2021年度　栃木県

数学

KmKm

$\boxed{1}$

1. 与式 $= -3+7$

$= 4$

2. 与式 $= \dfrac{8a^3b^5}{4a^2b^3}$

$= 2ab^2$

3. $a+b^2 = 2+(-3)^2$

$= 2+9$

$= 11$

4. 与式 $= (x-4)^2$

5. $a = \dfrac{2b-c}{5}$

$\Leftrightarrow 5a = 2b-c$

$\therefore c = -5a+2b$

6.

ア：正しい

イ：$\sqrt{16}=4$ なので誤り

ウ：$\sqrt{5}+\sqrt{7}$ と $\sqrt{5+7}=\sqrt{12}$ は異なるため誤り

エ：$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = \sqrt{2}^2 + 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6} + \sqrt{6}^2$

$= 2 + 2\sqrt{12} + 6$

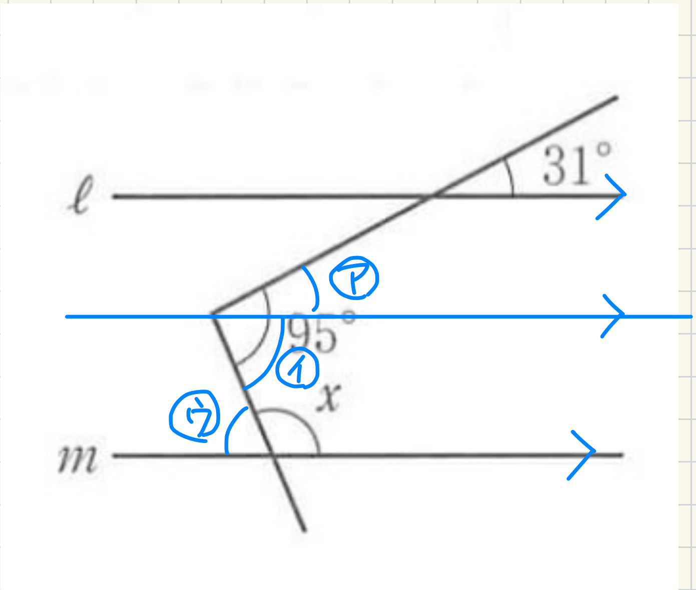
$= 8 + 4\sqrt{3}$

$\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2 = 2 + 6$

$= 8$

よって $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$ と $\sqrt{2}^2+\sqrt{6}^2$ は異なるので誤り.

7.



ア：同位角が等しいので

31°

イ：$95° - 31° = 64°$

ウ：錯角が等しいので

イ＝ウ　∴ウ＝64°

$\angle x = 180° - 64°$

$= 116°$

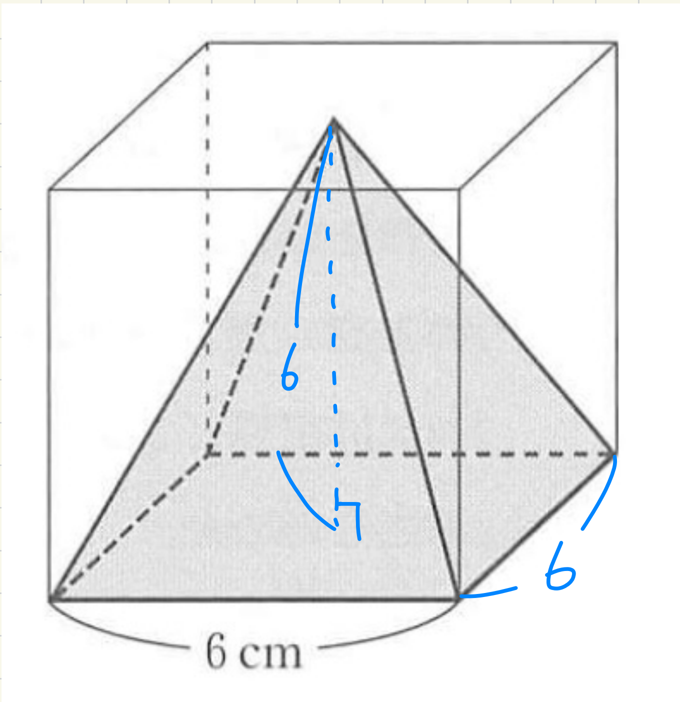
8. y が x に反比例するので $y = \frac{a}{x}$ とおく.

$x=3,\ y=6$ より

$6 = \frac{a}{3}$　　$\therefore a = 18$

よって $y = \frac{18}{x}$

9.



三角錐の体積は

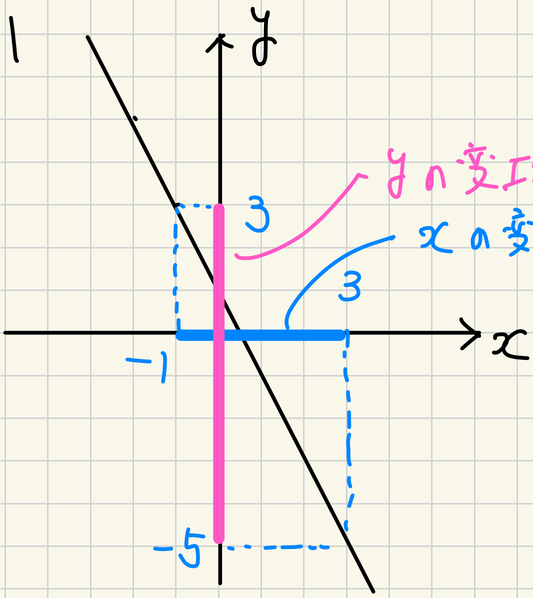
$$6 \times 6 \times 6 \times \frac{1}{3} = 72\ \text{cm}^3$$

10. 解の公式より

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

11



$x = -1$ のとき

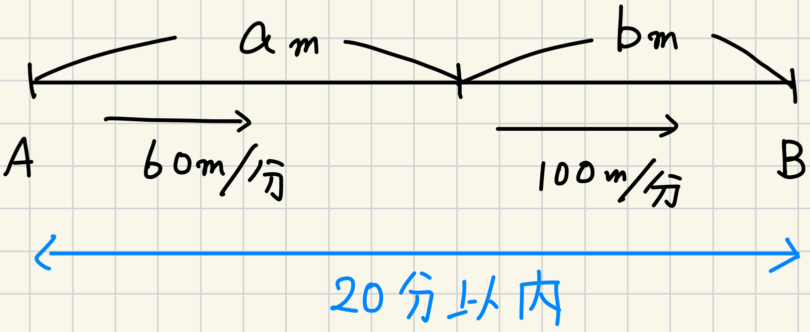
$$y = -2 \times (-1) + 1$$
$$= 3$$

$x = 3$ のとき

$$y = -2 \times 3 + 1$$
$$= -5$$

よって $-5 \leqq y \leqq 3$

12.



$$\frac{a}{60}+\frac{b}{100}\leqq 20$$

13. 相似な三角形の対応する辺の比は等しいので.

$$x:2=4:5$$

$$5x=8 \qquad \therefore x=\frac{8}{5}$$

14.

ア：AB＝ACが加わると正方形

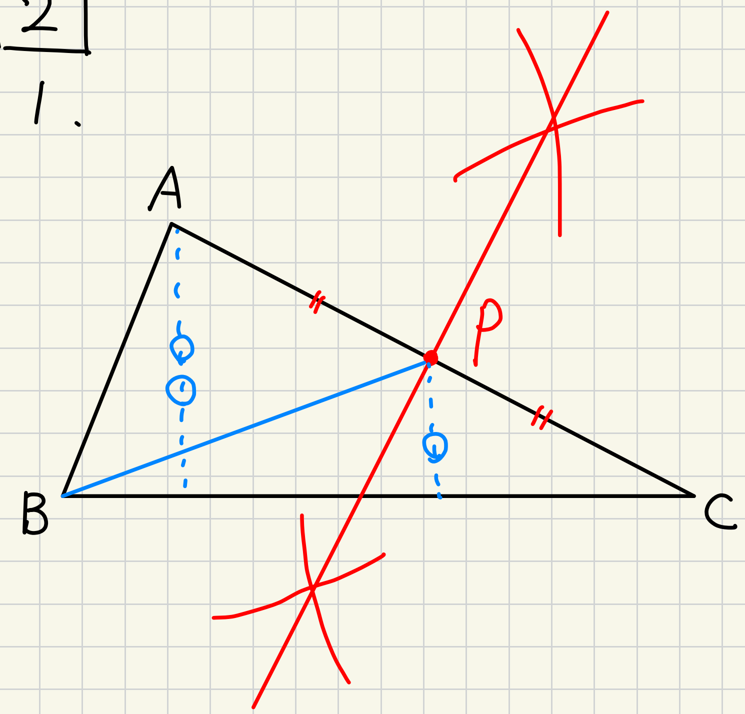
イ：AC⊥BDが加わるとひし形

ウ：AC＝BDが加わると長方形

エ：平行四辺形のまま

$\boxed{2}$

1.



ACの中点が点P

△ABCと△PBCで
底辺をBCとすると
△ABCの高さは△PBC
の高さの2倍
∴ △ABC = 2△PBC

よって

両辺から△PBCを引く

$$\underbrace{\triangle ABC - \triangle PBC}_{\triangle ABP} = \underbrace{2\triangle PBC - \triangle PBC}_{\triangle PBC}$$

∴ △ABP = △PBC

したがって、BPは△ABCを二等分にする.

2.

2つのさいころを投げるとき、出る目の総数は
$6 \times 6 = 36$通り
$a - b > 0$ より $a > b$ となれば良い.

$(a, b) = (2, 1)$
$(3, 1), (3, 2)$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3)$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$

の15通り。よって求める確率は

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

3.

① 点Aは $y=x^2$ 上にあり、$x=-2$ なので、

$y=(-2)^2=4$ $\therefore A(-2, 4)$

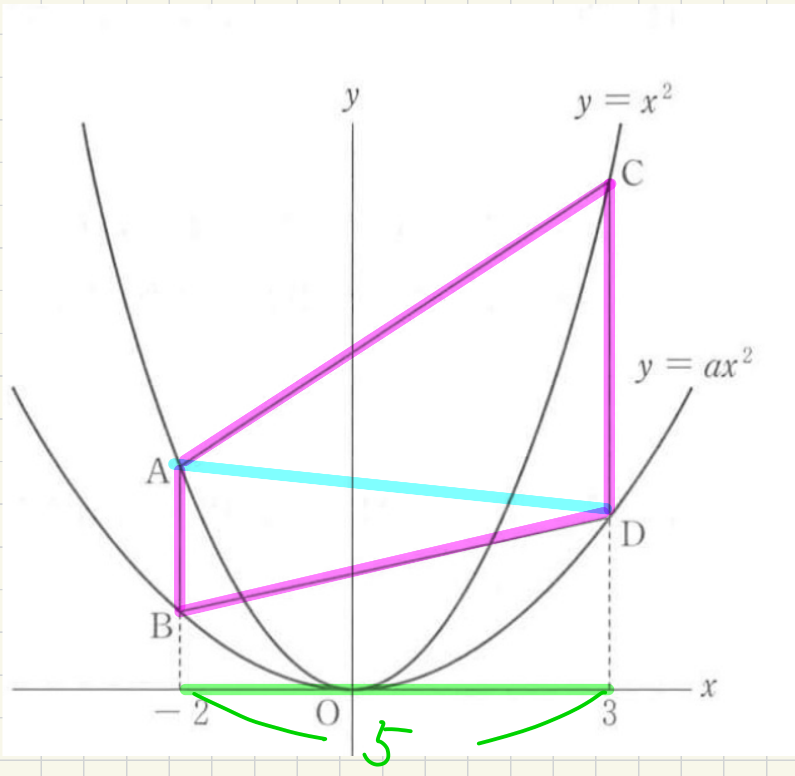
点Bは $y=ax^2$ 上にあり、$x=-2$ なので、

$y=a\times(-2)^2=4a$ $\therefore B(-2, 4a)$

よって

ABの長さ $= 4-4a$

②



□ABCDを△ABDと△ADCに分ける。

$\triangle ABD = \frac{1}{2}\times(4-4a)\times 5$

$= 5(2-2a)$

$= 10(1-a)$

点Cは $y=x^2$ 上にあり、$x=3$ なので、

$y=3^2=9$　　$\therefore C(3, 9)$

点Dは $y=ax^2$ 上にあり $x=3$ なので、

$y=a\times 3^2=9a$　　$\therefore D(3, 9a)$

よって

CDの長さ $=9-9a$

$=9(1-a)$

したがって、

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times 9(1-a)\times 5$

$=\frac{45}{2}(1-a)$

□ABCD = △ABD + △ADC で、これが26になれば良いので

$26=10(1-a)+\frac{45}{2}(1-a)$　　両辺×2

$\Leftrightarrow\ 52=20-20a+45-45a$

$\Leftrightarrow\ 65a=13$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

$0<a<1$ より $a=\frac{1}{5}$ は適する。

$\boxed{3}$

1.

$$\begin{cases} x + y = 40 & \text{—— ①} \\ 5x + 3y + 57 = 7x + 4y & \text{—— ②} \end{cases}$$

②を整理して

$$2x + y = 57 \quad \text{—— ③}$$

① − ③ より

$$x = 17$$

$x = 17$ を①に代入して

$$17 + y = 40$$

$$\therefore y = 23$$

よって 大きい袋17枚，小さい袋23枚

2.

(1) 最頻値：データ全体の中で，最も頻繁に表れる値.

3，5，7，7，8，9，9，11，~~12，12，12~~，14，16，18，20　(分)

よって 12分

(2) 5分以上10分未満の度数は 6人

3，5，7，7，8，9，9，11，12，12，12，14，16，18，20　(分)

よって，相対度数は

$$\frac{6}{15} = 0.4$$

(3)

~~3~~, 5, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 12, 14, 16, 18, ~~20~~ (分)

中央値

範囲は変わらないため、3分、20分は太郎さんのデータではない。

また、中央値が変わらないことから、

(i) 中央値より前のデータ＋5分をしても11分を超えない。

$5 + 5 = 10$分

7分、8分、9分は＋5分すると11分を超えるので適さない。

(ii) 中央値より後のデータ＋5分をしても、最大値を超えない（⇒範囲が変わらないので、＋5分しても20分が最大値）

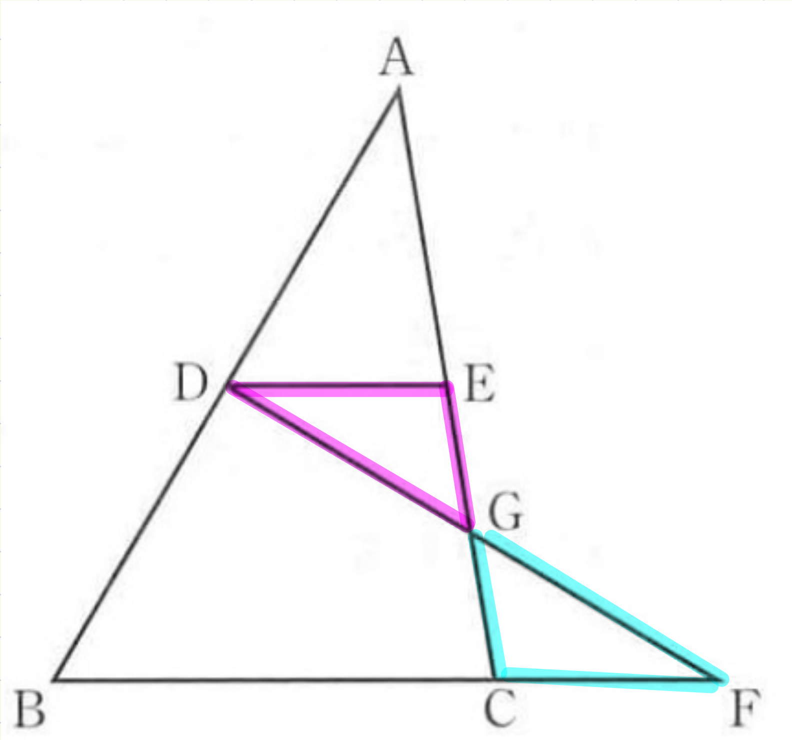
$12 + 5 = 17$分　$14 + 5 = 19$分

16分、18分、20分は＋5分すると、20分を超えるので適さない。

よって、10分、17分、19分

4

1.



△DGEと△FGCについて、

△ABCで点D, Eはそれぞれ辺AB, ACの中点であるから、中点連結定理より

DE // BC —— ①

$DE = \frac{1}{2}BC$ —— ②

①よりDE // BFだから、錯角は等しいので

∠GED = ∠GCF —— ③

∠EDG = ∠CFG —— ④

また、BC : CF = 2 : 1より

$CF = \frac{1}{2}BC$ —— ⑤

②, ⑤より

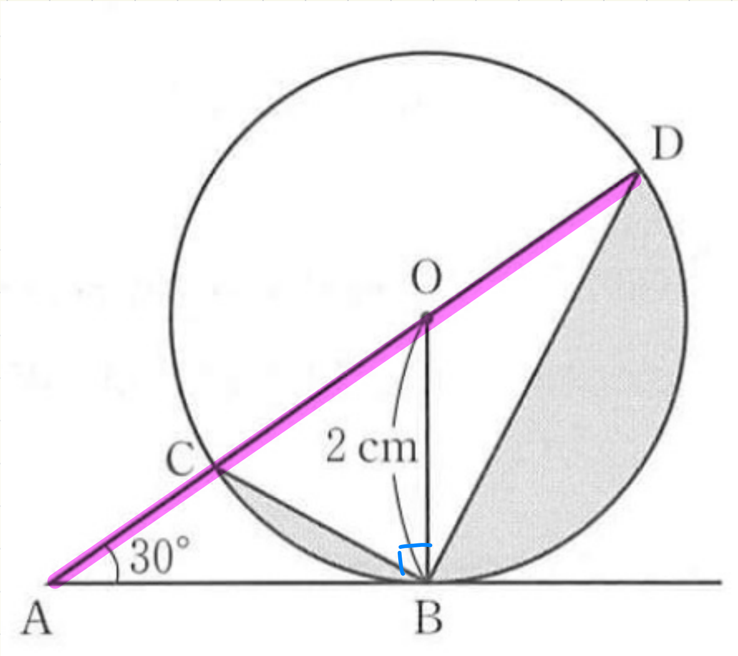
DE = CF —— ⑥

③, ④, ⑥より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△DGE ≡ △FGC (証明終わり)

2.

(1)



接線と円は垂直なので.
∠ABO = 90°
よって、△OABは、30°-60°-90°の直角三角形なので.
OB : OA : AB = 1 : 2 : $\sqrt{3}$

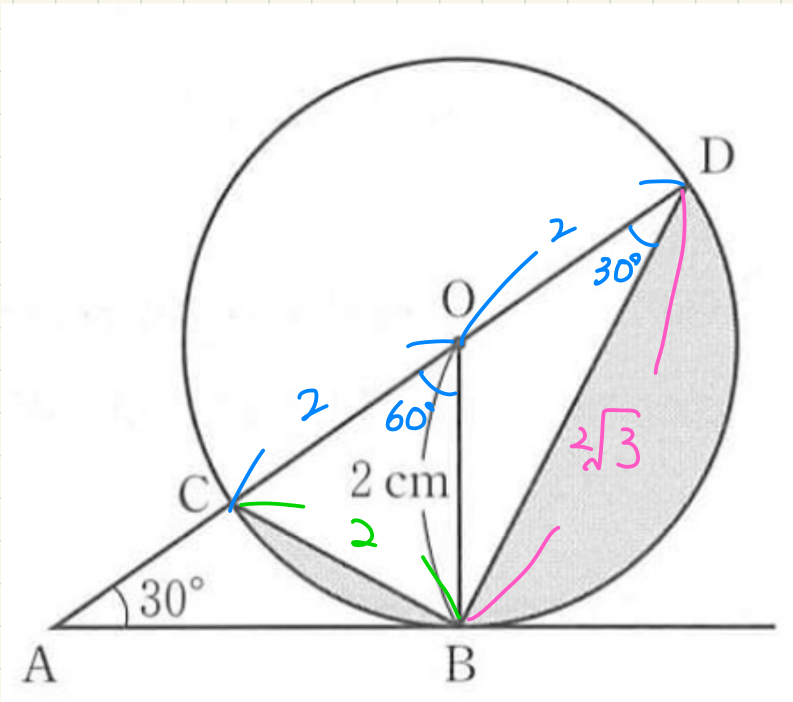
∴ $\underbrace{OB}_{2}$: OA = 1 : 2

∴ OA = 4 cm

ODは円の半径なので、OB = OD ∴ OD = 2cm

よって AD = 4 + 2 = 6 cm

(2)



$\overset{\frown}{BC}$ に対して.
∠BOC : 中心角
∠BDC : 円周角

より
$\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BOC$

$= \frac{1}{2} \times 60°$

$= 30°$

半径に対する円周角は90°なので.

$\angle CBD = 90°$

よって. △BDCは. 30°−60°−90°の直角三角形なので.

$BC : CD : BD = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$\therefore BC : \underbrace{CD}_{4} = 1 : 2 \Rightarrow 2BC = 4$

$\therefore BC = 2$

$\underbrace{BC}_{2} : BD = 1 : \sqrt{3} \Rightarrow BD = 2\sqrt{3}$

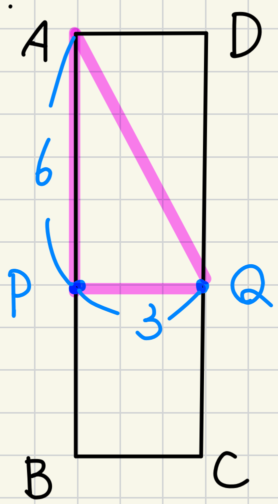
$\text{求める面積} = \text{半円} - \triangle BDC$

$= 2 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} - 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$

$= 2\pi - 2\sqrt{3}$ cm²

$\boxed{5}$

1.



$\triangle APQ = \frac{1}{2} \times 3 \times 6$

$= 9$ cm²

2.

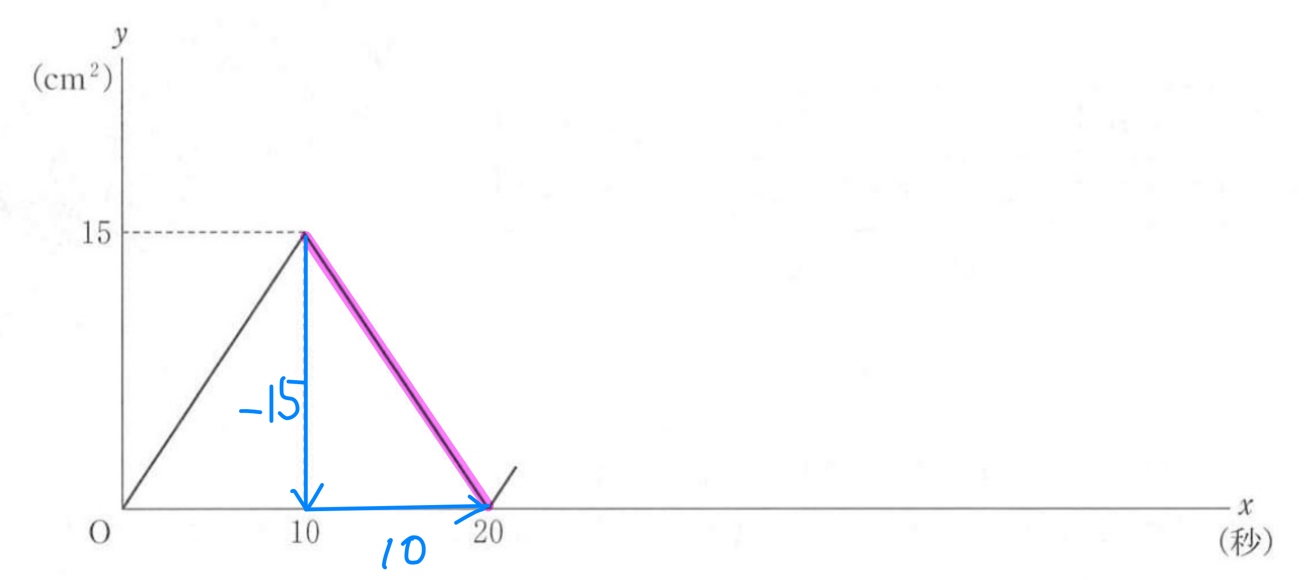


図 2

$10 \leqq x \leqq 20$ のときのグラフの式を $y=ax+b$ とおく。1次関数では、傾き＝変化の割合なので、

$$a = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

$$= \frac{0-15}{20-10}$$

$$= -\frac{15}{10}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

よって、$y=-\frac{3}{2}x+b$ で、$(20, 0)$ を通るので、

$$0 = -\frac{3}{2} \times 20 + b$$

$$0 = -30 + b \quad \therefore b = 30$$

よって、$y = -\frac{3}{2}x + 30$

3

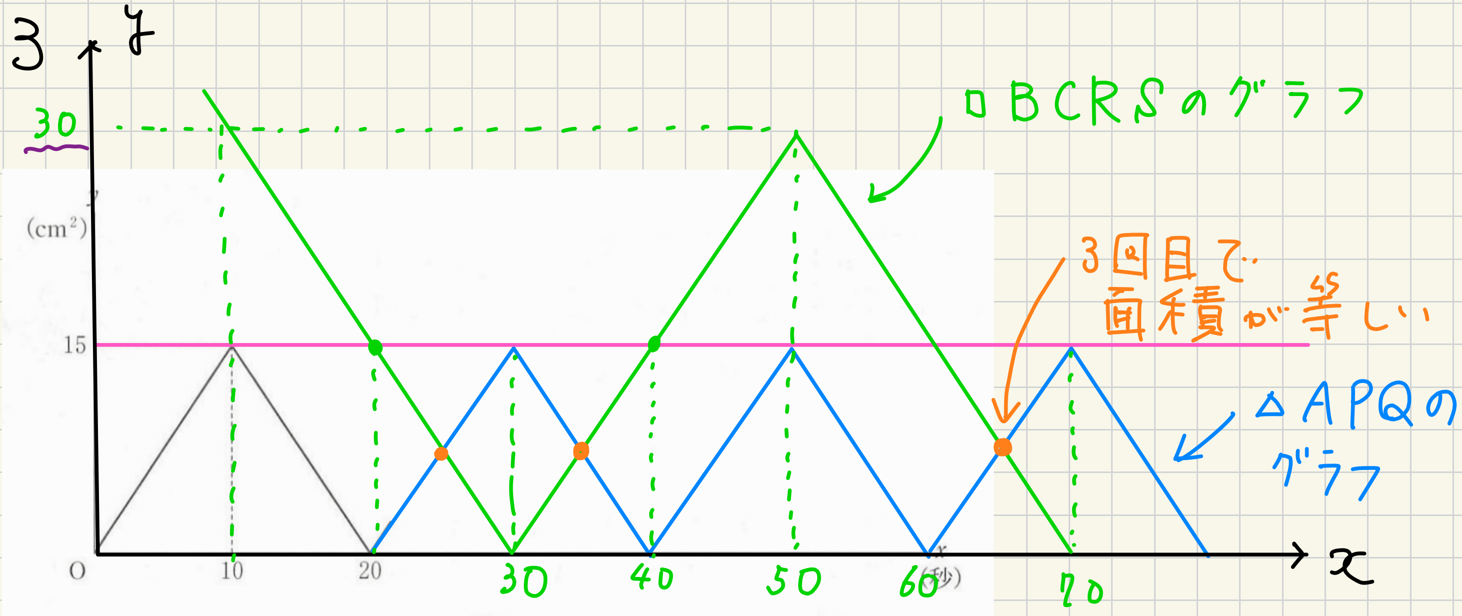
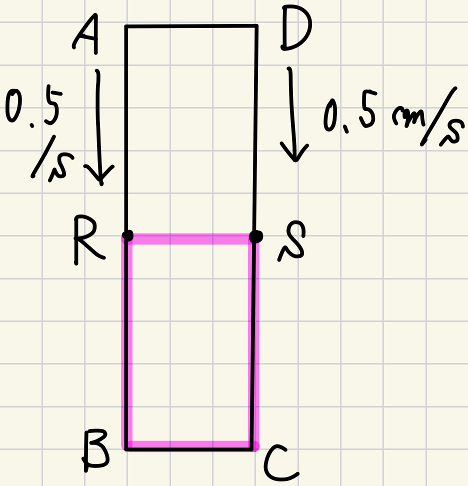


図2



点R, Sは $x = 10$のときに動き出す

⇒ $x=10$のとき、点R. Sは、点A, Dにいるので、□BCSRの面積は、

$10 \times 3 = 30 \text{ cm}^2$

点R. Sは、毎秒0.5 cmで進むので、

□BCSRがはじめて□ABCDの半分となるのは、20秒のとき。(R, Sが動きはじめて10秒のとき)

□BCSRがはじめて0となるのは、30秒のときである。(R, Sが動きはじめて20秒のとき)

30秒を超えると、□BCSRの面積は再び増加しはじめ、次に□ABCDの半分となるのは、40秒のときである。(R, Sが動きはじめて30秒のとき)

よって、グラフは上記の通りとなる。

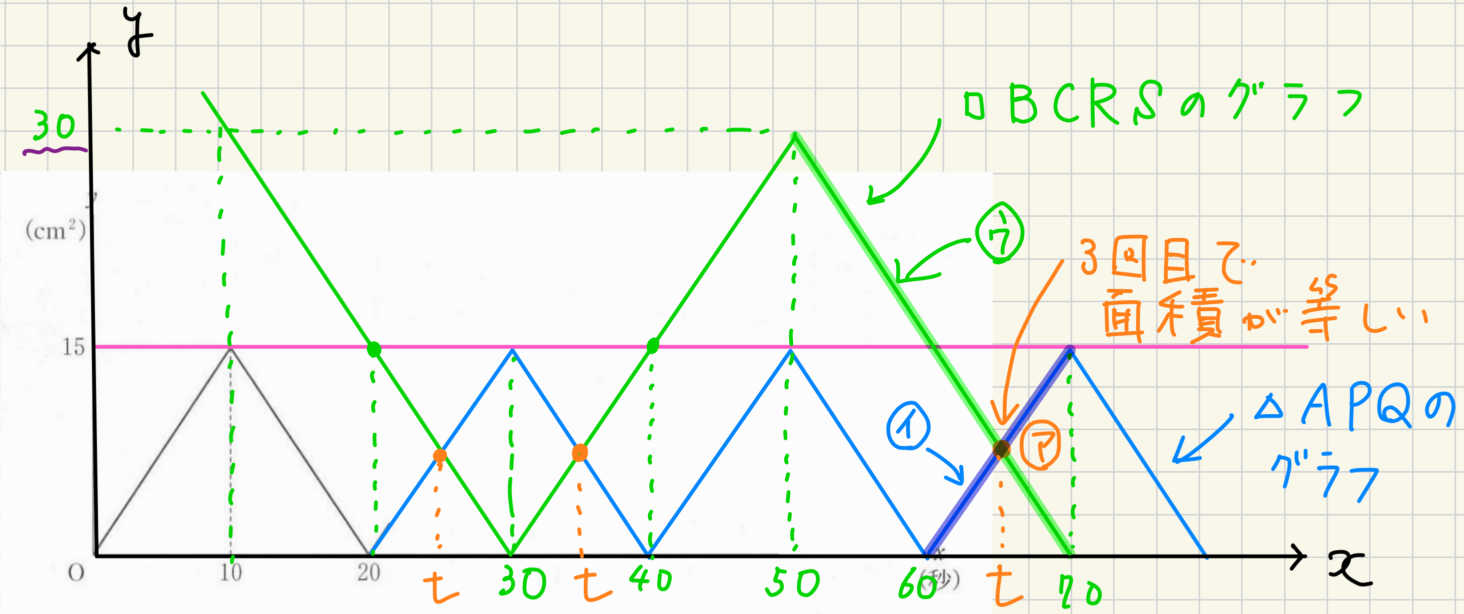


図 2

よって㋐の交点を求めれば良い.

㋑のグラフを $y=ax+b$ とおくと. $(60, 0)$, $(70, 15)$ を通るので.

$$\begin{array}{rl} 0 = 60a+b & —① \\ -)\ 15 = 70a+b & —② \\ \hline -15 = -10a & \end{array}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$a=\frac{3}{2}$ を①に代入して.

$$0 = 60 \times \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = -90.$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x - 90$$

㋒のグラフを $y = mx + n$ とおくと. $(50, 30)$, $(70, 0)$ を通るので.

$$\begin{array}{rl} 30 = 50a+b & —③ \\ -)\ 0 = 70a+b & —④ \\ \hline 30 = -20a & \end{array}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

$a = -\frac{3}{2}$ を④に代入して.

$$0 = 70 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + b$$

$$\therefore b = 105$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x + 105$$

アはイとウの交点なので‥

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 90 & —⑤ \\ y = -\frac{3}{2}x + 105 & —⑥ \end{cases}$$

⑤を⑥に代入して

$$\frac{3}{2}x - 90 = -\frac{3}{2}x + 105$$

$$3x = 195$$

$$x = 65$$

よって、求める値は65

$\boxed{6}$

1

[作り方I]

1	2	5	6	9	10	13	14	17	18	21	22	25	27
3	4	7	8	11	12	15	16	19	20	23	24	26	28
1枚目		2枚目		3枚目		4枚目		5枚目		6枚目		7枚目	

[作り方II]

1	26	2	27	3	28	4	29	5	30	6	31	7	32
51	76	52	77	53	78	54	79	55	80	56	81	57	82
1枚目		2枚目		3枚目		4枚目		5枚目		6枚目		7枚目	

よって

[作り方Ⅰ] 28　　　[作り方Ⅱ] 82

2.

+25　+50　+75

1	26
51	76

1枚目

……

+25　+50　+75

a	b
c	d

x枚目

x枚目のとき．$a=x$，$b=x+25$，$c=x+50$．
$d=x+75$ と表せる．

$a+2b+3c+4d=ac$ に代入して．

$$\underbrace{x}_{a}+\underbrace{2(x+25)}_{2b}+\underbrace{3(x+50)}_{3c}+\underbrace{4(x+75)}_{4d}=\underbrace{x}_{a}\underbrace{(x+50)}_{c}$$

式を整理して

$$x+2x+50+3x+150+4x+300=x^2+50x$$

$$x^2+40x-500=0$$

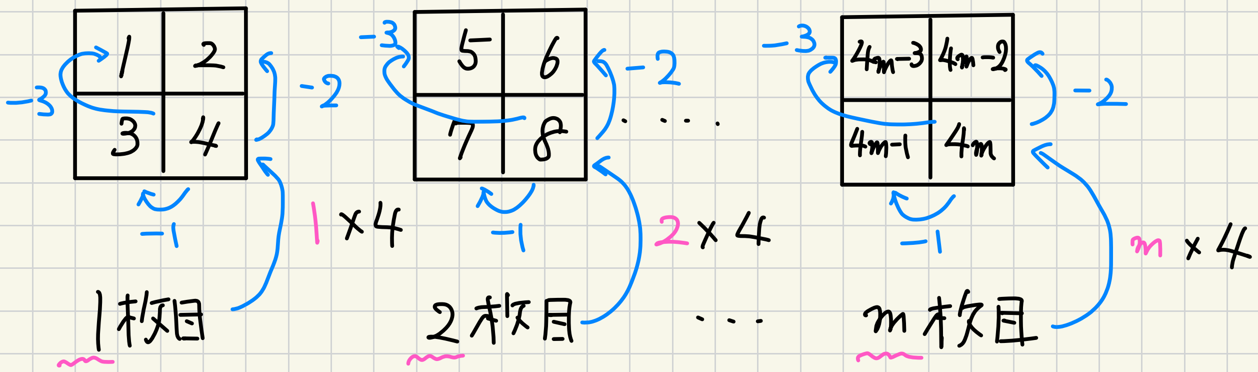
$$\therefore (x+50)(x-10)=0$$

$$x=-50,\ 10$$

xは正の整数だから $x=10$

3. 難問

[作り方Ⅰ]



①

[作り方Ⅰ] の m 枚目の 4つの数の和は

$4m+4m-1+4m-2+4m-3$

$=16m-6$

[作り方Ⅱ] の n 枚目の4つの数の和は. 2. より

$n+n+25+n+50+n+75$

$=4n+150$

これらの和が等しくなるとき

$16m-6=4n+150$

$4n=16m-156$

$n=4m-39$

② $1 \leqq m \leqq 25$, $1 \leqq n \leqq 25$ である。また ① より

m が 1減ると, n は 4減る ☆

・$n=25$ のとき

$25=4m-39$

$$4m = 64$$

$$m = 16$$

$$\therefore (m, n) = (16, 25)$$

☆より

-1 -1 -1

$(m, n) = (16, 25), (15, 21), (14, 17), (13, 13)$

-4 -4 -4

$(m, n) = (13, 13)$ は $m < n$ に反する。

よって

$$n = 17, 21, 25$$