2021年度　神奈川県

数学

Kn Kn

問1

(ア) 与式 $= -9+5$

$= -4$ 2

(イ) 与式 $= -\frac{10}{12} - \frac{9}{12}$

$= -\frac{19}{12}$ 1

(ウ) 与式 $= \frac{8ab^2 \times 3a}{6a^2b}$

$= 4b$ 3

(エ) 与式 $= \frac{3(3x+2y) - 5(x-3y)}{15}$

$= \frac{9x+6y-5x+15y}{15}$

$= \frac{4x+21y}{15}$ 3

(オ) 与式 $= 2^2 - \sqrt{7}^2 + 6\sqrt{7} + 12$

$= 4 - 7 + 6\sqrt{7} + 12$

$= 9 + 6\sqrt{7}$ 4

問 2

(ア) 与式 $= x^2+12x+36-5x-30-24$

$= x^2+7x-18$

$= (x-2)(x+9)$ 4

(別解)

$A = x+6$ とおくと、

与式 $= A^2-5A-24$

$= (A-8)(A+3)$

$= (x+6-8)(x+6+3)$

$= (x-2)(x+9)$ 4

(イ) 解の公式より

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$

$$= \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$ 2

(ウ) $y=ax^2$ において、x が p から q まで変化するとき、変化の割合は $a(p+q)$ で表される。

よって、$y=ax^2$ において、x が 1 から 4 まで変化したとき、変化の割合は、$a(1+4)=5a$ であり、これが -3 なので

$5a=-3$ $\therefore a = -\frac{3}{5}$ 2

(エ) $15x + 9y \geqq 200$ 1

注 以上：$\geqq$, ～より大きい：$>$

以下：$\leqq$, ～未満：$<$

(オ) 540を素因数分解すると.

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

$\sqrt{\dfrac{540}{n}}$ が自然数 ⇔ $\sqrt{}$ の中が平方数

$\sqrt{\bigcirc^2}$ の形になる.

よって.

$$\frac{540}{n} = \frac{2^2 \times 3^3 \times 5}{n}$$

が平方数になれば良いから.

$$n = 3 \times 5 = 15$$ 3

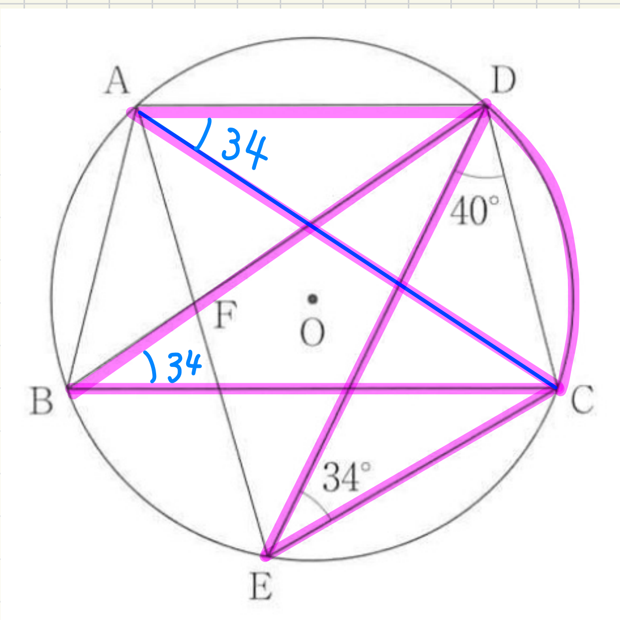
$$\frac{2^2 \times 3^3 \times 5}{3 \times 5}$$

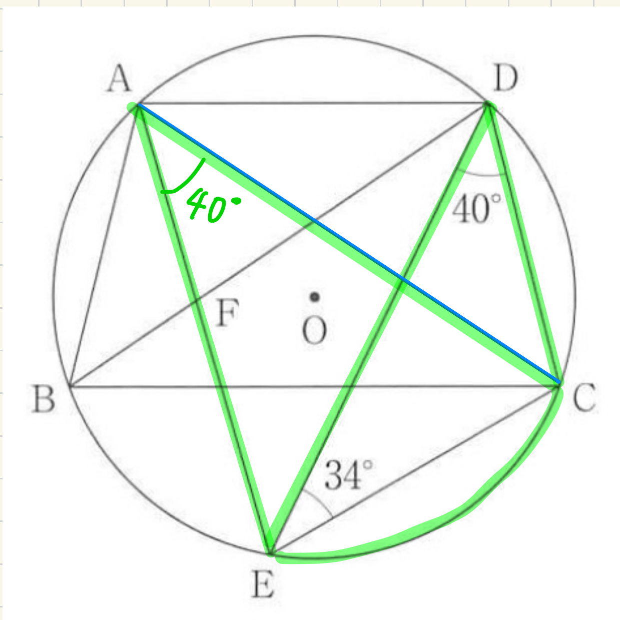
$$= 2^2 \times 3^2$$

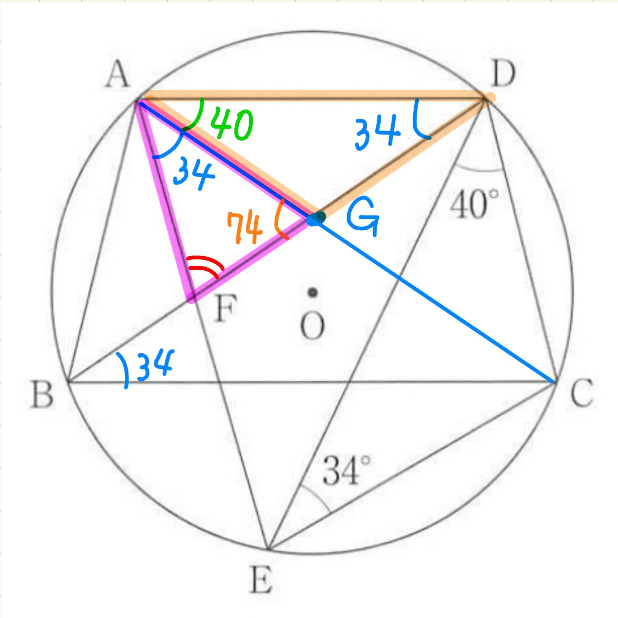
$$= (2 \times 3)^2$$

$\bigcirc^2$ の形

(カ)







$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角は等しい

$\therefore \underbrace{\angle DEC = \angle DBC = \angle CAD}_{34^\circ}$

$\overset{\frown}{CE}$ に対する円周角は等しい

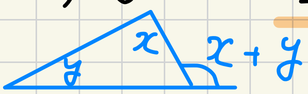
$\therefore \underbrace{\angle EDC = \angle EAC}_{40^\circ}$

$AD \parallel BC$ より錯角が等しいので

$\underbrace{\angle DBC = \angle BDA}_{34^\circ}$

BD と AC の交点を G とすると、$\triangle AGD$ で

外角の定理より



$\angle AGF = 40 + 34$

$= 74^\circ$

$\triangle AGF$ の内角の和は 180° なので

$34 + 74 + \angle AFG = 180$

$\therefore \angle AFG = 180 - 108$

$= 72^\circ$

よって

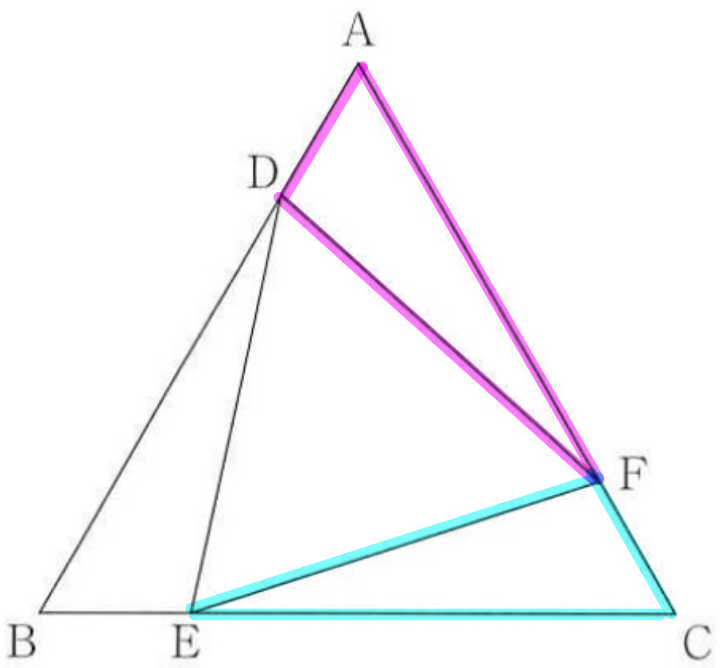
$\angle AFD = 72^\circ$ //

問 3

(ア)

(i)

図 1



$\triangle ADF$ と $\triangle CFE$ において、

まず、仮定より

$$AD = BE = CF \quad — ①$$

よって

$$AD = CF \quad — ②$$

次に $\triangle ABC$ は正三角形であるから、

$$\angle BAC = \angle ACB$$

よって

$$\angle DAF = \angle FCE \quad — ③$$

さらに、$\triangle ABC$ は正三角形であるから、

$$AB = BC = CA \quad — ④$$

①、④ より

$$AF = \underset{\underset{AB}{\shortparallel}}{CA} - \underset{\underset{AD}{\shortparallel}}{CF}{}_{4} = AB - AD \quad — ⑤$$

$$CE = \underset{\underset{AB}{\shortparallel}}{BC} - \underset{\underset{AD}{\shortparallel}}{BE} = AB - AD \quad — ⑥$$

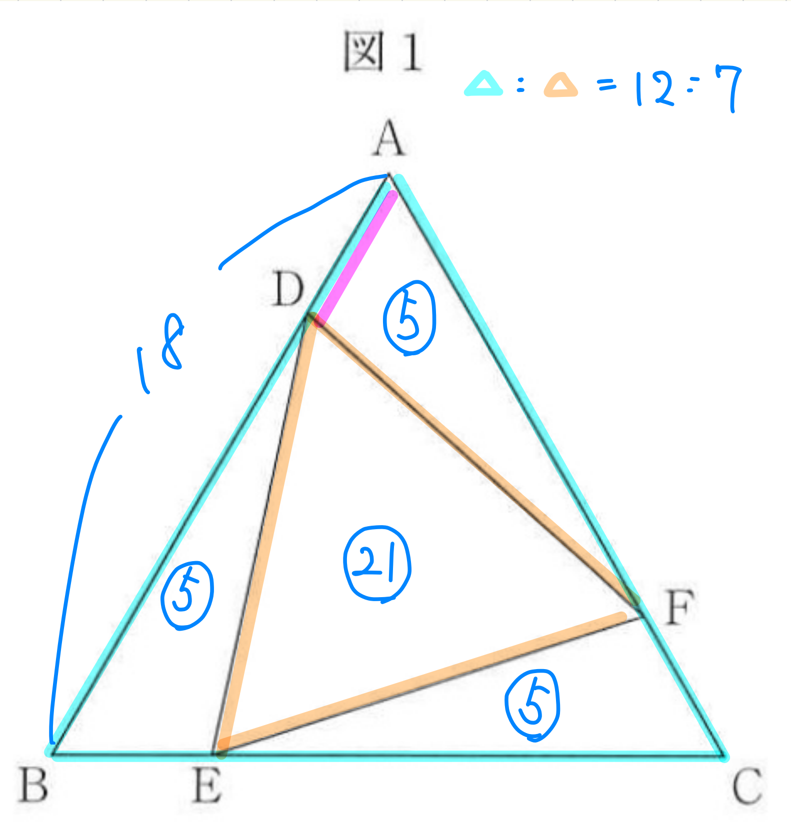
⑤、⑥ より

$$AF = CE \quad — ⑦$$

②, ③, ⑦ より 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから[2]

$\triangle ADF \equiv \triangle CFE$ （証明終わり）

(ii) 難問



対称性から、

$\triangle ADF \equiv \triangle BED \equiv \triangle CFE$

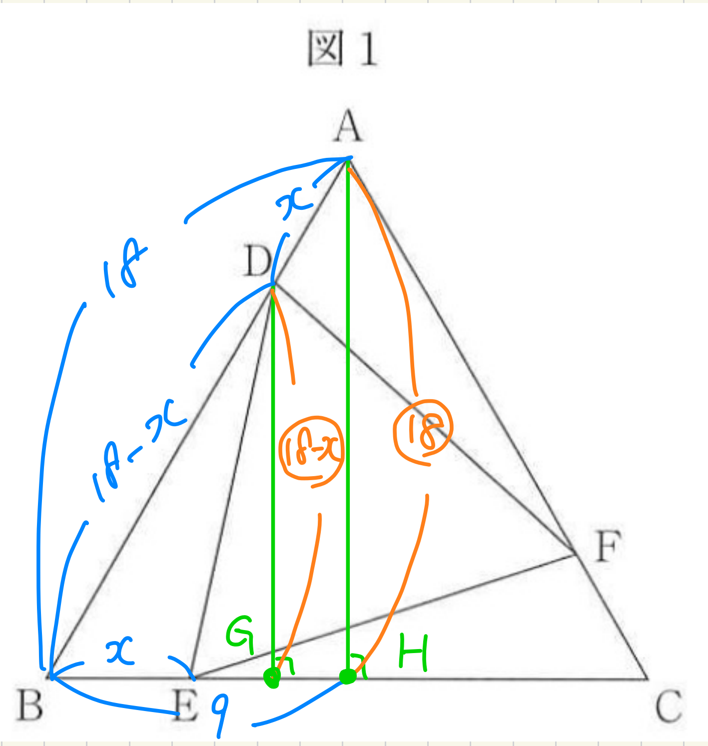
$\triangle ABC$ の面積を⑫、$\triangle DEF$ の面積を⑦と書くこととすると

$$\triangle ADF = \frac{⑫ - ⑦}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \triangle ADF : \triangle DEF : \triangle ABC = \frac{5}{3} : 7 : 21$$

×3

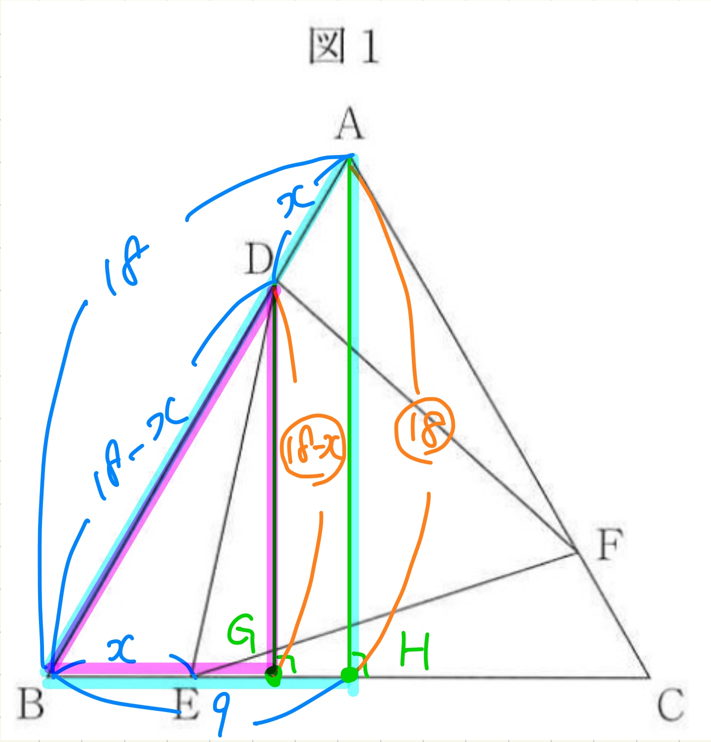
$$= 5 : 21 : 36$$



辺 $AD = x$ とおくと、

$DB = 18 - x$, $BE = x$.

点Dから辺BCに垂線を下ろした足をG、点Aから辺BCに垂線を下ろした足をHとする。



$\triangle DBG$ と $\triangle ABH$ において，$DG \parallel AH$ より同位角が等しいから

$\angle BGD = \angle BHA$ — ①

$\angle BDG = \angle BAH$ — ②

①，② より 2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle DBG \sim \triangle ABH$

対応する辺の比は等しいから

$$DG : AH = BD : BA$$
$$= 18 - x : 18$$

ここで $\triangle ABH$ で三平方の定理より

$$AH = \sqrt{18^2 - 9^2}$$
$$= 9\sqrt{3}$$

$= \sqrt{324 - 81}$

$= \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$

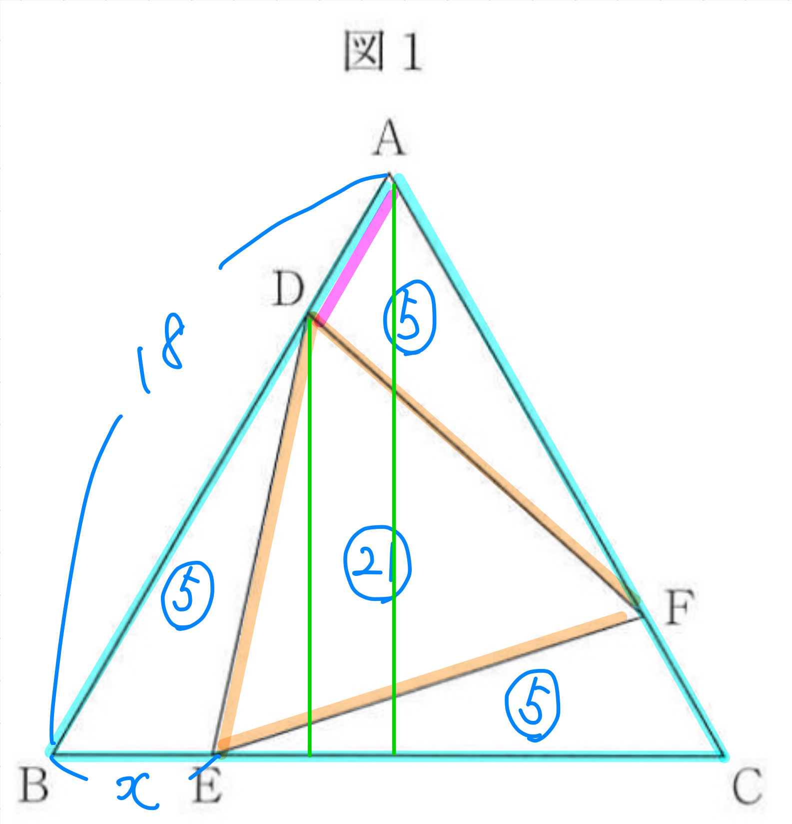
よって

$$DG : 9\sqrt{3} = 18 - x : 18$$

$$18DG = 9\sqrt{3}(18 - x)$$

$$\therefore DG = \frac{9\sqrt{3}(18 - x)}{18}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(18 - x)}{2}$$



よって

$$\triangle DBE = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}(18-x)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}x(18-x)}{4}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 18 \times 9\sqrt{3}$$

$$= 81\sqrt{3}$$

$\triangle DBE : \triangle ABC = 5 : 36$ より

$$\frac{\sqrt{3}x(18-x)}{4} : 81\sqrt{3} = 5 : 36$$

式を整理して

$$\sqrt{3}x(18-x) : 324 = 5 : 36$$

$$x(18-x) : 324 = 5 : 36$$

$$36x(18-x) = 5 \times 324$$

両辺 ÷ 36

$$x(18-x) = 5 \times 9$$

$$x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$(x-3)(x-15) = 0$$

よって

$x = 3, 15$

AD < BD より $x = 3$. よって AD = 3 cm

(1)

あ：中央値：相対度数の和が 0.50 を超える階級値

A : $\underset{0\sim5}{0.01} + \underset{5\sim10}{0.02} + \underset{10\sim15}{0.09} + \underset{15\sim20}{0.21} + \underset{20\sim25}{0.24} = 0.57$

ここまでの和は 0.33 なので. 0.50 を超えない.

⇒ A 中学校の中央値の階級は 20 ~ 25 で. 階級値は.

$$\frac{20+25}{2} = 22.5$$

B : $\underset{0\sim5}{0} + \underset{5\sim10}{0.04} + \underset{10\sim15}{0.12} + \underset{15\sim20}{0.22} + \underset{20\sim25}{0.24} = 0.62$

ここまでの和は. 0.38 なので 0.50 を超えない.

⇒ B 中学校の中央値の階級は 20 ~ 25 で. 階級値は.

$$\frac{20+25}{2} = 22.5$$

よって正しい

い：

A：$\underbrace{\underset{0\sim5}{0.01} + \underset{5\sim10}{0.02} + \underset{10\sim15}{0.09} + \underset{15\sim20}{0.21}}_{\text{20m未満}} = 0.33$

B：$\underbrace{\underset{0\sim5}{0} + \underset{5\sim10}{0.04} + \underset{10\sim15}{0.12} + \underset{15\sim20}{0.22}}_{\text{20m未満}} = 0.38$

よって、A中学校の方が小さいので誤り。

う：

A：20〜25の相対度数は、0.24。
生徒数は100人なので、20〜25の生徒数は、

$0.24 \times 100 = 24$人

B：20〜25の相対度数は、0.24
生徒数は150人なので、20〜25の生徒数は、

$0.24 \times 150 = 36$人

よって、B中学校の方が多いので正しい

え：

Aの30m以上の相対度数は、

$\underbrace{0.15}_{30\sim35} + \underbrace{0.02}_{35\sim40} = 0.17$

Aの25〜30の相対度数は、

0.26

よって、A中学校では、25〜30の生徒数が多い。

Bの30m以上の相対度数は、

$\underbrace{0.16}_{30\sim35} + \underbrace{0.04}_{35\sim40} = 0.20$

Bの25〜30の相対度数は、

0.18

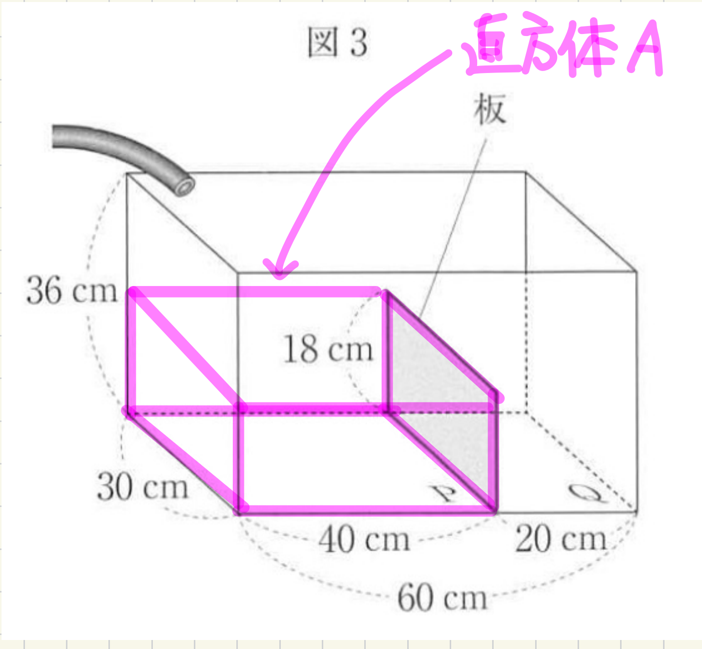
よって、B中学校では、30m以上の生徒数が多い。

よって誤り。

以上より答えは、あ、う　2

(ウ)

(i)



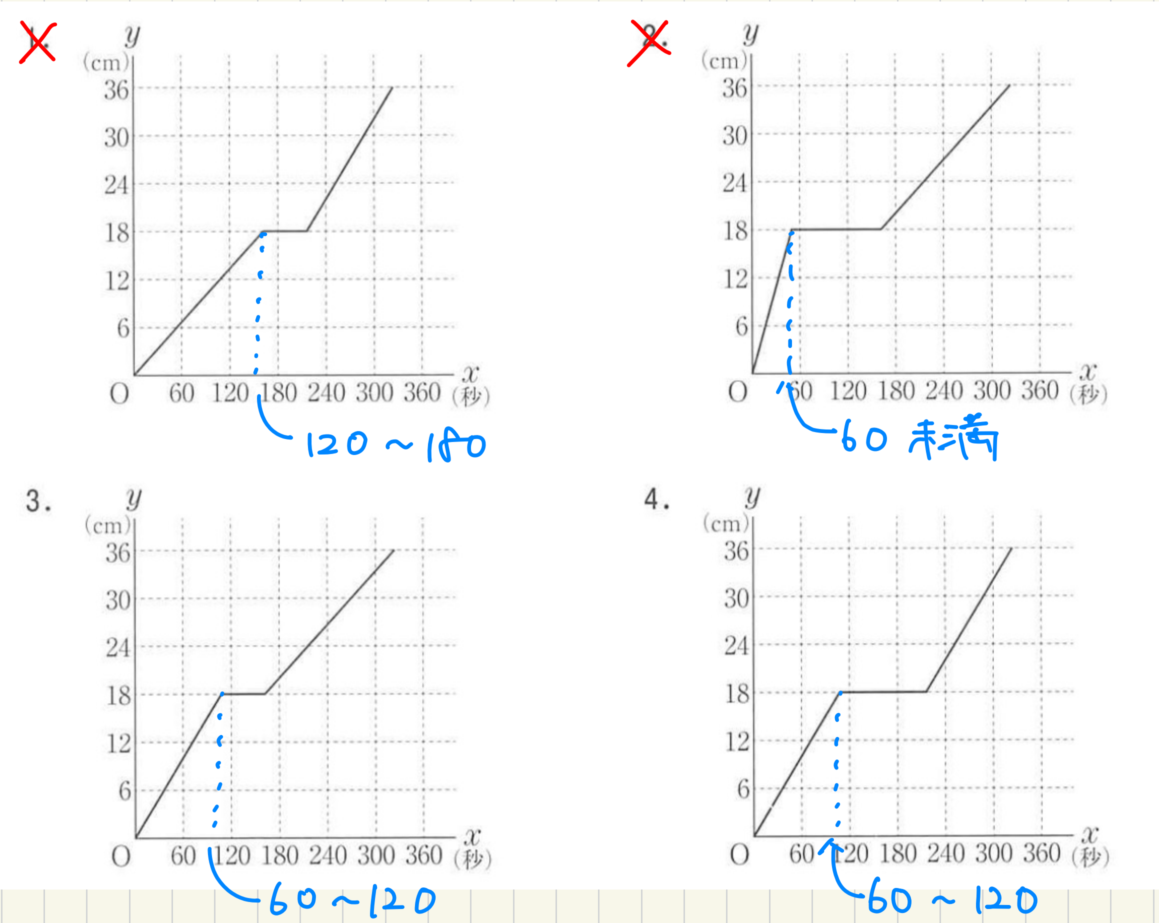
左図の直方体Aの体積は、

$30 \times 40 \times 18 = 21600 cm^3$

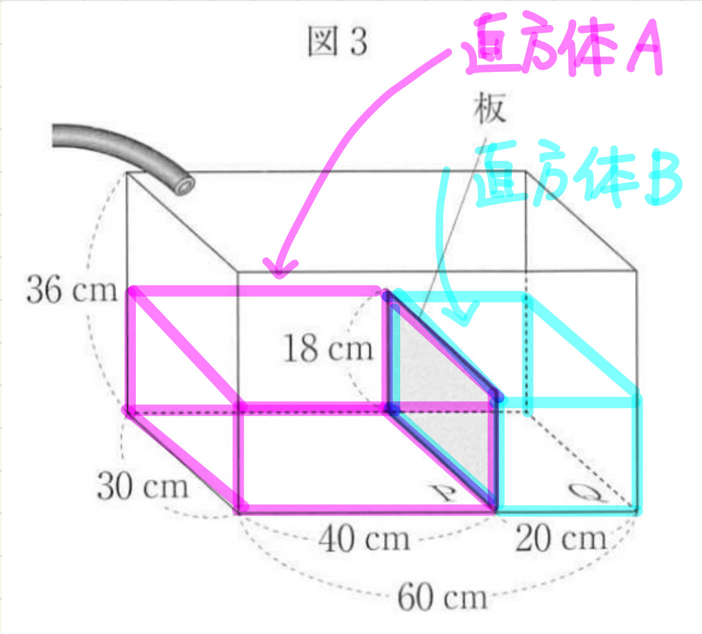
毎秒 $200 cm^3$ ずつ水を入れるので、直方体Aに水が満タンとなる時間は、

$21600 \div 200 = 108$

(ii) 水を入れはじめてから108秒までは水面の高さが一定の割合で高くなる。



よって、グラフ1、2は誤り。



直方体Aが満タンになった後、直方体Bの方へ水が流れる。

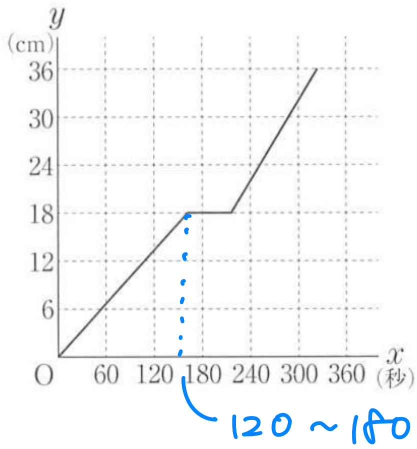
直方体Bの体積は

$30 \times 20 \times 18 = 10800\text{cm}^3$

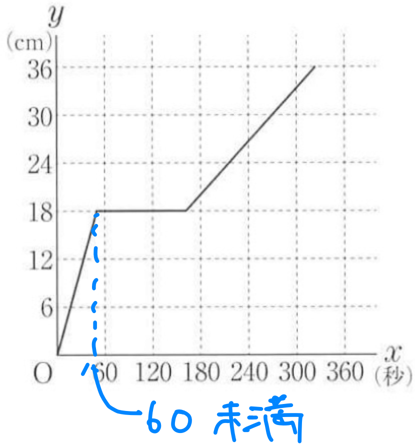
毎秒 200cm^3 ずつ水を入れるので、直方体Bに水が満タンとなる時間は

$10800 \div 200 = 54$ 秒

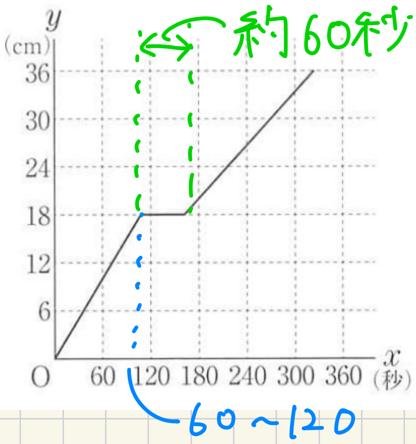
1.



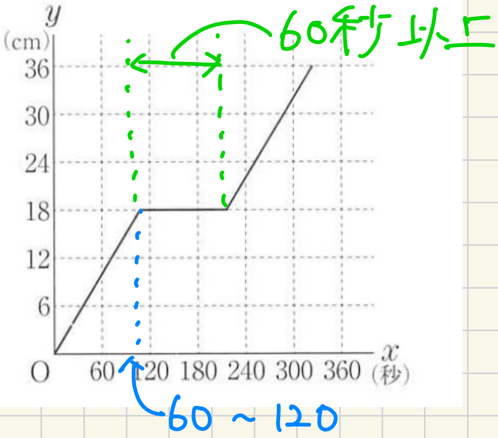
2.



3.



4.



よって、答えは 3

(エ)

(i) 今週の利用者は、先週に比べ

大人が1割増加 $\longrightarrow$ 増加した人数は $\frac{1}{10}x$

子どもが3割増加 $\longrightarrow$ 増加した人数は $\frac{3}{10}y$

これらの合計が92人なので、

$$\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y = 92$$

(ii)

$$\begin{cases} x + y = 580 & \text{——①} \\ \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y = 92 & \text{——②} \end{cases}$$

① − ② ×10 より

$$\begin{array}{rrcl} & x + y & = & 580 \\ -) & x + 3y & = & 920 \\ \hline & -2y & = & -340 \\ & y & = & 170 \end{array}$$

$y = 170$ を ① に代入して

$$x + 170 = 580$$

$$\therefore \ x = 410$$

よって、先週の大人の利用者数は 410人

(iii) 今週の大人の利用者数は、先週に比べて1割増加したので

$$\underbrace{410 + \frac{1}{10} \times 410}_{} = 410 + 41$$

$$= 451人$$

$$\underbrace{\frac{1}{10} \times 410}_{増加人数}$$

よって今週の大人の利用者数は 451人

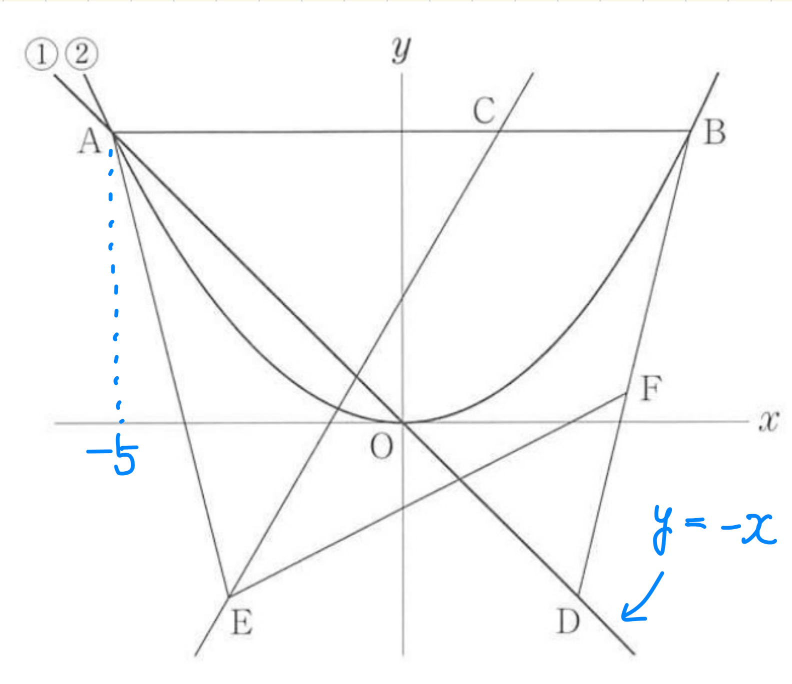
(別解)

$$410 \times \left(1 + \frac{1}{10}\right) = 410 \times \frac{11}{10}$$

$$= 451$$

問4

(ア)



点Aは $y=-x$ 上にあり

$x=-5$ なので

$y=-(-5)=5$

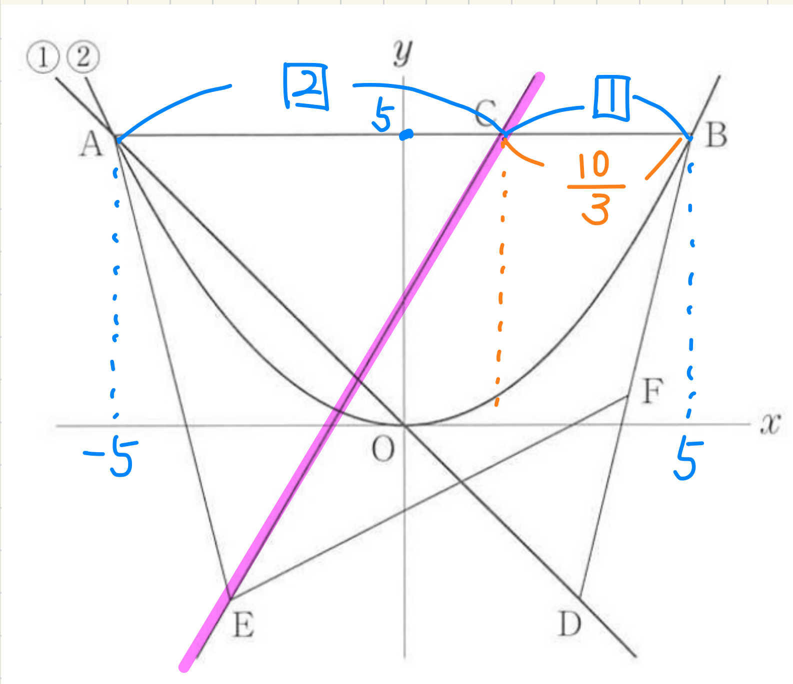
$\therefore A(-5, 5)$

また、点Aは $y=ax^2$ 上にあり、$A(-5,5)$ なので、

$5=a\times(-5)^2$

$\therefore 25a=5$ $\quad$ $a=\frac{1}{5}$ 4

(イ)



点Bは点Aとy軸について対称なので、点Bのx座標は5。よって

$AB=5-(-5)$

$=10$

$AC:CB=2:1$ より

$CB=10\times\frac{1}{2+1}$

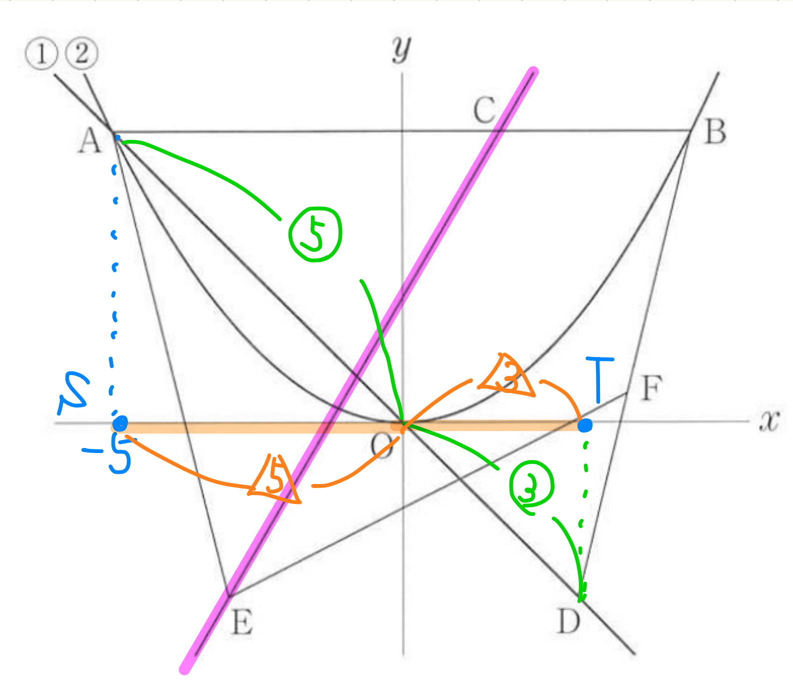
$=10\times\frac{1}{3}$

$=\frac{10}{3}$

よって、点 C の x 座標は

$$5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$$

$\therefore$ C$\left(\frac{5}{3}, 5\right)$



点 A から x 軸に垂線を下ろした足を S

点 D から x 軸に垂線を下ろした足を T

とする。

△OAS と △ODT で、

∠AOS = ∠DOT ── ①

(対頂角)

∠ASO = ∠DTO = 90° ── ②

①, ② より 2組の角がそれぞれ等しいので

△OAS ∽ △ODT

対応する辺の比は等しいから

OS : OT = OA : OD

= 5 : 3

OS = 5 より OT = 3

よって、点 D の x 座標は 3

点 D は $y = -x$ 上にあり、$x = 3$ なので、

$y = -3$

$\therefore$ D$(3, -3)$

点Eは点Dとy軸について対称なので、

$E(-3, -3)$

よって、直線CEの式：$y = mx + n$ について、

$C\left(\frac{5}{3}, 5\right)$、$E(-3, -3)$ を通るので、

$$5 = \frac{5}{3}m + n \quad \text{—— ①}$$

$$-)\ -3 = -3m + n \quad \text{—— ②}$$

$$8 = \frac{14}{3}m$$

$$m = \overset{4}{\cancel{8}} \times \frac{3}{\underset{7}{\cancel{14}}} = \frac{12}{7}$$

$$\therefore m = \frac{12}{7}$$

(i) 4

$m = \frac{12}{7}$ を②に代入して、

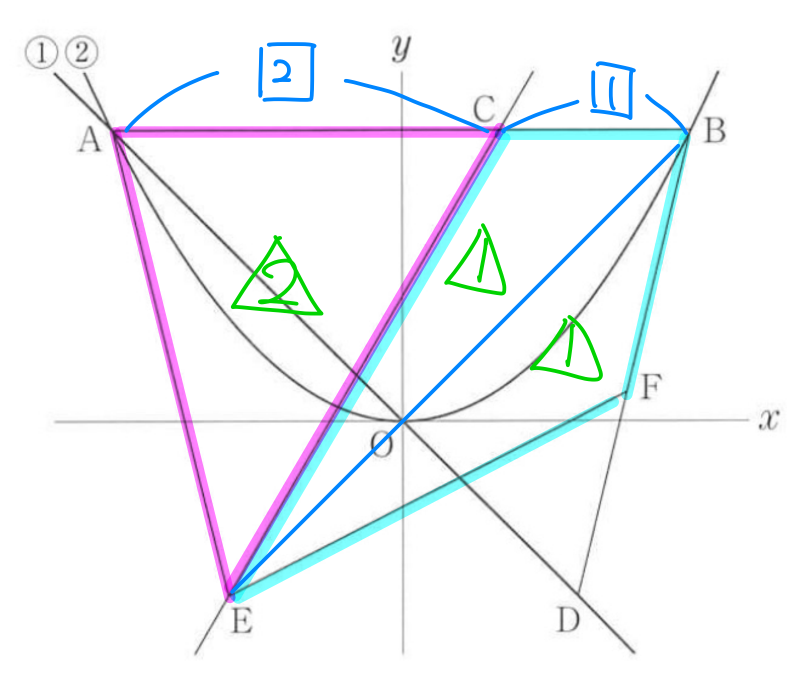
$$-3 = -3 \times \frac{12}{7} + n$$

$$\therefore n = -3 + \frac{36}{7}$$

$$= \frac{15}{7}$$

(ii) 6.

(ウ) 難問



△AEC と △CEB において、底辺をそれぞれ AC, CB とすると高さは等しいから △AEC と △CEB の面積比は底辺比と等しい。

AC : CB = 2 : 1 より

△AEC : △CEB = 2 : 1

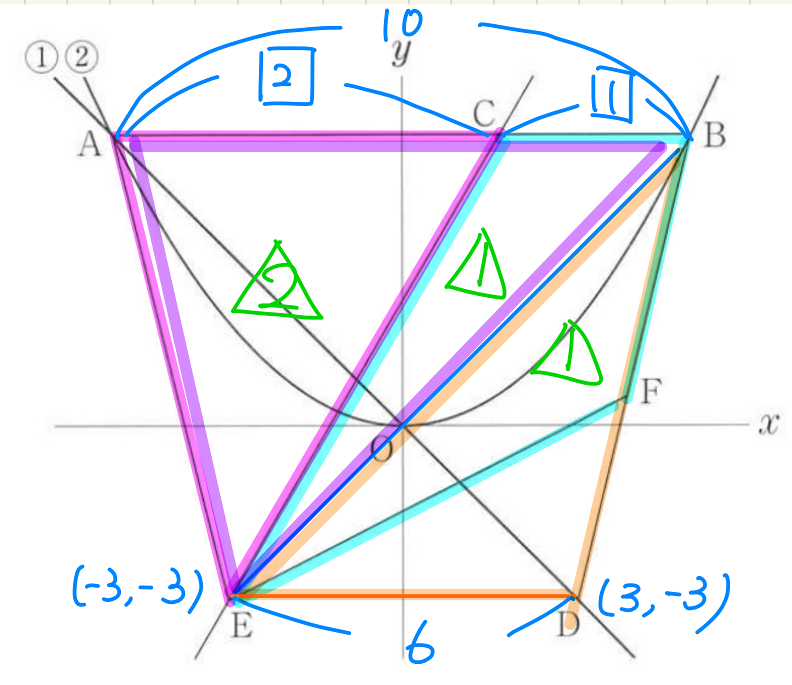
△AEC = △2, △CEB = △1 と表すと、△ACE と □BCEF の面積は等しいから

□BCEF = △2

よって、

$$\triangle BEF = \underset{\triangle 2}{\square BCEF} - \underset{\triangle 1}{\triangle CEB}$$

$= \triangle 1$



ED に補助線を引く。

E(-3, -3), D(3, -3) より

ED = 3 − (−3)
= 6

また、A(−5, 5), B(5, 5) より

AB = 5 − (−5) = 10

$\triangle AEB$と$\triangle BED$において底辺をそれぞれ
AB, EDとすると、$AB \parallel ED$より高さが等しいので
$\triangle AEB$と$\triangle BED$の面積比は底辺比と等しい。
よって

$$
\begin{aligned}
\triangle AEB : \triangle BED &= AB : ED \\
&= 10 : 6 \\
&= 5 : 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle AEB &= \triangle AEC + \triangle CEB \\
&= \triangle 2 + \triangle 1 \\
&= \triangle 3
\end{aligned}
$$

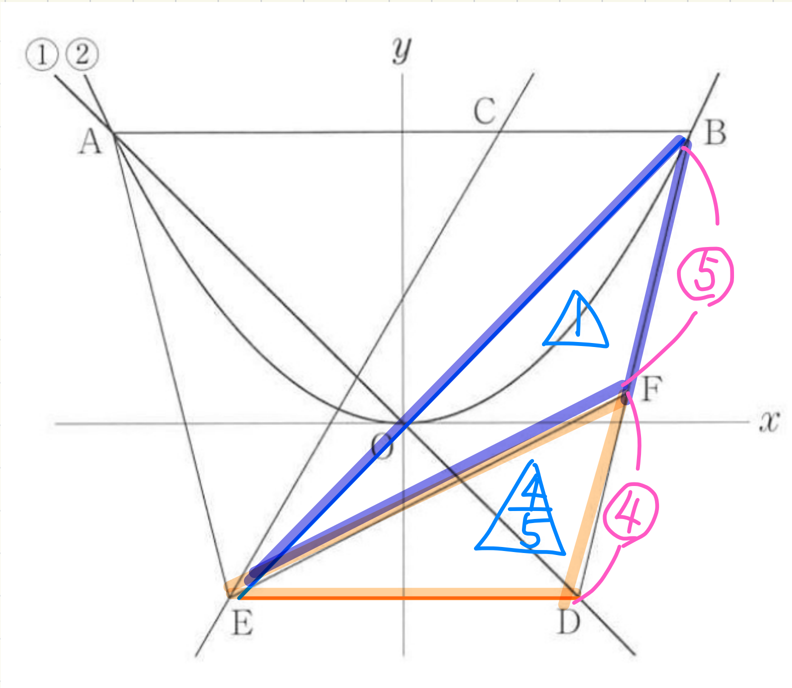
より

$$\triangle 3 : \triangle BED = 5 : 3$$

$$\therefore \triangle BED = \triangle \frac{9}{5}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\triangle FED &= \triangle BED - \triangle BEF \\
&= \triangle \frac{9}{5} - \triangle 1 \\
&= \triangle \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

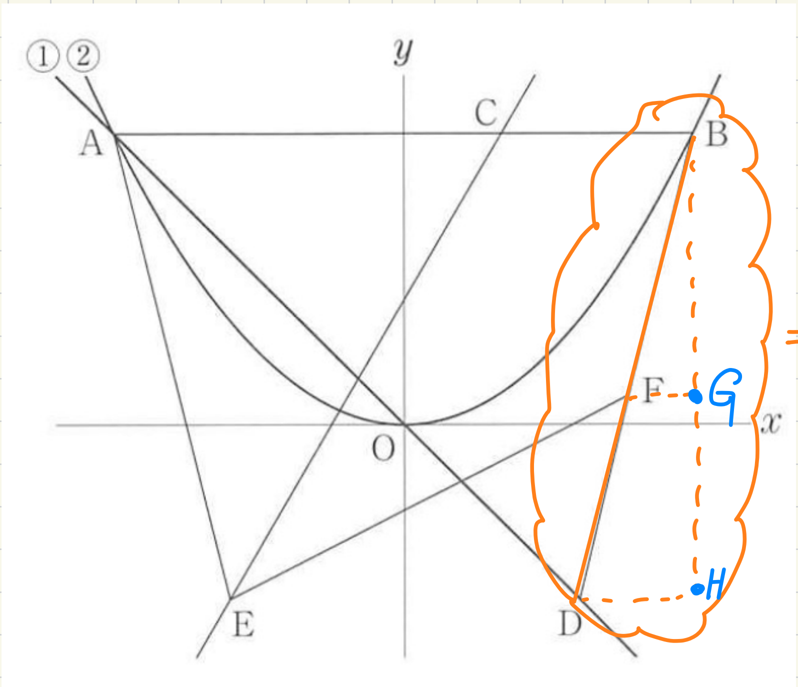


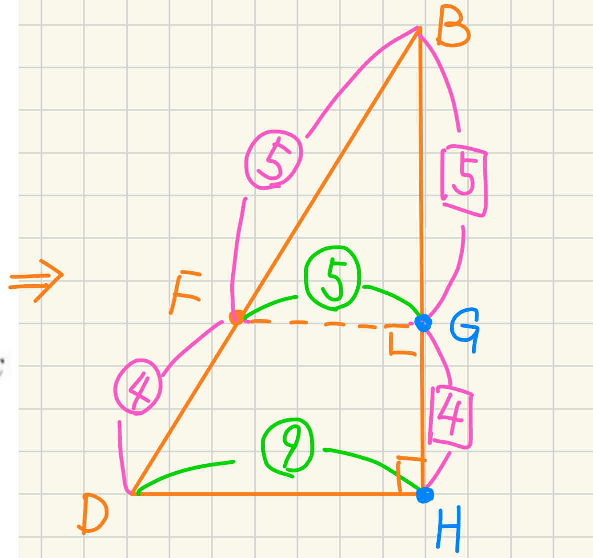
△BEFと△FEDにおいて，底辺をそれぞれBF，FDとすると，高さは等しいから，△BEFと△FEDの面積比は底辺比に等しい。
よって

BF：FD＝△BEF：△FED

$$=1:\frac{4}{5}$$

$$=5:4$$





左上図のようにG，Hをとる。
△BFGと△BDHにおいて，FG∥DHより同位角が等しいから

∠BFG＝∠BDH —①

∠BGF＝∠BHD —②

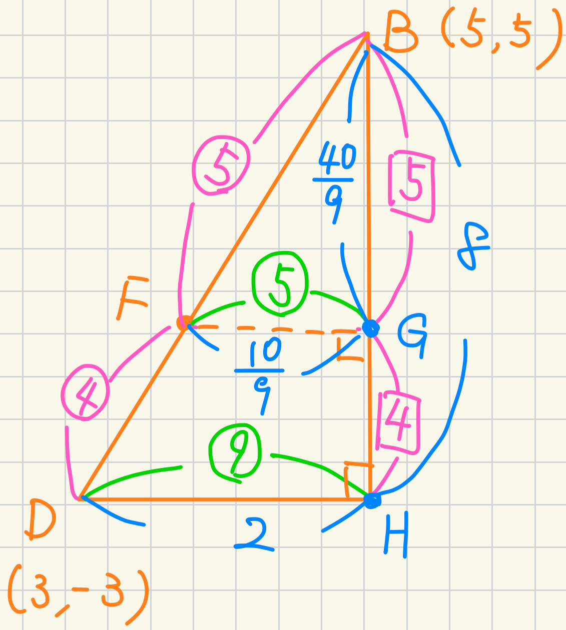
①，②より2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BFG \sim \triangle BDH$

よって、

$BG : GH = 5 : 4$

$FG : DH = 5 : 9$



B, D の座標より

$DH = 2, \quad BH = 8$

なので、

$$FG = 2 \times \frac{5}{9} = \frac{10}{9}$$

よって F の x 座標は

$$5 - \frac{10}{9} = \frac{45}{9} - \frac{10}{9}$$

$$= \frac{35}{9}$$

また、

$$BG = 8 \times \frac{5}{9} = \frac{40}{9}$$

よって F の y 座標は

$$5 - \frac{40}{9} = \frac{45}{9} - \frac{40}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

以上より、F の座標は $\left(\frac{35}{9}, \frac{5}{9}\right)$

問5
(ア)
箱Rに入っているカードが4枚のとき、
操作2によって、箱Qから4枚取り出す
必要がある。⇒ 1〜6のうち約数が4つある
のは「6」だけである
↳ 約数：1, 2, 3, 6
よって $b = 6$

また、操作1と操作2の間には箱Qに6の
約数である1, 2, 3, 6のカードが入っている
必要がある。

箱Qには最初から3, 5, 6のカードが入っている
ので、操作1により箱Pから1, 2のカードを
取り出せば良い

箱Pから1, 2のカードを取り出すには、$a = 3$
となれば良い
↳ $a = 3$のとき、カードに書かれた数の合計が
3となるように箱Pからカードを1枚または2枚
取り出す。
以上より、箱Rにカードが4枚となるのは、
$(a, b) = (3, 6)$の1通り。2つのさいころを投げた
ときの出る目は$6 \times 6 = 36$通りなので、求める
確率は、$\frac{1}{36}$

(イ) やや難問

1〜6の約数は以下の通り

1 : 1

2 : 1, 2

3 : 1, 3

4 : 1, 2, 4

5 : 1, 5

6 : 1, 2, 3, 6

(i) $b=1$ のとき

1の約数は1なので、箱Qに1のカードがあれば良い。

⇒箱Pから1を取り出す

∴ $a=1, 3, 5$ の3通り

$a=1$ ⇒ 箱Pから1を取り出す

$a=3$ ⇒ 箱Pから1, 2を取り出す

$a=5$ ⇒ 箱Pから1, 4を取り出す

(ii) $b=2$ のとき

2の約数は1, 2なので、箱Qに1または2のカードがあれば良い

⇒箱Pから1または2を取り出す

∴ $a=1, 2, 5, 6$ の4通り

$a=1$ ⇒ 箱Pから1を取り出す

$a=2$ ⇒ 箱Pから2を取り出す

$a=5$ ⇒ 箱Pから1, 4を取り出す

$a=6$ ⇒ 箱Pから2, 4を取り出す

なお $a=3$ のときは、箱Pから
1, 2 を取り出すことになる
⇒ 1, 2 の両方が箱Qに入る
$b=2$ のとき、箱Qから 1, 2 を
取り出し箱Rに入れる
⇒ 箱Rのカードは2枚となり不適

(iii) $b=3$ のとき、
3の約数は 1, 3 であるが、箱Qにすでに3が
あるため、箱Pから1を取らない方法となる。
$\therefore a=2, 4, 6$ の 3通り

(iv) $b=4$ のとき
4の約数は 1, 2, 4 なので、箱Qには、1, 2, 4
のいずれかのカードがあれば良い!
$\therefore a=1, 2, 4$ の 3通り

(v) $b=5$ のとき
5の約数は 1, 5 であるが、箱Qにすでに5が
あるため、箱Pから1を取らない方法となる。
$\therefore a=2, 4, 6$ の 3通り

(vi) $b=6$ のとき
6の約数は 1, 2, 3, 6 であるが、箱Qに
すでに 3, 6 があるため、必ず2枚以上が箱R
に移る。よって不適 (0通り)

以上より、箱Rにカードが1枚だけとなるのは、

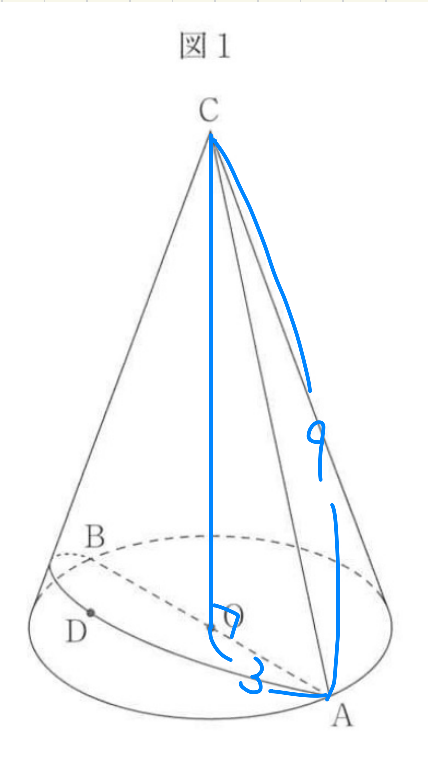
$3+4+3+3+3=16$通り

よって、求める確率は

$$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

問6

(ア)



△AOCで三平方の定理より

$$CO=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{81-9}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

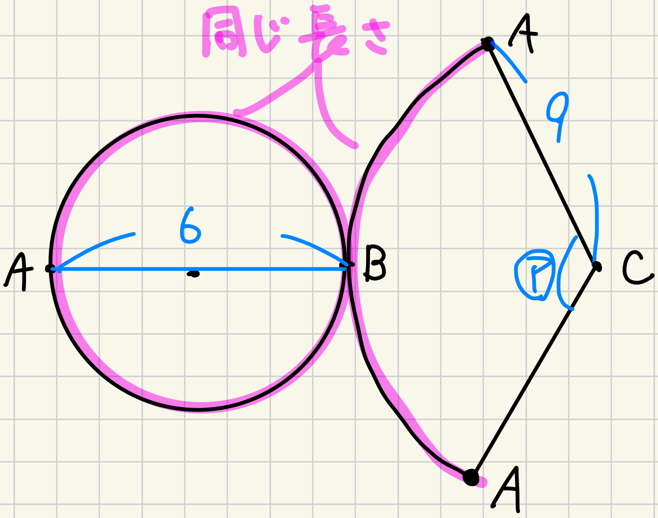
$$=6\sqrt{2}$$

よって、体積は

$$3\times3\times\pi\times6\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=18\sqrt{2}\pi$$

2

(イ) 展開図は以下の通り



$\overset{\frown}{ABA}$ = 円Oの周の長さ

$=6\pi$

$AC=9$より

$$18\times\pi\times\frac{ア}{360}=6\pi$$

$$\therefore ㋐ = \frac{6\pi \times 360}{18\pi}$$

$$= 120^\circ$$

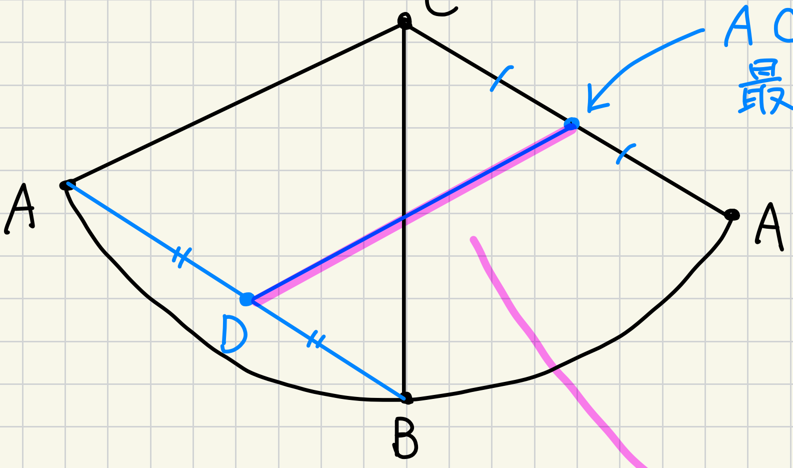
よって求める表面積は

$$\underbrace{3 \times 3 \times \pi}_{円の面積} + \underbrace{9 \times 9 \times \pi \times \frac{120}{360}}_{おうぎ形の面積}$$

$$= 9\pi + 27\pi$$

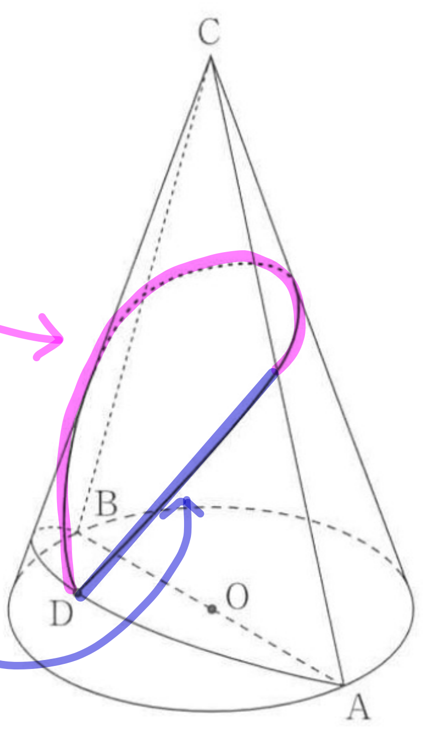
$$= 36\pi \ cm^2$$ 5

(7) 難問



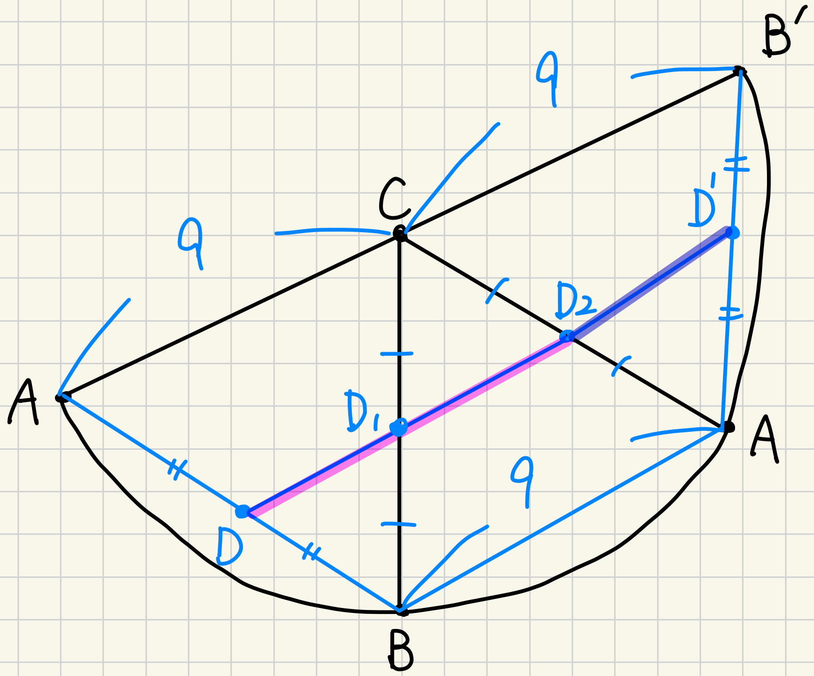
ACの中点を通る線が最短である。

図 2



展開図では右図のようにひもの一部になる

この長さも含めるため、展開図を広げる。



求める長さは左図のDD′である。

左図において、D、D_1、D_2、D′はそれぞれAB、BC、AC、AB′の中点である

最短となるには中点を通る

△ABCで中点連結定理より

$$DD_1 = \frac{1}{2}AC$$
$$= \frac{9}{2}$$

同様に

$$D_1D_2 = \frac{9}{2}$$

$$D_2D' = \frac{9}{2}$$

よって

$$DD' = DD_1 + D_1D_2 + D_2D'$$
$$= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{27}{2}\text{ cm}$$