2021年度 東京都
数学

Km Km

$\boxed{1}$

問1　与式 $= -9 \times \frac{1}{9} + 8$

$= -1 + 8$

$= 7$

問2　与式 $= \frac{2(5a-b)}{4} - \frac{(a-7b)}{4}$

$= \frac{10a - 2b - a + 7b}{4}$

$= \frac{9a+5b}{4}$

問3　与式 $= \frac{3 \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$　　$\because \sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$= \frac{6}{\sqrt{3}}$　　$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$

問4　式を整理して

$-4x + 2 = 9x - 63$

$-4x - 9x = -2 - 63$

$-13x = -65$

$x = 5$

問5 $\begin{cases} 5x + y = 1 & \text{——①} \\ -x + 6y = 37 & \text{——②} \end{cases}$

①×6 − ② より

$$\begin{array}{rrcr} & 30x + 6y & = & 6 \\ -) & -x + 6y & = & 37 \\ \hline & 31x & = & -31 \end{array}$$

$$x = -1$$

$x=-1$ を②に代入して

$$-(-1) + 6y = 37$$

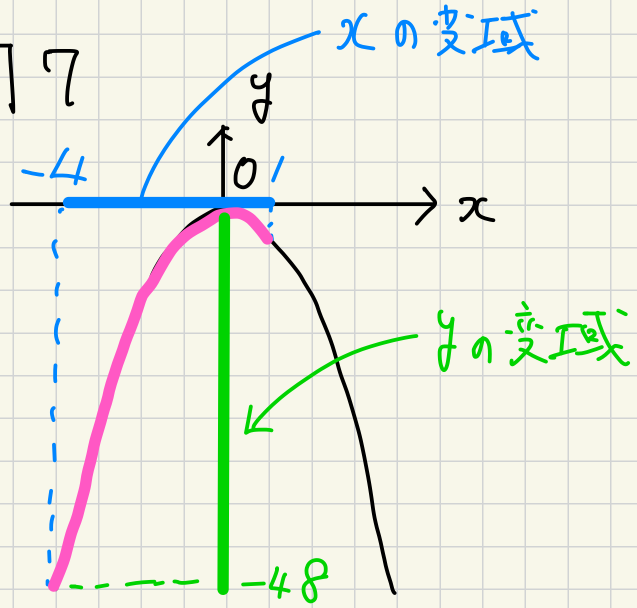
$$6y = 37 - 1$$

$$= 36$$

$$\therefore y = 6$$

よって、$x=-1,\ y=6$

問7



$x=-4$ のとき

$$y = -3 \times (-4)^2$$

$$= -3 \times 16$$

$$= -48$$

よって、yの変域は、

$$-48 \leqq y \leqq 0$$

ア　　オ

問8

(i) $b=1$ のとき、$a \geqq b$ となる a は、

$a=1, 2, 3, 4, 5, 6$ … 6通り

(ii) $b=2$ のとき、$a \geqq b$ となる a は、

$a=2, 3, 4, 5, 6$ … 5通り

(iii) $b=3$ のとき、$a \geqq b$ となる a は、

$a=3, 4, 5, 6$ … 4通り

(iv) $b=4$ のとき、$a \geqq b$ となる a は、

$a=4, 5, 6$ … 3通り

(v) $b=5$ のとき、$a \geqq b$ となる a は、

$a=5, 6$ … 2通り

(vi) $b=6$ のとき、$a \geqq b$ となる a は、

$a=6$ … 1通り

よって、$a \geqq b$ となる目の出方は、

$6+5+4+3+2+1=21$通り

2つのさいころを投げたときの目の出方は、

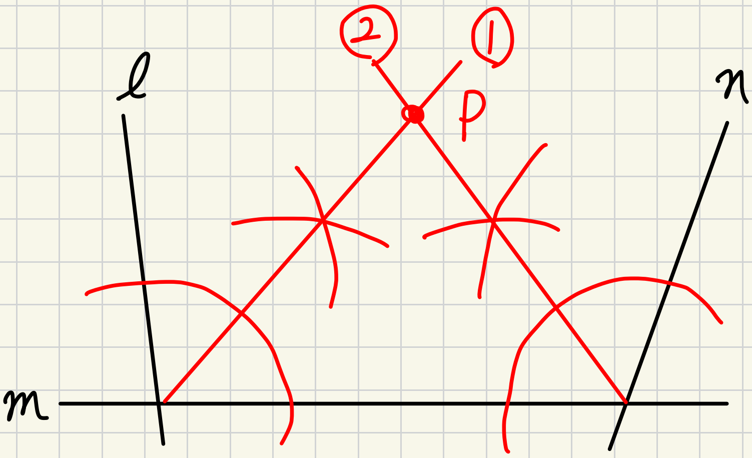
$6 \times 6 = 36$通り

よって、求める確率は

$$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

あ 7, い 1, う 2

問9



① l と m のなす角の二等分線
⇒ 二等分線上は、l, m の距離が等しい。

② n と m のなす角の二等分線
⇒ 二等分線上は、n, m の距離が等しい

③ ①, ② の交点が点P.

2

問1

①

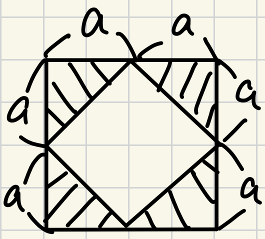


図1

図1のとき、▨の面積は

$$\underbrace{a \times a \times \frac{1}{2}}_{\text{▨1枚の面積}} \times 4 = 2a^2$$

$n=5$ のとき、図1が縦5枚、横5枚あるので

$$2a^2 \times 5 \times 5 = 50a^2 \quad \text{イ}$$

②

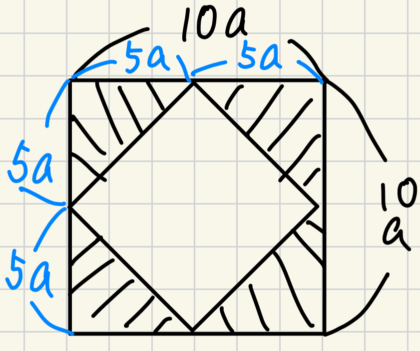


図3で $n=5$ のときは左図の通り。

よって、

$$5a \times 5a \times \frac{1}{2} \times 4 = 50a^2 \quad \text{ウ}$$

問2

1辺の長さが $2a$ cm の正方形の面積は $(2a)^2$ cm^2,
この正方形の各辺に接する円の面積は πa^2 cm^2 で

直径 $=2a$ より
半径 $=a$

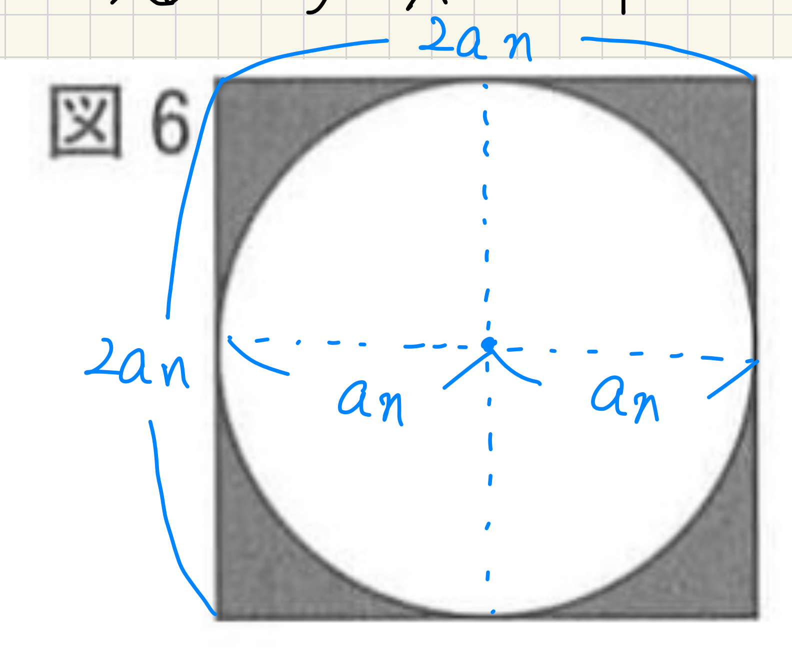
タイルが n^2 枚あるから

$$X = \{(2a)^2 - \pi a^2\} \times n^2$$
$$= (4a^2 - \pi a^2)n^2$$
$$= (4-\pi)a^2n^2 \quad \text{——} \ ①$$

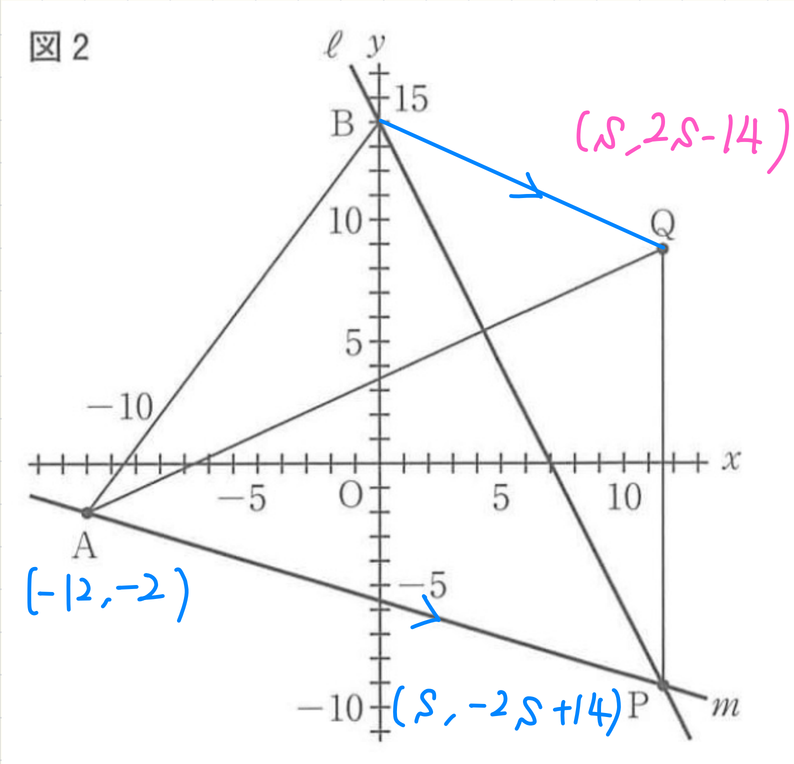
タイルを縦と横に n 枚ずつ並べてできる正方形
と同じ大きさの1辺の長さは $2an$ cm, この正方形
の各辺に接する円の半径は an cm であるから.

$$Y = (2an)^2 - \pi \times (an)^2$$
$$= 4a^2n^2 - \pi a^2 n^2$$
$$= (4-\pi)a^2n^2 \quad \text{——} \ ②$$

①, ② より $X = Y$



問3 難問



$\triangle APB = \triangle APQ$ なので、底辺をAPとすると、高さも等しくなる。

$\therefore$ $BQ \parallel AP$

点Pのx座標をsとする。点Pは$\ell : y = -2x + 14$上にあるので、

$y = -2s + 14$ $\therefore$ $P(s, -2s+14)$

点Qはx軸を軸の対称として、点Pを線対称させた点なので、

Qのx座標：s

Qのy座標：$-(-2s+14) = 2s-14$

直線mの式を$y = ax + b$とおくと、A, Pを通るので、

$-2 = -12a + b$ ——— ①

$-2s + 14 = sa + b$ ——— ②

① − ② より

$-2 - (-2s + 14) = -12a - sa$

式を整理して、

$$-2+2s-14=-sa-12a$$

$$sa+12a=-2s+16$$

$$(s+12)a=-2(s-8)$$

※ $s>7$ より
$s+12$ は0に
ならない。

$$\therefore\ a=\frac{-2(s-8)}{s+12} \quad ㋐$$

また、直線BQの式を $y=ax+b$ とすると、B(0,14)
より $y=ax+14$。これが点Qを通るので、

$$2s-14=sa+14$$

$$2s-28=sa$$

$$\therefore\ a=\frac{2(s-14)}{s} \quad ㋑$$

AP // BQ より、直線APと直線BQの傾きは
等しいから

$$\underbrace{-\frac{2(s-8)}{s+12}}_{㋐}=\underbrace{\frac{2(s-14)}{s}}_{㋑}$$

式を整理して

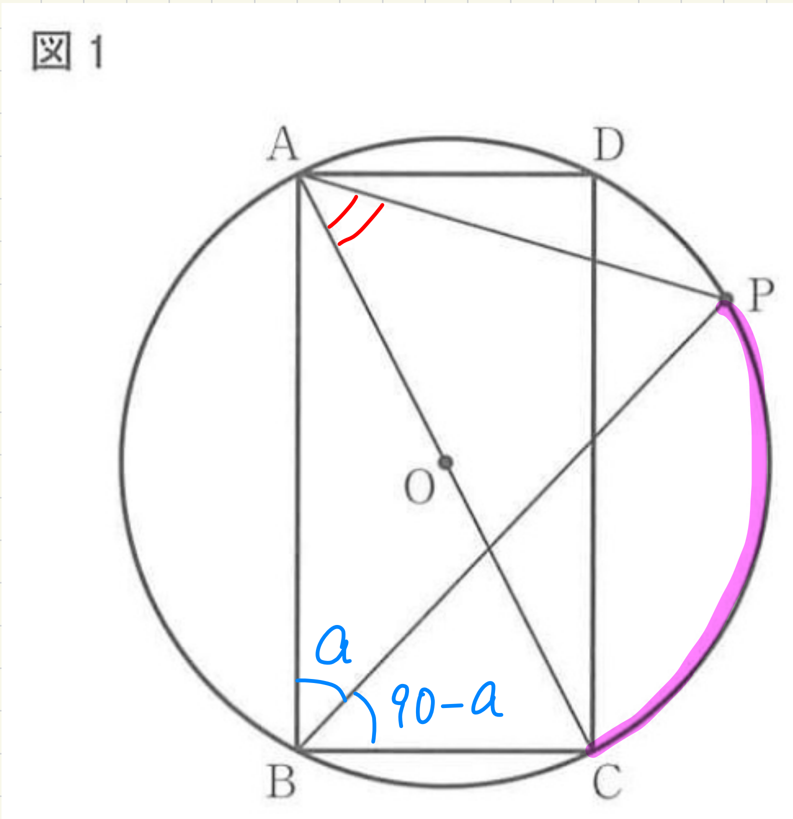
$$-\frac{s-8}{s+12}=\frac{s-14}{s}$$

$$-s(s-8)=(s+12)(s-14)$$
$$-s^2+8s=s^2-2s-168$$
$$-s^2+8s-s^2+2s+168=0$$
$$-2s^2+10s+168=0$$
$$s^2-5s-84=0$$
$$\therefore (s+7)(s-12)=0$$
$$s=-7,\ 12$$

$s>7$ より $s=12$

$\boxed{4}$

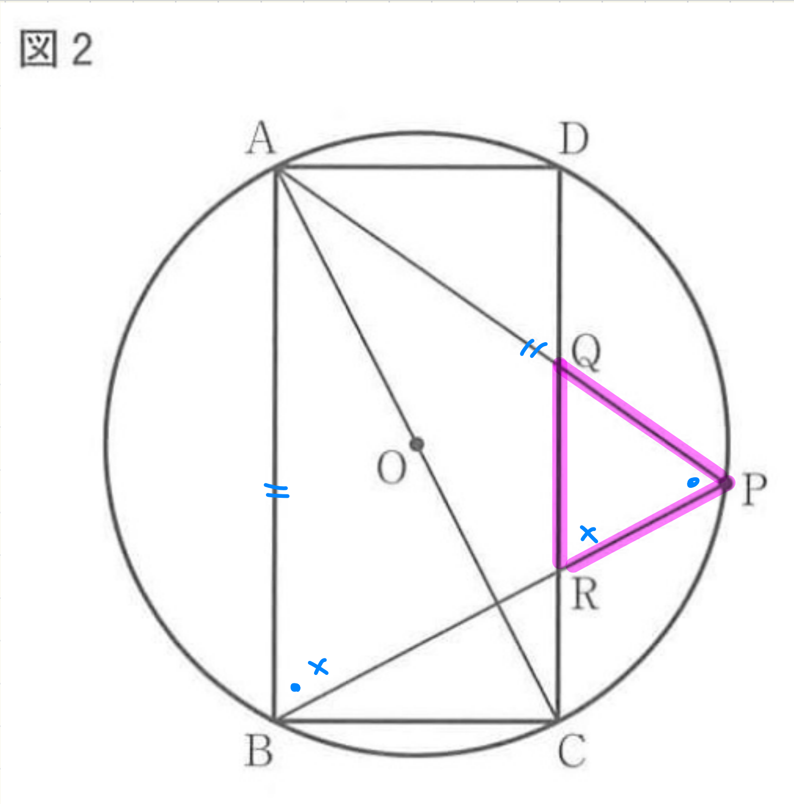
問 1



□ABCDは長方形なので、
$\angle ABC=90^\circ$
よって
$\angle PBC=90^\circ-a$

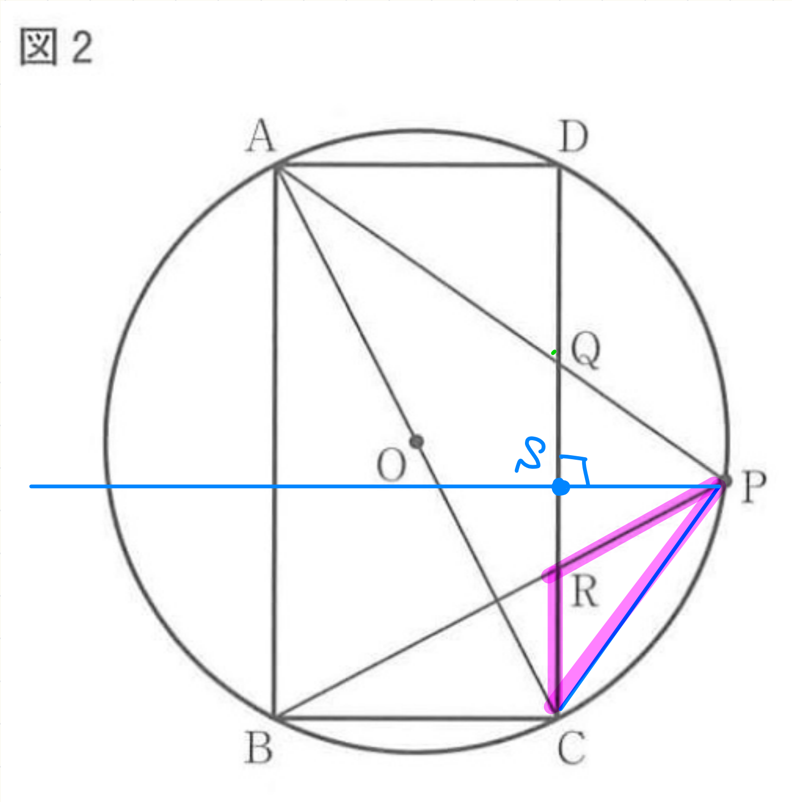
$\overset{\frown}{PC}$に対する円周角は等しいので、
$\angle PBC=\angle PAC$
よって
$\angle PAC=90^\circ-a$ ①

問2
①



仮定からAB＝APだから
△ABPは二等辺三角形
二等辺三角形の底角は等しいから
$\angle ABP = \angle APB$
よって
$\angle ABP = \angle QPR$ ― ①
□ABCDは長方形だから
$AB \parallel DC$
平行線の同位角は等しいから
$\angle ABP = \angle QRP$ ― ②
①、②より
$\angle QRP = \angle QPR$
よって、△QRPにおいて、2つの角がそれぞれ等しいから、△QRPは二等辺三角形である。(証明終わり)

② 難問

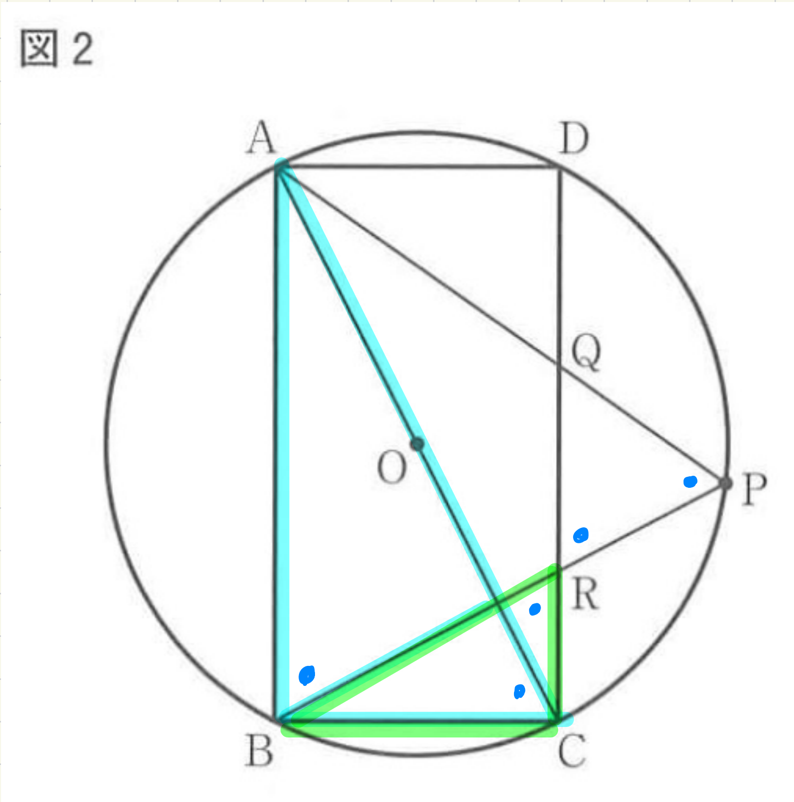


点PからDCに垂線を下ろした足をSとする。

$\triangle PRC = \frac{1}{2} \times CR \times PS$

よって、CR、PSの長さを求める。

(i) CRについて。



△ABCと△BCRにおいて、□ABCDは長方形なので、

$\angle ABC = \angle BCR = 90^\circ$ ―― ㋐

$\angle ABP = \bullet$ とおくと、問2①より

$\angle APB = \bullet$

$\angle QRP = \bullet$

対頂角は等しいので、

$\angle QRP = \angle BRC$ $\therefore \angle BRC = \bullet$ ―― ㋑

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいので

$\angle APB = \angle ACB$ $\therefore \angle ACB = \bullet$ ―― ㋒

①,㋒より

$\angle BRC = \angle ACB$ —— ㋓

㋐,㋓より2組の角がそれぞれ等しいので.

$\triangle ABC \backsim \triangle BCR$.

対応する辺の比は等しいから

$\underbrace{AB}_{16} : \underbrace{BC}_{8} = \underbrace{BC}_{8} : CR$

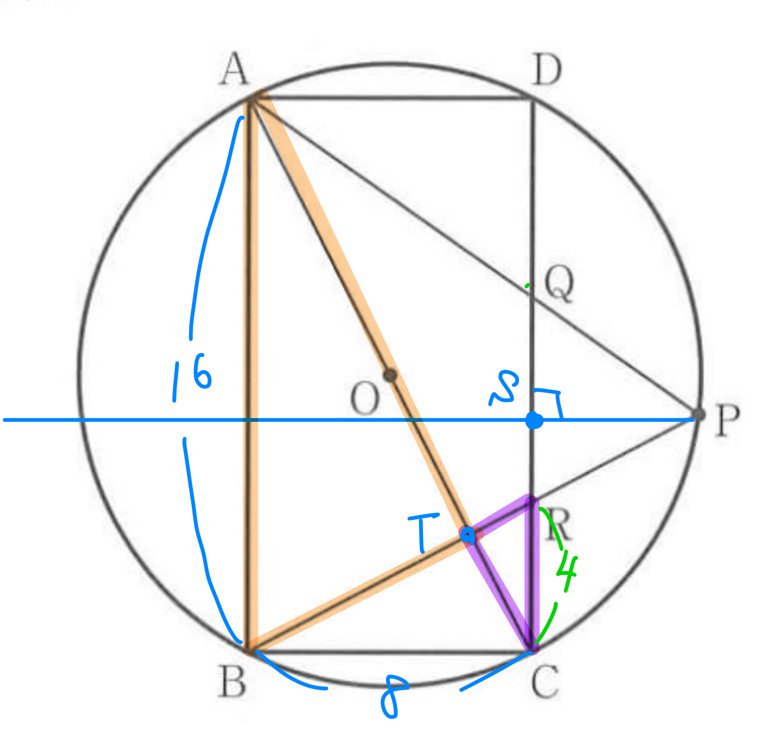
よって.

$2 : 1 = 8 : CR$

$2CR = 8$　　∴ $CR = 4$ cm

(ii) PSについて

図2



BPとACの交点をTとする.

$\triangle ABT$と$\triangle CRT$において.

□ABCDは長方形なので.

AB//CD。よって,錯角が等しいので.

$\angle ABT = \angle CRT$ —— ㋔

$\angle BAT = \angle RCT$ —— ㋕

㋔,㋕より2組の角がそれぞれ等しいので.

$\triangle ABT \backsim \triangle CRT$

対応する辺の比は等しいから.

$BT : RT = \underbrace{AB}_{16} : \underbrace{CR}_{4}$

よって.

$$BT : RT = 4 : 1$$

ここで. △BCR で 三平方の定理より.

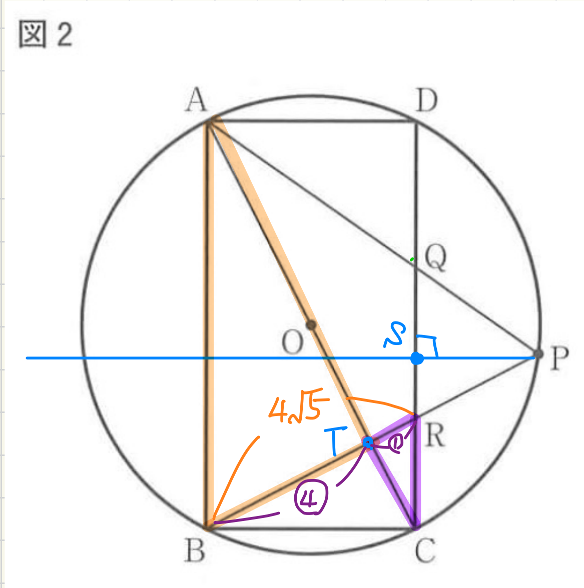
$$BR = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

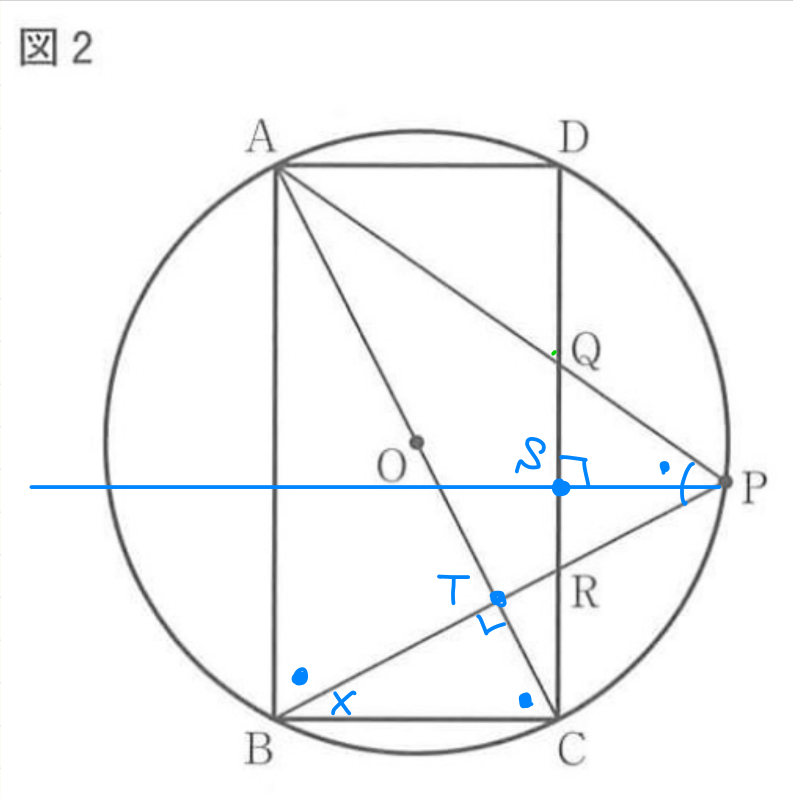
$$= 4\sqrt{5}$$

よって.

$$BT = 4\sqrt{5} \times \frac{4}{4+1} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

$$RT = 4\sqrt{5} \times \frac{1}{4+1} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$





また, ∠ABP = •,

∠CBR = x とおくと.

∠ABC = 90° なので

$$\bullet + x = 90^\circ$$

㋒ より

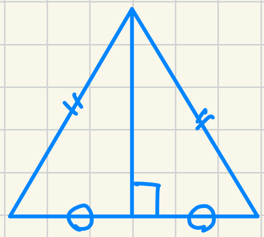
$$\angle ACB = \bullet$$

△BCT の内角の和は 180° なので.

$$\underbrace{\underbrace{\angle TBC}_{x} + \underbrace{\angle BCT}_{\bullet}}_{90^\circ} + \angle CTB = 180^\circ$$

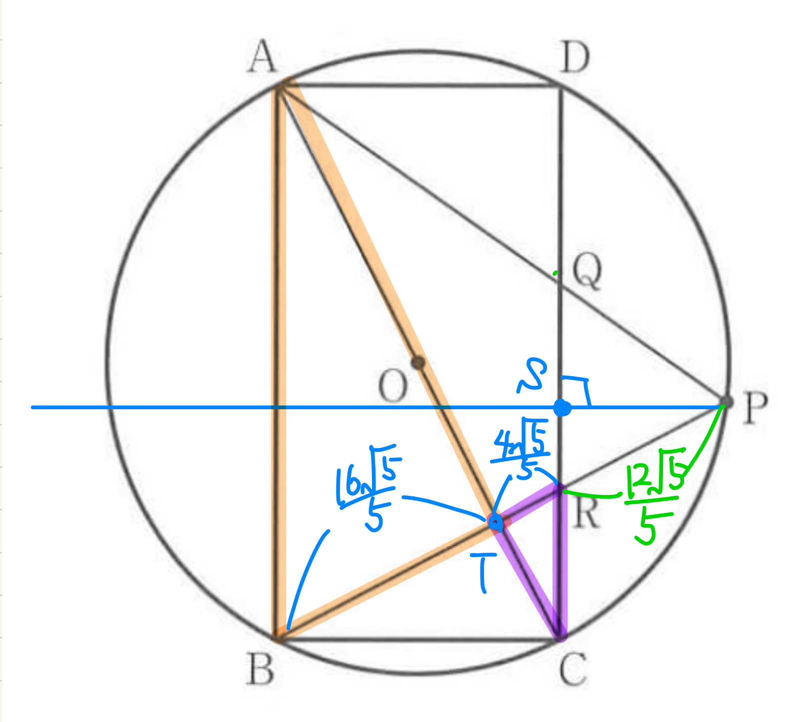
$$\therefore \angle CTB = 90^\circ \Rightarrow \angle ATP = 90^\circ$$

△ABPはAB=APの二等辺三角形で、$\angle ATP = 90^\circ$だから点TはBPの中点である。



二等辺三角形の性質

図 2



BT=PTなので、

$$PT = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

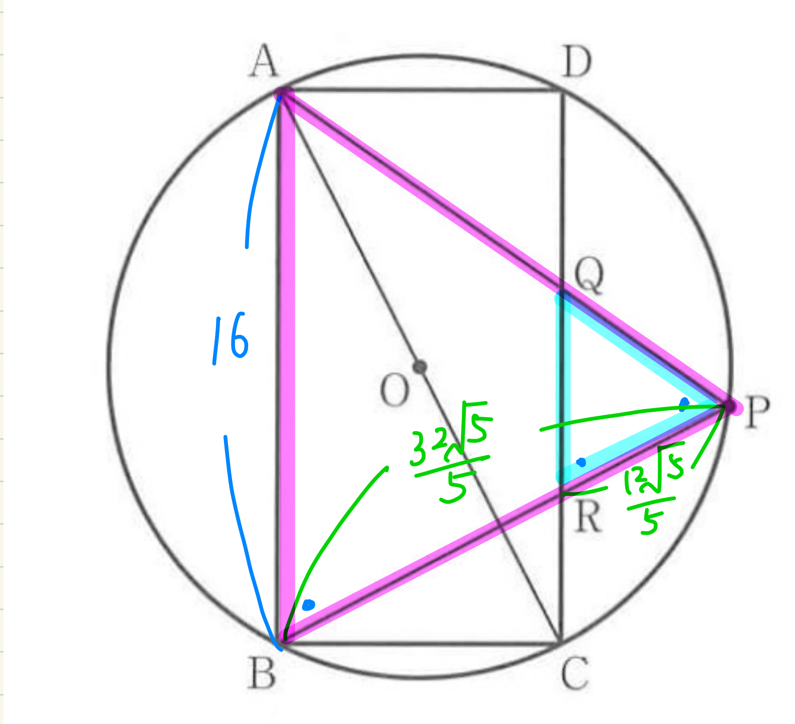
$$RT = PT - RT$$

$$= \frac{16\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

$$BP = \frac{16\sqrt{5}}{5} \times 2 = \frac{32\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}$$

図 2



△ABPと△QRPにおいて
共に二等辺三角形で、
底角もそれぞれ等しい
から、△ABP∽△QRP。
対応する辺の比は等しい
から、

$$\underbrace{AB}_{16} : QR = \underbrace{BP}_{\frac{32\sqrt{5}}{5}} : \underbrace{RP}_{\frac{12\sqrt{5}}{5}}$$

よって、

$16 : QR = 32 : 12$

$= 8 : 3$

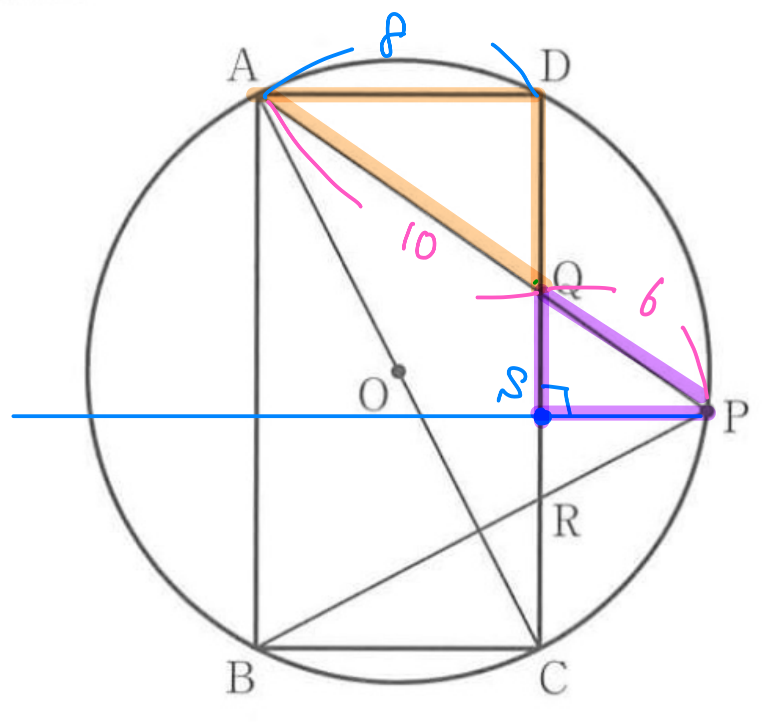
$8QR = 48$　　$\therefore QR = 6$ cm

$\triangle QRP$ は二等辺三角形なので、

$QR = QP \Rightarrow QP = 6$ cm

また、$AP = 16$ cm より $AQ = 10$ cm

図 2



$\triangle AQD$ と $\triangle PQS$ において、

$\angle ADQ = \angle PSQ = 90°$ ―㋖

対頂角は等しいから

$\angle AQD = \angle PQS$ ―㋗

㋖、㋗より 2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AQD \backsim \triangle PQS$

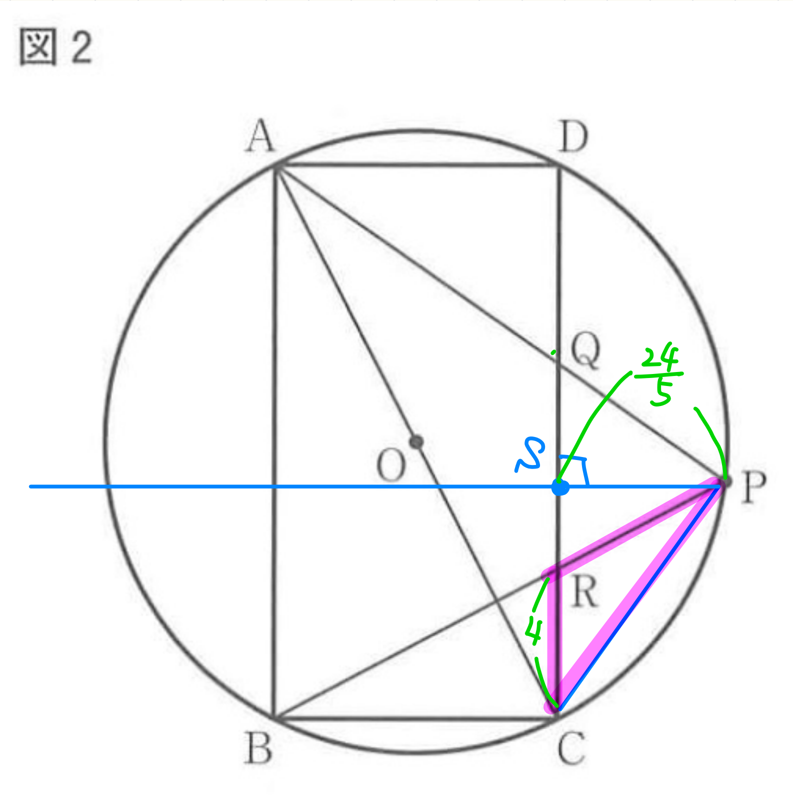
対応する辺の比は等しいから

$\underbrace{AD}_{8} : PS = \underbrace{AQ}_{10} : \underbrace{PQ}_{6}$

よって、

$8 : PS = 5 : 3$

$5PS = 24$　　$\therefore PS = \dfrac{24}{5}$ cm



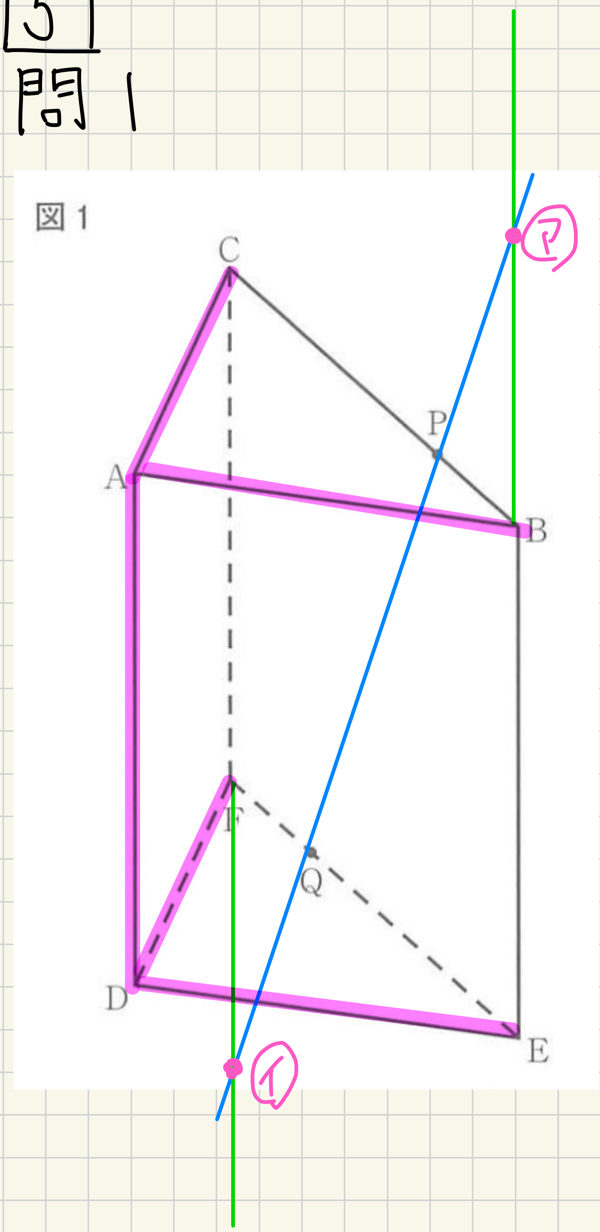
以上より

$$\triangle PRC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{24}{5}$$

$$= \frac{48}{5}\ cm^2$$

$\boxed{5}$

問 1



ねじれの位置
① 交わらない
② 平行でない.

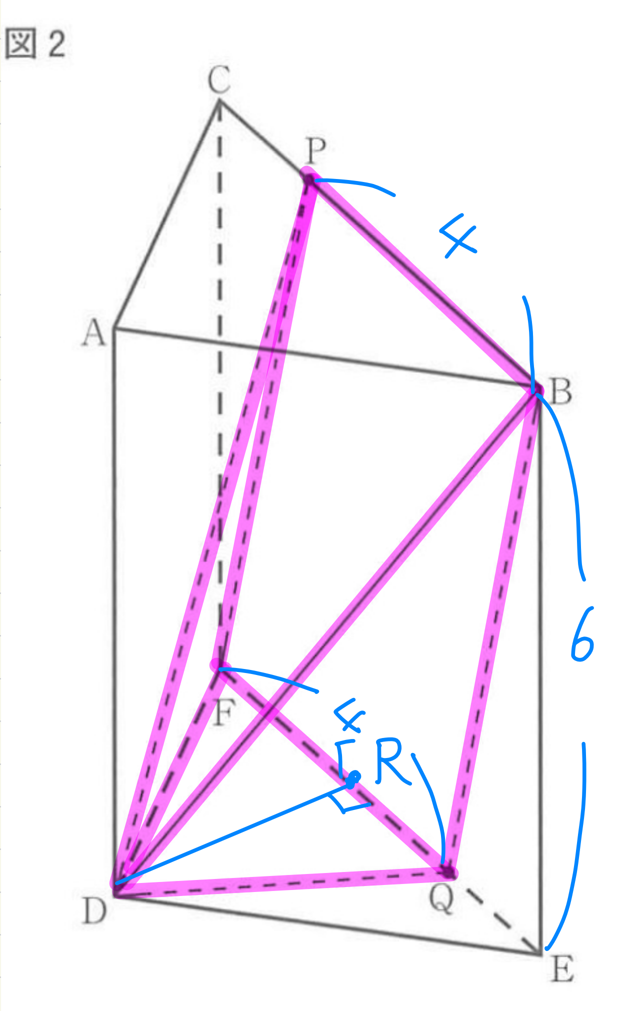
PQとBEを延長すると.アで交わる. ⇒ねじれの位置でない

PQとCFを延長すると.イで交わる.⇒ねじれの位置でない

ねじれの位置は.
AB. AC. AD, DE, DF

よって5本

問2 難問



▱BPFQ は，PB = FQ，PB // FQ なので，平行四辺形である。

▱BPFQ の面積は，PB = 4，BE = 6 なので，

▱BPFQ = 4 × 6

= 24

立体ABC−DEF は三角柱であるから，

面CFEB ⊥ 面DEF ―①

である。

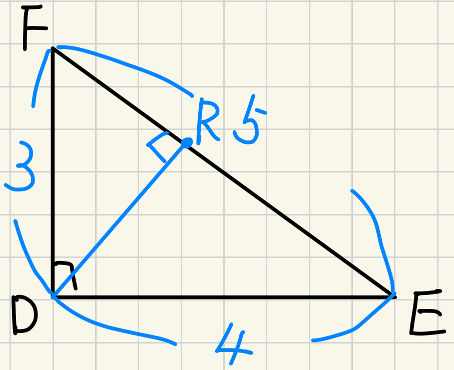
DからEFに垂線を下ろした足をRとする。

面BPFQ は，面CFEB 内にあるので，①から，

面BPFQ ⊥ DR

である。よって，立体D−BPFQ の体積は，

▱BPFQ を底面としたとき，高さは DR である。



△DEF は，∠FDE = 90° の直角三角形である。△DEF の面積は

(i) DE を底辺としたとき

$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ cm^2 ――②

(ii) EFを底辺としたとき

$$\frac{1}{2} \times 5 \times DR = \frac{5}{2} DR \text{ —— ③}$$

② = ③ なので

$$\frac{5}{2} DR = 6 \qquad \therefore DR = \frac{12}{5}\ \mathrm{cm}$$

以上より求める体積は

$$\underbrace{24}_{□BPFQ} \times \underbrace{\frac{12}{5}}_{DR} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{四角すいなので。}} = \frac{96}{5}\ \mathrm{cm}^3$$