2021年度　千葉県
数学

Km Km

1.

(1) 与式 $= 40$

(2) 与式 $= -9 + (-8) \times \frac{1}{4}$

$= -9 - 2$

$= -11$

(3) 与式 $= 8a - 5b - 2a + 3b$

$= 6a - 2b$

(4) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 & \text{—— ①} \\ 3x - y = -17 & \text{—— ②} \end{cases}$

① + ② × 3 より

$$\begin{array}{rrrl} & 2x & +\ 3y & = 7 \\ +) & 9x & -\ 3y & = -51 \\ \hline & 11x & & = -44 \end{array}$$

$x = -4$

$x = -4$ を②に代入して

$3 \times (-4) - y = -17$

$-y = -17 + 12$ $\quad -y = -5$

$\therefore y = 5$ $\quad y = 5$

よって $x = -4,\ y = 5$

(5) 与式 $= 2\sqrt{6} + \sqrt{6}$

$= 3\sqrt{6}$

※ $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6}$

$= 2\sqrt{6}$

(6) 解の公式より

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{53}}{2}$$

2.

(1)

ア：$0 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 1$

$= 0 + 5 + 12 + 9 + 8 + 5$

$= 39$冊

よって誤り

イ：最頻値は6人で2冊である。

よって誤り

ウ：

0 0 0 1 1 1 1 1 2 2　2 2 2 2 3 3 3 4 4 5

中央値 $= \frac{2+2}{2} = 2$冊

中央値は2冊なので正しい

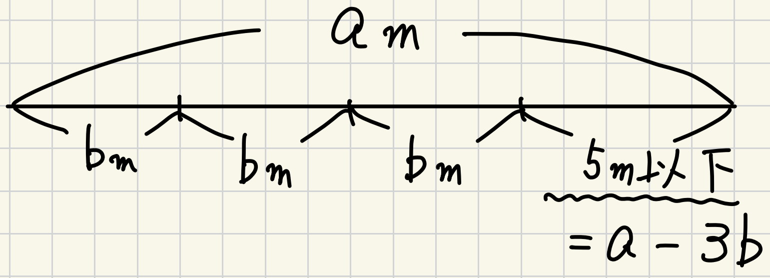
エ：20人が借りた本の冊数の平均は

$$\frac{39}{20} = 1.95\text{冊}$$

1.95冊より多く借りた生徒の人数は

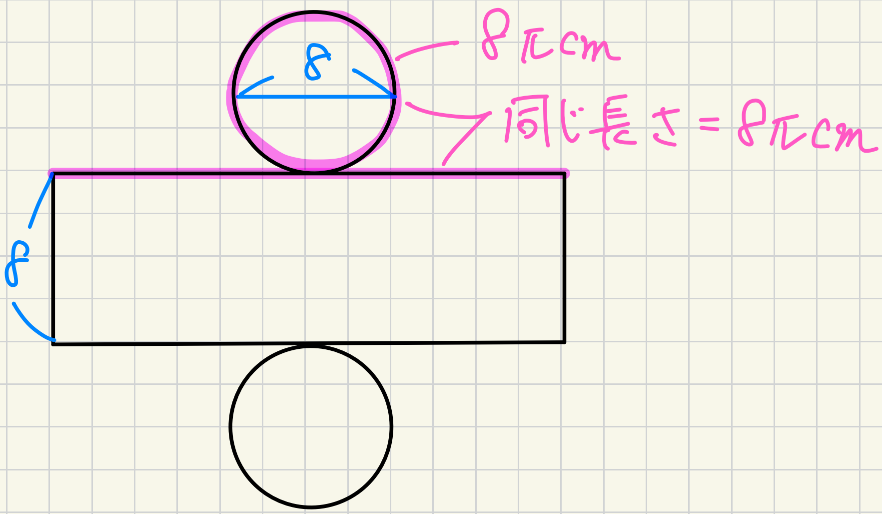
$\underbrace{6}_{2冊} + \underbrace{3}_{3冊} + \underbrace{2}_{4冊} + \underbrace{1}_{5冊} = 12$人　よって誤り

(2)



よって $\underline{a-3b \leqq 5}$

(3) 円柱の展開図は以下の通り



円柱の表面積 $= \underbrace{4}_{\text{半径}} \times \underbrace{4}_{\text{半径}} \times \pi + 8 \times 8\pi + 4 \times 4 \times \pi$

$= 16\pi + 64\pi + 16\pi$

$= \underline{96\pi \ cm^2}$

(4)

$\dfrac{a+1}{2b}$ が整数 $\Leftrightarrow$ $a+1$ が $2b$ の倍数

(i) $b=1$ のとき、$2b=2$ なので、$a+1$ は 2の倍数

$\therefore\ a+1=2, 4, 6 \iff a=1, 3, 5$ … 3通り

(ii) $b=2$ のとき $2b=4$ なので、$a+1$ は 4の倍数

$\therefore\ a+1=4 \iff a=3$ … 1通り

(iii) $b=3$ のとき $2b=6$ なので、$a+1$ は 6の倍数

$\therefore\ a+1=6 \iff a=5$ … 1通り

(iv) $b=4, 5, 6$ のとき、$2b=8, 10, 12$ であり

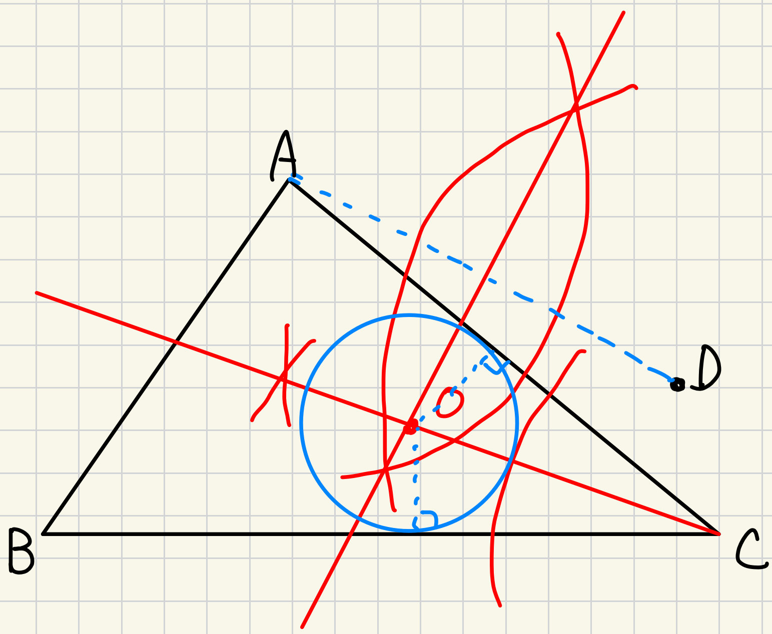
$a+1$ が $8, 10, 12$ の倍数になることはない。

さいころを2つ投げたときの出る目は $6\times6=36$通り

なので、求める確率は

$$\frac{5}{36}$$

(5)



① ADの垂直二等分線

② ∠ACBの二等分線

(⇒二等分線上とAC、BCの距離は等しい)

③ ①と②の交点がO

3.

(1) 点Aは$y=\frac{1}{2}x^2$上にあり $x=-2$なので

$$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2$$
$$=2 \qquad \therefore A(-2,2)$$

点Bは$y=\frac{1}{2}x^2$上にあり. $x=4$なので

$$y=\frac{1}{2}\times 4^2$$
$$=8 \qquad \therefore B(4,8)$$

直線ℓの式を$y=ax+b$とおくと. ℓは. A,Bを通るので

$$2=-2a+b \quad \text{——} ①$$
$$8=4a+b \quad \text{——} ②$$

①−②より

$$-6=-6a \qquad \therefore a=1$$

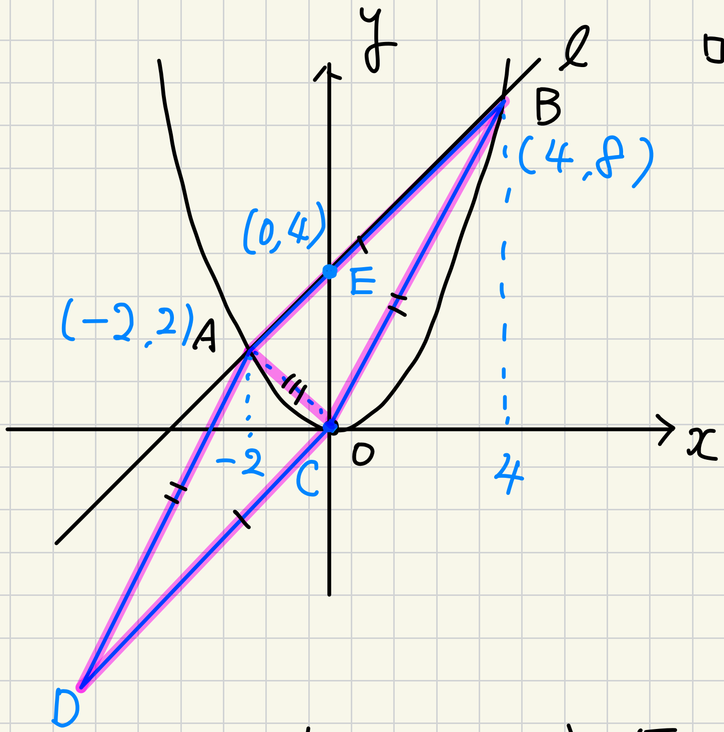
$a=1$を①に代入して

$$2=-2\times 1+b \qquad \therefore b=4$$

よって. $y=x+4$

(2)

①



□ABCD = △ABD + △ADC

□ABCDは平行四辺形なので.

△ABD = △ADC

よって. △ABDの面積を求め. 2倍すれば良い.

直線ℓとy軸の交点をEとすると.

$\triangle ABD = \triangle AOE + \triangle AOB$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 4$

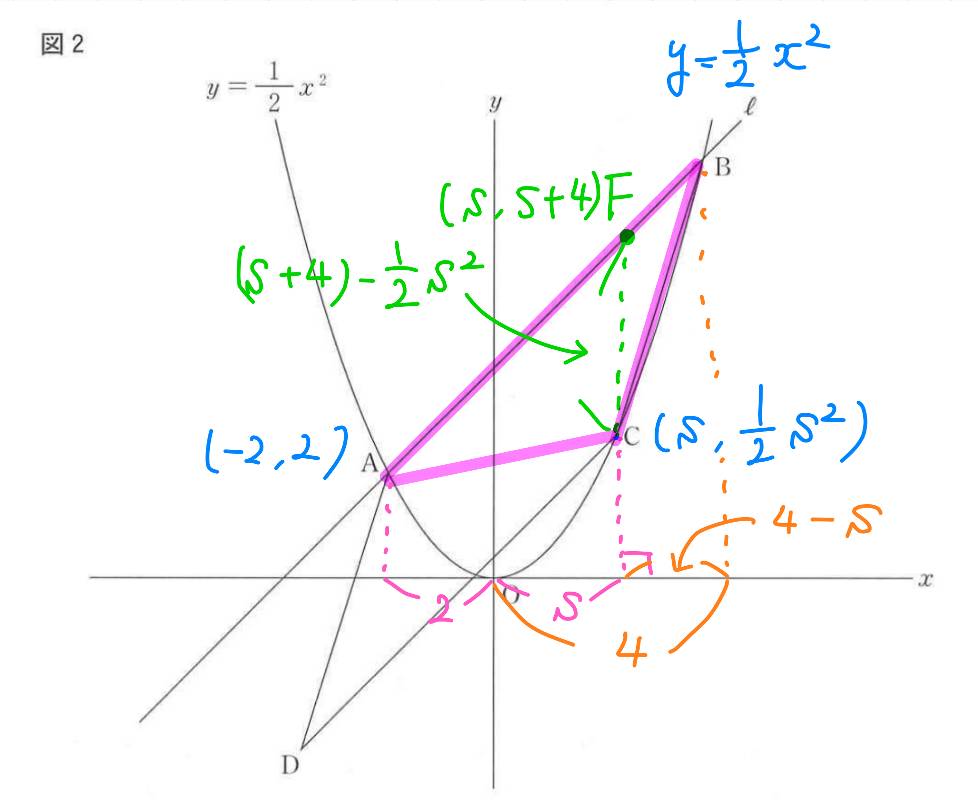
$= 4 + 8$

$= 12$

したがって. □ABCDの面積は.

$12 \times 2 = 24\ \text{cm}^2$

②



点Cのx座標をsとする。点Cは$y=\frac{1}{2}x^2$上にあり

$x=s$なので

$y=\frac{1}{2}s^2$

$\therefore$ C$(s, \frac{1}{2}s^2)$

直線ℓ上において、$x=s$の点をFとする。
(1)より直線ℓは$y=x+4$なので、点Fのy座標は、$y=s+4$となる。 $\therefore$ F$(s, s+4)$

① と同様に、□ABCDの面積は、△ABCの2倍であり、□ABCD $=15$ cm^2 なので、

$$15 = 2\triangle ABC$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{15}{2} \text{ cm}^2$$

図より

$$\triangle ABC = \triangle AFC + \triangle BFC$$

$$\frac{15}{2} = \frac{1}{2} \times \left\{(s+4)-\frac{1}{2}s^2\right\} \times (s+2)$$

$$+ \frac{1}{2} \times \left\{(s+4)-\frac{1}{2}s^2\right\} \times (4-s)$$

両辺を2倍して、式を整理すると、

$$
\begin{aligned}
15 &= \left\{(s+4)-\frac{1}{2}s^2\right\} \times (s+2) \\
&\quad + \left\{(s+4)-\frac{1}{2}s^2\right\} \times (4-s) \\
&= \left\{(s+4)-\frac{1}{2}s^2\right\}\left\{(s+2)+(4-s)\right\} \\
&= \left(-\frac{1}{2}s^2+s+4\right) \times 6 \\
&= -3s^2+6s+24
\end{aligned}
$$

よって

$$3s^2-6s-9=0$$

左辺を3でくくる

$$\Leftrightarrow 3(s^2-2s-3)=0$$

両辺を3で割る

$$\Leftrightarrow s^2-2s-3=0$$

$$\Leftrightarrow (s+1)(s-3)=0$$

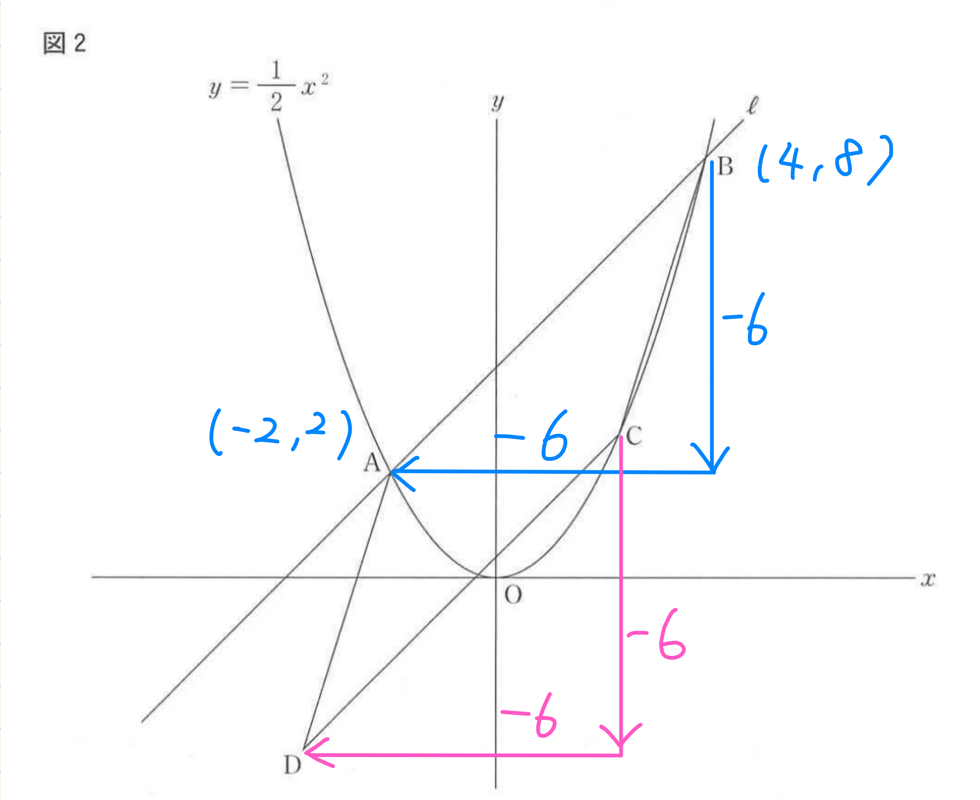
$$\therefore s=-1,\ 3$$

sは点Dのx座標であり、-2より大きく4より小さいので、$s=-1, 3$はともに条件を満たす。

また、▱ABCDは平行四辺形なので、

$$AB \parallel CD$$

よって直線ABと直線CDの傾きは等しい



B → A は 下に6
左に6 なので

C → D も 下に6
左に6 である.

(i) $s = -1$ のとき

$C\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ なので 点Dのy座標は $-\frac{11}{2}$

$C\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

−6

−6

D

$\left(-7, -\frac{11}{2}\right)$

$\frac{1}{2} - 6$

$= \frac{1}{2} - \frac{12}{2}$

$= -\frac{11}{2}$

(ii) $c = 3$ のとき.

$C\left(3, \frac{9}{2}\right)$ なので 点Dのy座標は $-\frac{3}{2}$

$C\left(3, \frac{9}{2}\right)$

−6

−6

D

$\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$

$\frac{9}{2} - 6$

$= \frac{9}{2} - \frac{12}{2}$

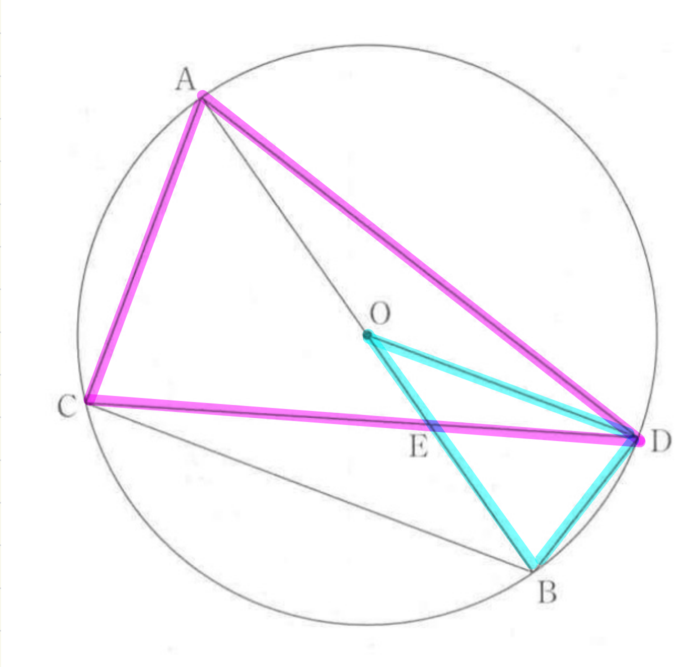
$= -\frac{3}{2}$

よって, 求める値は.

$-\frac{11}{2}$, $-\frac{3}{2}$

4.

(1)

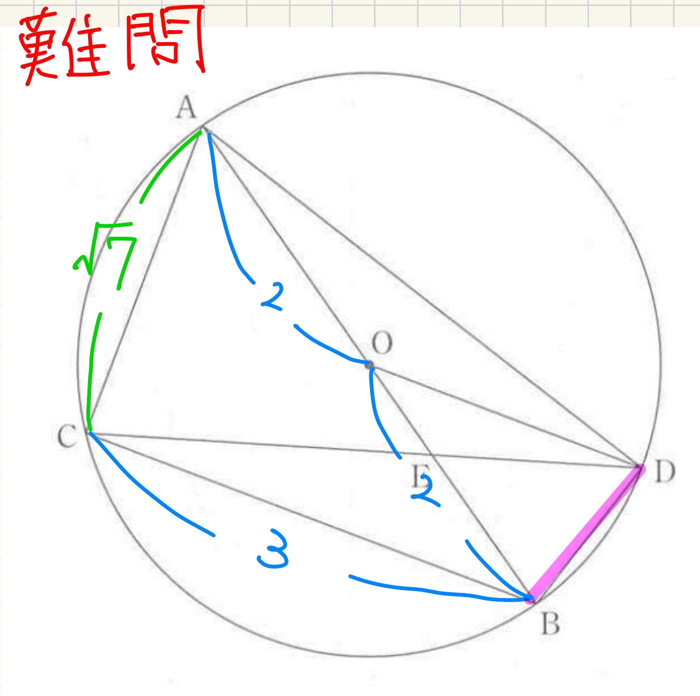


△ACDと△DBOにおいて、
$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいから
∠ACD＝∠DBO ㋐ ―― ①

平行線の錯角 ㋓ は等しいから CB // ODより
∠ABC＝∠DOB ― ②

$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角は等しいから
∠ADC＝∠ABC ―― ③
②、③より
∠ADC＝∠DOB ―― ④
①、④より2組の角がそれぞれ等しいので
△ACD ∽ △DBO (証明終わり)

(2) 難問



∠ACBは直径ABに対する円周角なので、
∠ACB＝90°
AO、BOは円の半径であり
AO＝2cmなので、
BO＝2cm
∴ AB＝4cm

△ABCで三平方の定理より

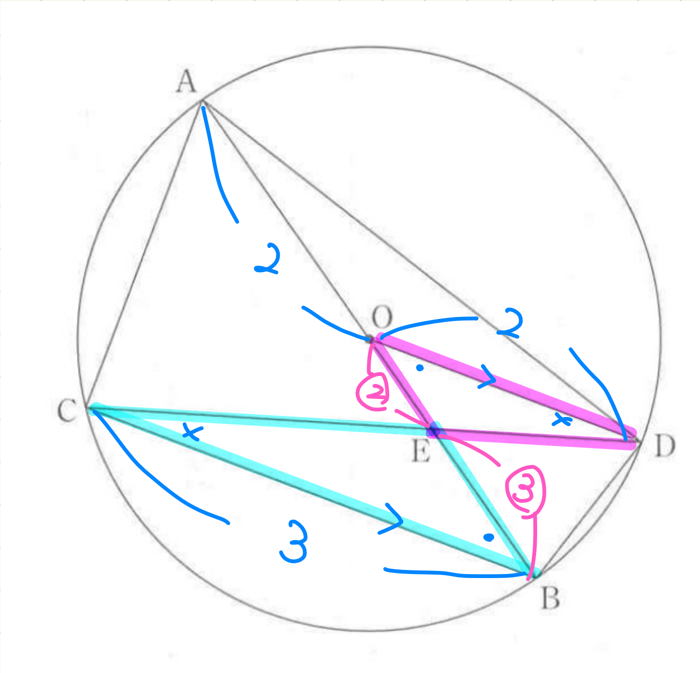
$$AC = \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{7}\ \text{cm}$$

$$= \sqrt{16 - 9}$$

$$= \sqrt{7}$$

―― ☆1



△OEDと△BECにおいて、

OD // CBより錯角は等しいので

∠ODE = ∠BCE ―①

∠EOD = ∠EBC ―②

①、②より2組の角がそれぞれ等しいので、

△OED ∽ △BEC

DOは円の半径なので、DO = 2cm

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

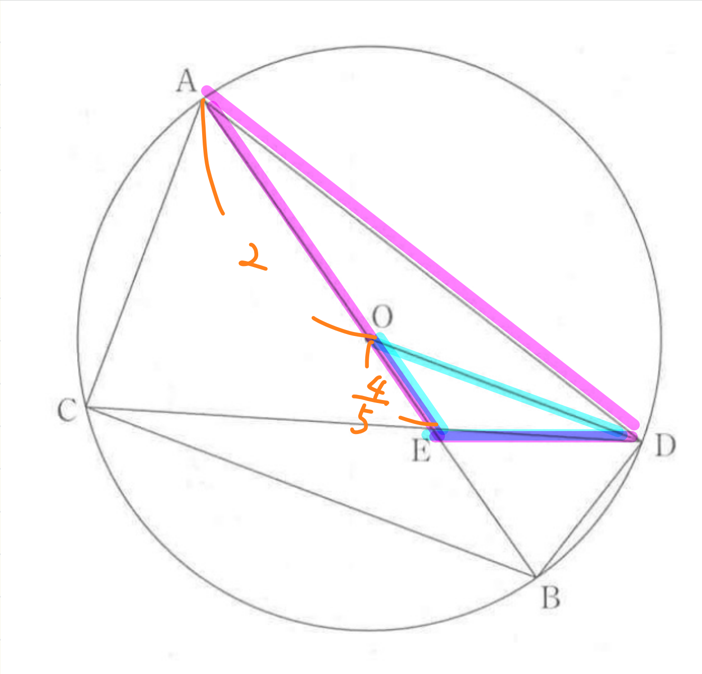
OE : BE = OD : BC

= 2 : 3

OB = 2 cm より

$$OE = 2 \times \frac{2}{2+3} = \frac{4}{5}\ \text{cm}$$

$$BE = 2 \times \frac{3}{2+3} = \frac{6}{5}\ \text{cm}$$



△AEDと△DEOにおいて、(1)より△ACD∽△DBOなので、対応する角は等しいから

$\angle ADC = \angle DOB$

$\therefore \angle ADE = \angle DOE$ —③

$\angle E$は共通 —④

③,④より2組の角がそれぞれ等しいから

△AED∽△DEO

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$AE : DE = DE : OE$

よって

$$\underbrace{AE}_{2+\frac{4}{5}=\frac{14}{5}} \times \underbrace{OE}_{\frac{4}{5}} = DE^2$$

$$\frac{14}{5} \times \frac{4}{5} = DE^2 \Rightarrow DE^2 = \frac{56}{25}$$

$DE > 0$より

$$DE = \sqrt{\frac{56}{25}}$$

$$= \frac{2\sqrt{14}}{5} \text{ cm.}$$

さらに，$\triangle AED \backsim \triangle DEO$ から

$$AE : DE = DA : OD$$

$$\therefore DA = \frac{AE \times OD}{DE}$$

$$= \underbrace{\frac{14}{5}}_{AE} \times \underbrace{2}_{OD} \div \underbrace{\frac{2\sqrt{14}}{5}}_{DE}$$

$$= \frac{14}{5} \times 2 \times \frac{5}{2\sqrt{14}}$$

$$\frac{5}{2\sqrt{14}} = \frac{5}{2\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{5\sqrt{14}}{2 \times 14}$$

$$= \frac{14 \times 2 \times 5\sqrt{14}}{5 \times 2 \times 14}$$

$$= \sqrt{14}\ \text{cm} \quad \text{☆}_2$$

(1) より $\triangle ACD \backsim \triangle DBO$ なので．

$$\underbrace{AC}_{\sqrt{7}\ ☆_1} : DB = \underbrace{AD}_{\sqrt{14}\ ☆_2} : \underbrace{DO}_{2}$$

$$\therefore \sqrt{14}\, DB = 2\sqrt{7}$$

$$DB = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{14}}$$

分子，分母を$\sqrt{7}$で割る

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2}.$$

$$= \sqrt{2}\ \text{cm}$$

5.

(1) 各段の最大の数は4の倍数となっていることから、n段目の最大の数は、nを用いて、$4n$ と表される。
㋐

したがって、n段目の最小の数は、nを用いて
$4n-3$ と表される。
㋑

表

	A列	B列	C列	D列
1段目	1	2	3	4
2段目	6	7	8	5
3段目	11	12	9	10
4段目	16	13	14	15
5段目	17	18	…	…
⋮				

-3　-3　-3　-3

○：最大
○：最小

最小＝最大－3.

(2) m段目の最小の数は $4m-3$、n段目の2番目に大きい数は $4n-1$ と表される。
この2数の和は

$$(4m-3)+(4n-1) = 4m+4n-4$$
$$= 4(m+n-1)$$

$m+n-1$ は整数であるから、$4(m+n-1)$ は4の倍数である。
したがって m段目の最小の数と n段目の2番目に大きな数の和は4の倍数となる。

(3) 難問

	A列	$\boxed{\text{B列}}$	C列	D列
1段目	1	2	3	4
2段目	6	7	8	5
3段目	11	12	9	10
4段目	16	13	14	15
5段目	17	18	19	20
6段目	22	23	24	21
7段目	27	28	25	26
8段目	32	29	30	31

○：最小

○：2番目に大きい

m段目の最小の数がB列 ⇒ $m = \underbrace{4, 8, 12, 16}_{20\text{未満}}$.

n段目の2番目に大きい数がB列 ⇒ $n = \underbrace{2, 6, 10, 14, 18}_{20\text{未満}}$

よって、m段目の最小の数は、 $= 4m - 3$

4段目 ⇒ $4 \times 4 - 3 = 13$

8段目 ⇒ $4 \times 8 - 3 = 29$

12段目 ⇒ $4 \times 12 - 3 = 45$

16段目 ⇒ $4 \times 16 - 3 = 61$.

また、n段目の2番目に大きい数は、 $= 4n - 1$

2段目 ⇒ $4 \times 2 - 1 = 7$

6段目 ⇒ $4 \times 6 - 1 = 23$

10段目 ⇒ $4 \times 10 - 1 = 39$

14段目 ⇒ $4 \times 14 - 1 = 55$

18段目 ⇒ $4 \times 18 - 1 = 71$.

以上より樹形図は以下の通り.

最小	2番目に大きい	和	12の倍数
	7	20	×
	23	36	○
13	39	52	×
	55	68	×
	71	84	○

最小	2番目に大きい	和	12の倍数
	7	36	○
	23	52	×
29	39	68	×
	55	84	○
	71	100	×

最小	2番目に大きい	和	12の倍数
	7	52	×
	23	68	×
45	39	84	○
	55	100	×
	71	116	×

最小	2番目に大きい	和	12の倍数
61	7	68	×
	23	84	○
	39	100	×
	55	116	×
	71	132	○

以上より求める組み合わせは、7通り