad \therefore x=2(-t+2)$$

$$\therefore S(2(-t+2),t)$$



△PRSの

底辺：$2(t-4)-2(-t+2)=2t-8+2t-4$

$$=4t-12$$

高さ：$t-3$

よって

$$\triangle PRS = \frac{1}{2} \times (4t-12)(t-3)$$
$$= \frac{1}{2} \times 4(t-3)(t-3)$$
$$= 2(t-3)^2$$

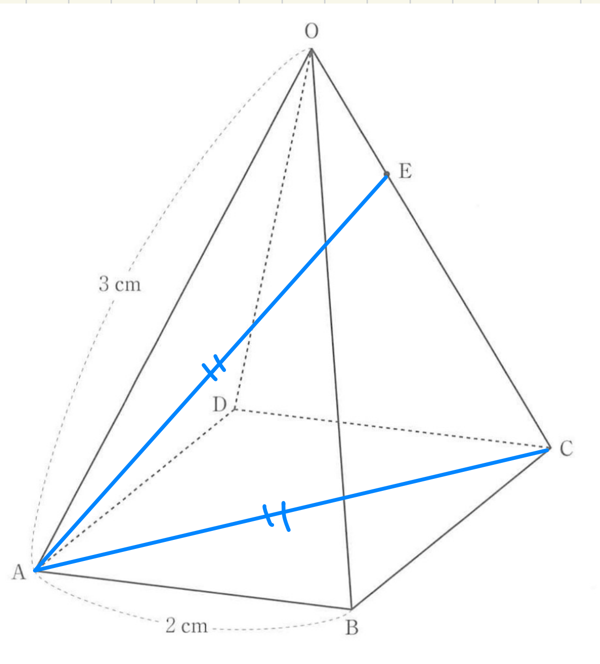
$\triangle PRS = 5 \times \triangle ABP$ より

$$2(t-3)^2 = 5 \times 2$$
$$\Leftrightarrow \quad (t-3)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow \quad t-3 = \pm\sqrt{5}$$
$$\therefore t = 3 \pm \sqrt{5}$$

$t > 4$ より $t = 3+\sqrt{5}$

7.

(1)



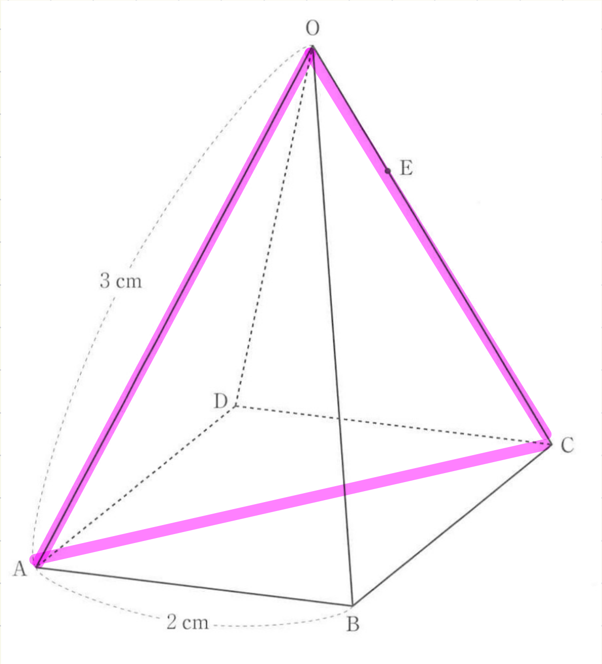
$\triangle ABC$ で三平方の定理より

$$AC = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4}$$
$$= 2\sqrt{2} \qquad = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

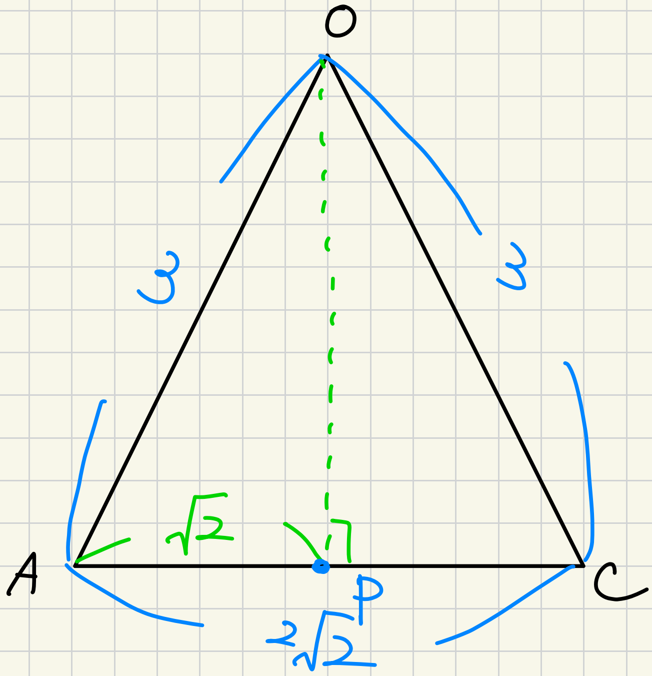
$AC = AE$ より

$$AE = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

(2)



⇒

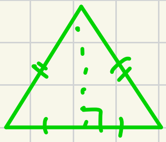


点OからACに下ろした垂線の足をPとする.

△OACはOA＝OC＝3cmの二等辺三角形

なので.

AP＝CP＝$\sqrt{2}$



△OAPで三平方の定理より

$$OP = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{9-2}$$

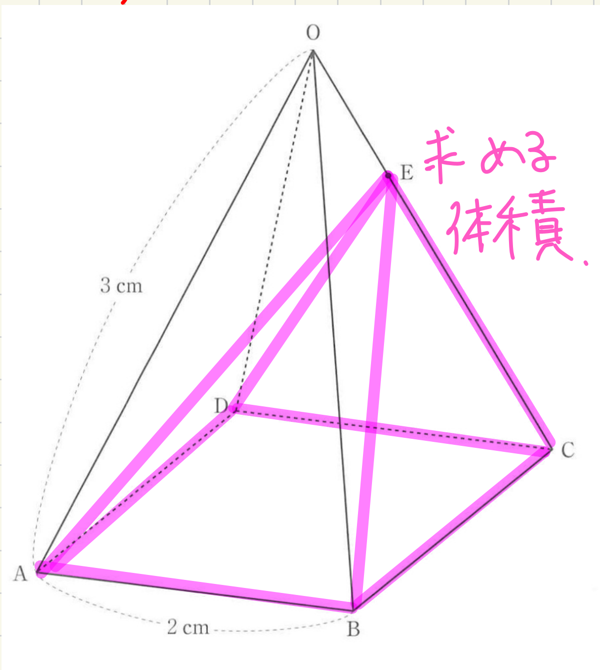
$$= \sqrt{7}$$

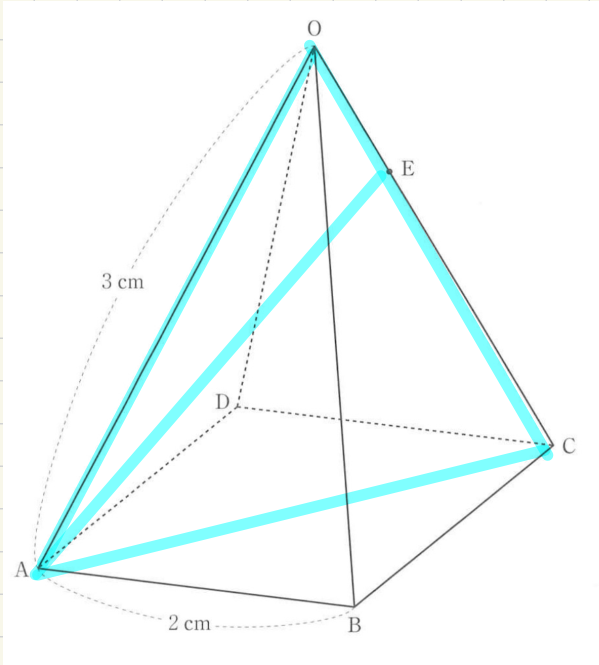
よって

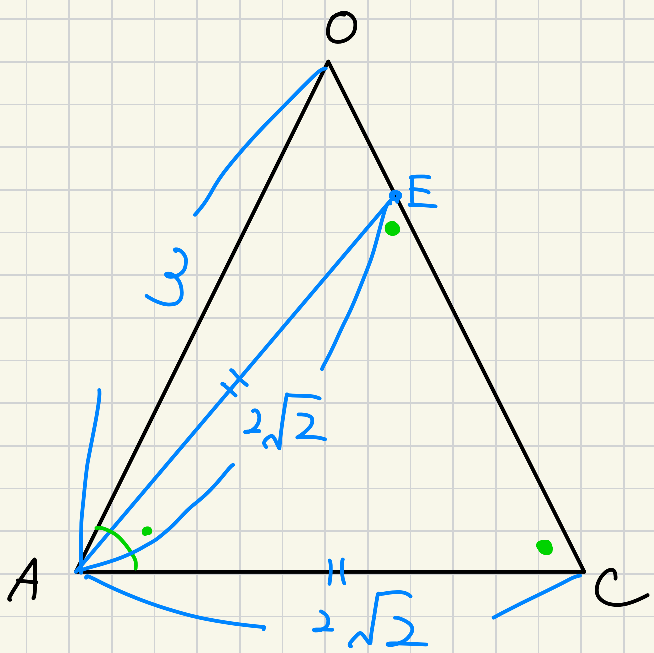
$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{7}$$

$$= \sqrt{14}\ \text{cm}^2$$

(3) 難問







△OACと△AECにおいて.
△OACはOA = OCの
二等辺三角形なので.
∠OAC = ∠OCA ― ①
△AECは. AE = ACの
二等辺三角形なので.
∠AEC = ∠ACE ― ②

①, ②より
∠OAC = ∠AEC ― ③
∠OCA = ∠ACE ― ④
③, ④より2組の角がそれぞれ等しいので.
△OAC ∽ △AEC

相似比は.
OA : AE = 3 : $2\sqrt{2}$.

相似な図形の面積比は、相似比の2乗に等しいので、

$$\triangle OAC : \triangle AEC = 3^2 : (2\sqrt{2})^2$$

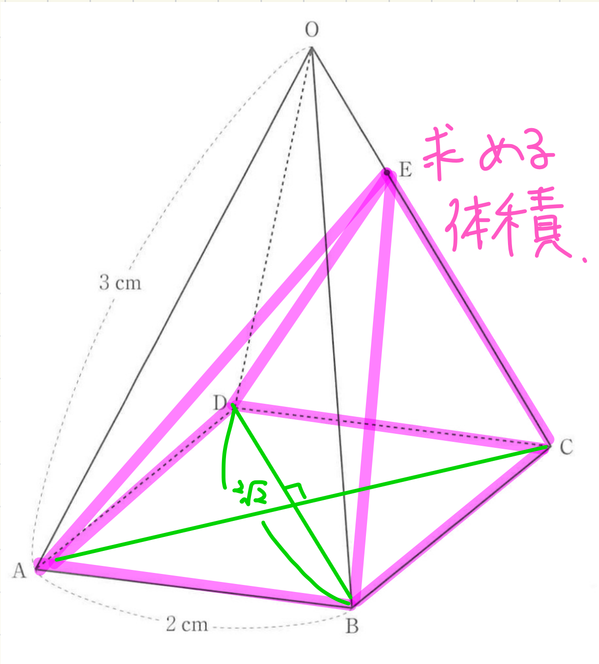
$$= 9 : 8$$

(2)より $\triangle OAC = \sqrt{14}$ なので、

$$\sqrt{14} : \triangle AEC = 9 : 8$$

$$9 \times \triangle AEC = 8\sqrt{14}$$

$$\therefore \triangle AEC = \frac{8}{9}\sqrt{14}.$$



四角すいE-ABCDにおいて、底面を△AECとすると、高さはDB = $2\sqrt{2}$ cmであるから、求める体積は、

$$\frac{1}{3} \times \frac{8}{9}\sqrt{14} \times 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{8}{9}\sqrt{7} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{8}{27} \times \sqrt{7} \times 4$$

$$= \frac{32\sqrt{7}}{27} \text{ cm}^3$$