2023年度 熊本県

数学 B問題

KmKm

$\boxed{1}$

(1) 与式 $= \frac{2}{14} + \frac{7}{14}$

$= \frac{9}{14}$

(2) 与式 $= 6 - 12$

$= -6$

(3) 与式 $= 8x + 9y + 7x - 7y$

$= 15x + 2y$

(4) 与式 $= \frac{8a^3b \times 9b}{36a^2b^2}$

$= 2a$

(5) 与式 $= x^2 - 4x - 5 + x^2 + 4x + 4$

$= 2x^2 - 1$

(6) 与式 $= \sqrt{6} + 3\sqrt{6}$

$= 4\sqrt{6}$

$\boxed{2}$

(1) 式を整理して

$5x - 3x = -8 - 4$

$\Leftrightarrow \quad 2x = -12$

$x = -6$

(2) 解の公式より

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

(3) y は x に反比例するので、$y = \frac{a}{x}$ とおくと、

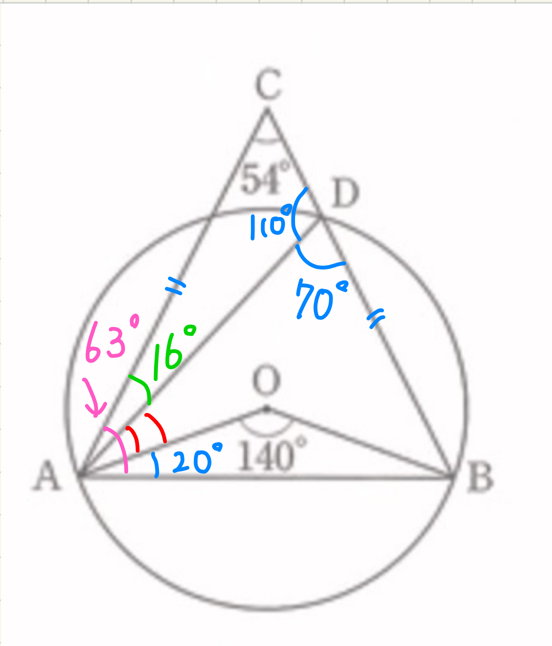
$x = 2,\ y = 3$ だから

$$3 = \frac{a}{2} \qquad \therefore a = 6$$

よって $y = \frac{6}{x}$ で $x = 5$ を代入すると、

$$y = \frac{6}{5}$$

(4)



△ABC は AC = BC の二等辺三角形だから

$$\angle CAB = (180° - 54°) \div 2$$
$$= 126° \div 2$$
$$= 63°$$

△OAB は $\underbrace{OA = OB}_{半径}$ の二等辺三角形だから

$$\angle OAB = (180° - 140°) \div 2$$
$$= 40° \div 2$$
$$= 20°$$

$\overset{\frown}{AB}$に対する中心角，円周角より

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB$$
$$= \frac{1}{2} \times 140^\circ$$
$$= 70^\circ$$

よって

$$\angle ADC = 180^\circ - 70^\circ$$
$$= 110^\circ$$

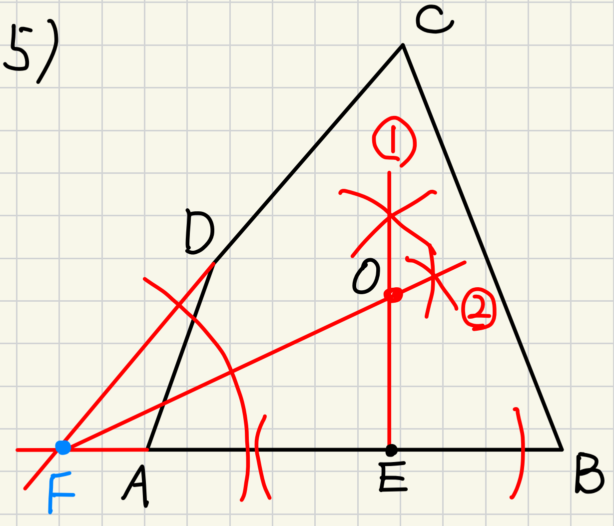
$\triangle ADC$の内角の和は180°だから

$$\angle CAD = 180^\circ - (54^\circ + 110^\circ)$$
$$= 180^\circ - 164^\circ$$
$$= 16^\circ$$

よって

$$\angle OAD = 63^\circ - (16^\circ + 20^\circ)$$
$$= 63^\circ - 36^\circ$$
$$= 27^\circ$$

(5)



① Eを通りABに垂直な線を描く

② AB，CDの延長線の交点をFとし，∠ADFの二等分線を描く

③ ①，②の交点がO

(6)

① 箱Aから赤の4，箱Bから赤の6を取り出したとき，4×6=24で最大となる

② 赤いカードの数を○で書く．樹形図は，以下の通り

A	B	点
2	3	6
	6	12
	3	5
	4	6
	6	8

A	B	点
4	3	12
	6	24
	3	7
	4	8
	6	10

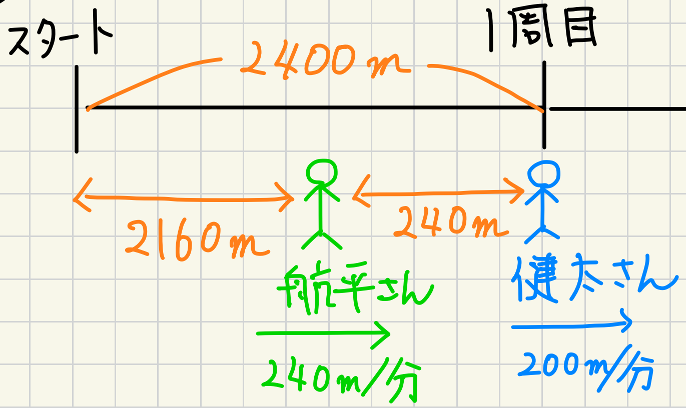
A	B	点
2	3	5
	6	8
	3	6
	4	8
	6	12

得点が最も出やすいのは，8点で，そのときの確率は

$$\frac{4}{15}$$

(7)

①



健太さんの走る速さ

2400m を12分で走るので

$2400 \div 12 = 200$　　$\therefore$ 200m/分

健太さんが1周したとき、航平さんが走った距離は、

$2400 - 240 = 2160$m

よって、航平さんが走った時間は、

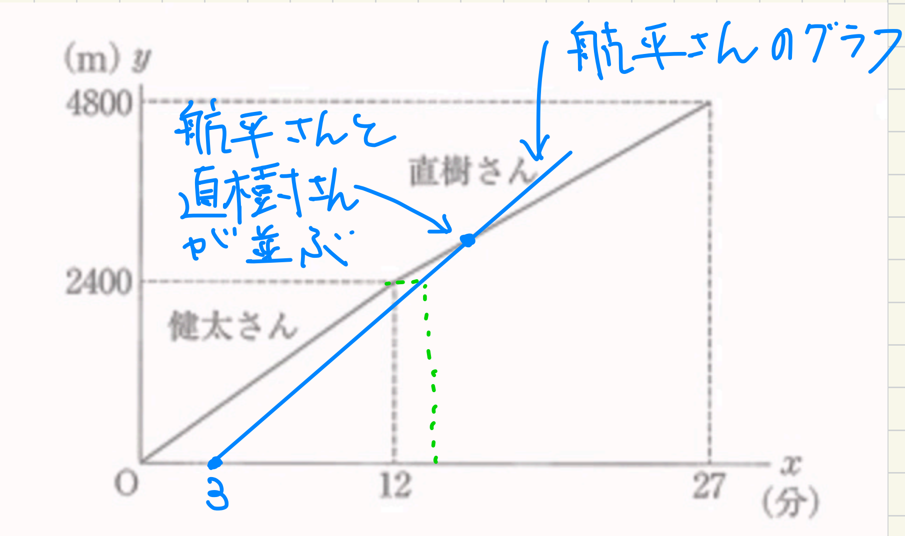
$2160 \div 240 = 9$分

したがって、航平さんは、健太さんがスタートしてから

$12 - 9 = 3$分後にスタートした。

$\therefore a = 3$

②



航平さんと直樹さんが並ぶのは、2人のグラフの交点である。

直樹さんのグラフ

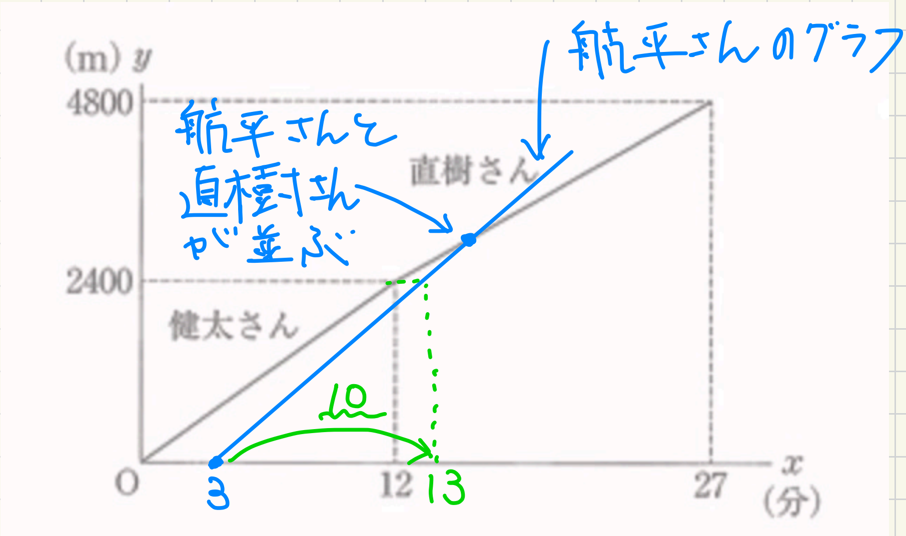
$y = ax + b$ とおくと、$(12, 2400)$、$(27, 4800)$ を通るから

$$2400 = 12a + b \quad \text{——— ①}$$
$$-)\ 4800 = 27a + b \quad \text{——— ②}$$
$$-2400 = -15a$$
$$a = 160$$

$a=160$ を①に代入して

$$2400 = 12 \times 160 + b$$
$$b = 2400 - 1920$$
$$= 480$$
$$\therefore\ y = 160x + 480 \quad \text{——— ㋐}$$

航平さんのグラフ



航平さんは分速240mで走るから、1周(2400m)にかかる時間は

$$2400 \div 240 = 10$$

よって、グラフを $y = ax + b$ とおくと、$(3, 0)$, $(13, 2400)$ を通るから

$$0 = 3a + b \quad \text{——— ③}$$
$$-)\ 2400 = 13a + b \quad \text{——— ④}$$
$$-2400 = -10a$$

$a = 240$

$a = 240$ を③に代入して

$0 = 240 \times 3 + b \Rightarrow b = -720$

$\therefore y = 240x - 720$ —— ④

よって、2人が並ぶ時間は㋐、④を連立して

$$\begin{cases} y = 160x + 480 & \text{—— ㋐} \\ y = 240x - 720 & \text{—— ④} \end{cases}$$

㋐を④に代入して

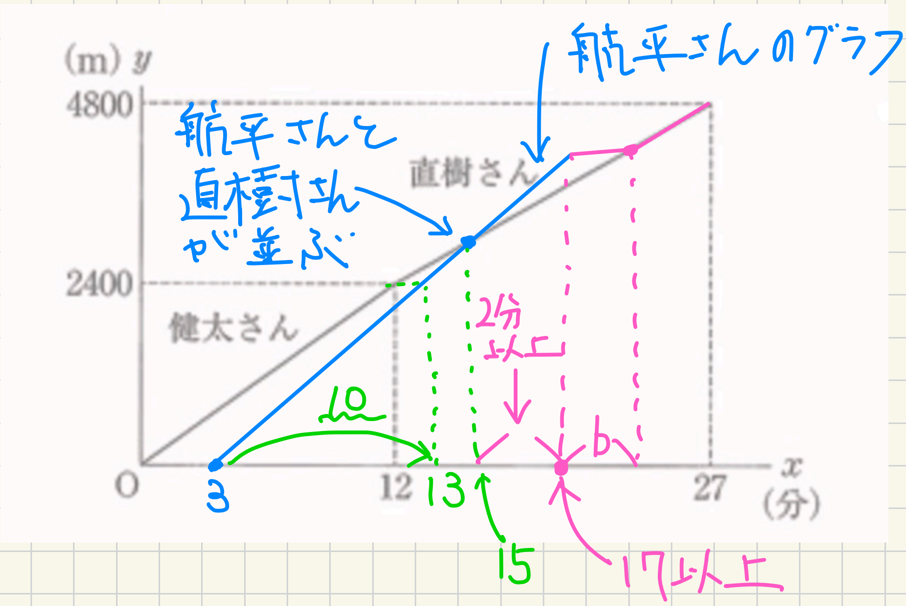
$$160x + 480 = 240x - 720$$

$$-80x = -1200$$

$$x = 15$$

よって、2人が並ぶ時間は、健太さんが走り始めてから15分後

③ やや難問



航平さんが再び走り始めたのは、健太さんが走り始めて17分以上経過したときである。

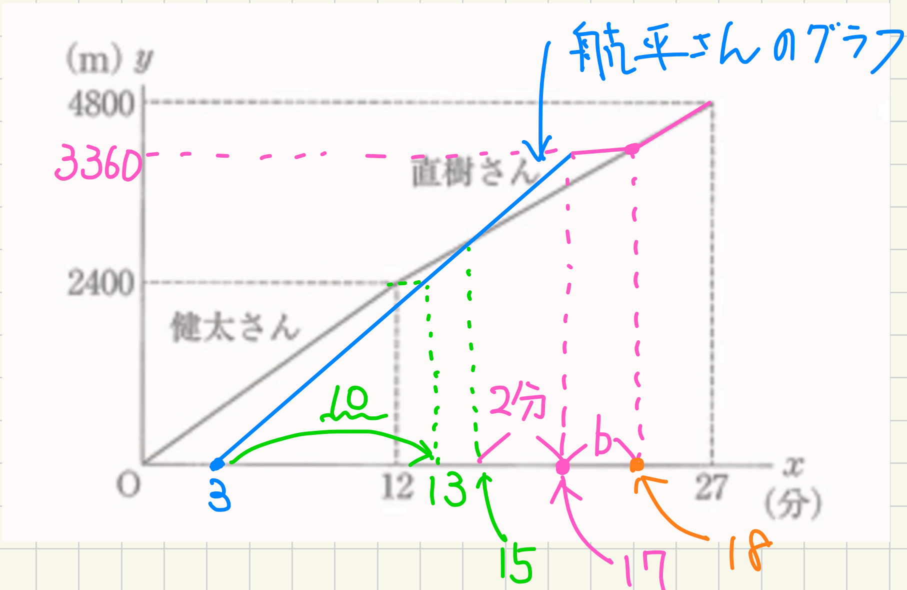
⇒再び走り始めたときの速さは直樹さんと同じ

速さなので、毎分160mである。

直樹さんは2400mを15分で走るから

$2400 \div 15 = 160$

(i) 航平さんの立ち止まった時間が2分のとき。



航平さんが立ち止まったのは、$x=17$のときであるから

$y = 240 \times 17 - 720$

$= 3360$

直樹さんが $y=3360$ に到達する時間は、

$3360 = 160x + 480$

$160x = 2880 \quad \therefore x = 18$

よってこのときのbは

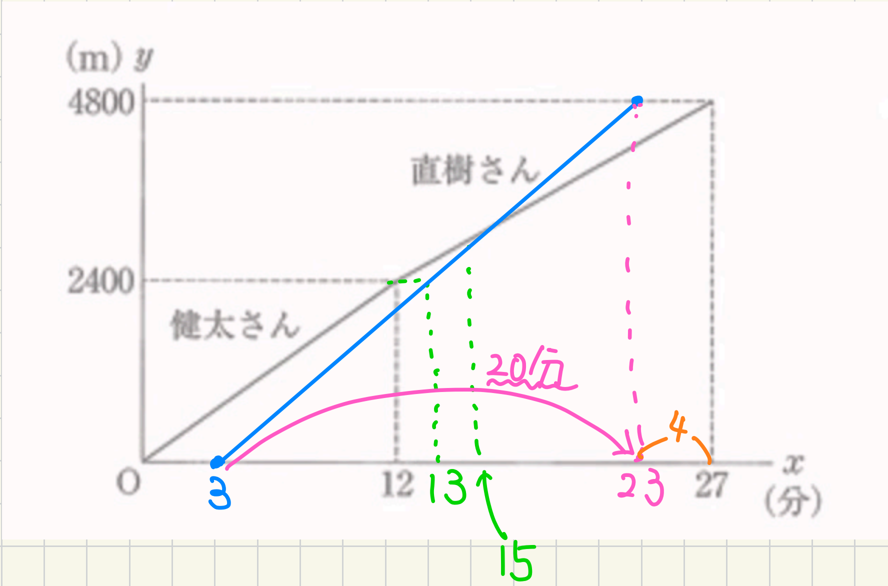
$18 - 17 = 1$

(ii) 航平さんが立ち止まらずにゴールしたとき。

航平さんが2周する時間は、

$4800 \div 240 = 20$分

$\Rightarrow x = 23$ のとき



よって、航平さんが立ち止まらずにゴールしてから直樹さんが2周目をゴールする時間は

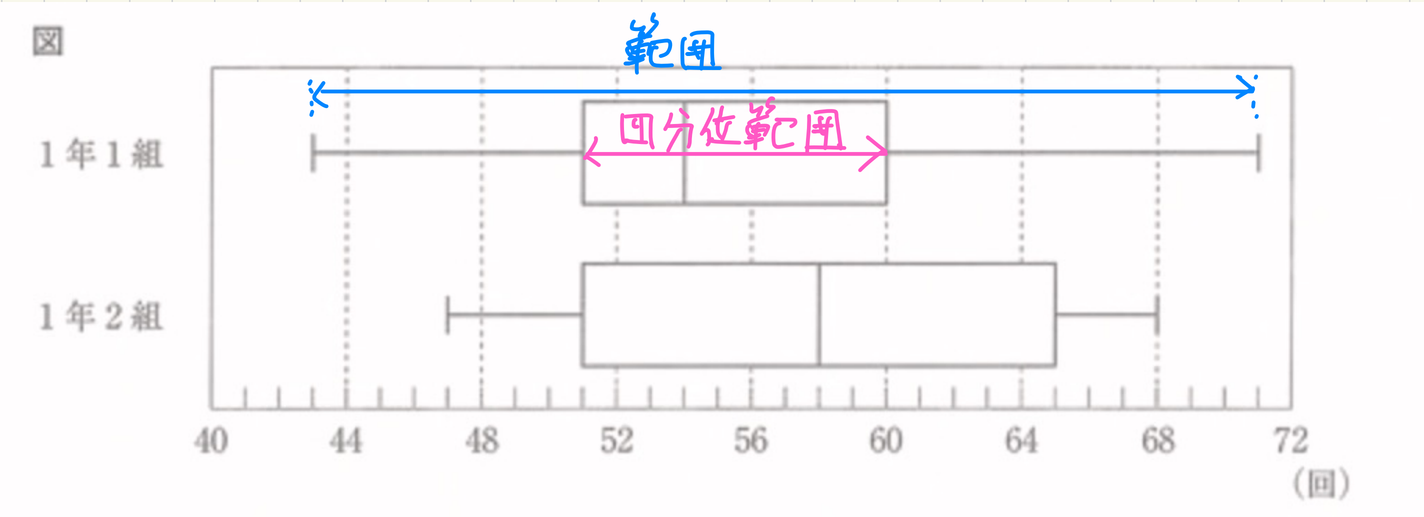
$27-23=4$分

よって、bの最大は、航平さんが2周目をゴールする直前で立ち止まれば良いから、$b<4$。

(i)(ii)より bの範囲は、$1 \leqq b < 4$

$\boxed{3}$

(1)



範囲 $= 71-43 = 28$ 回

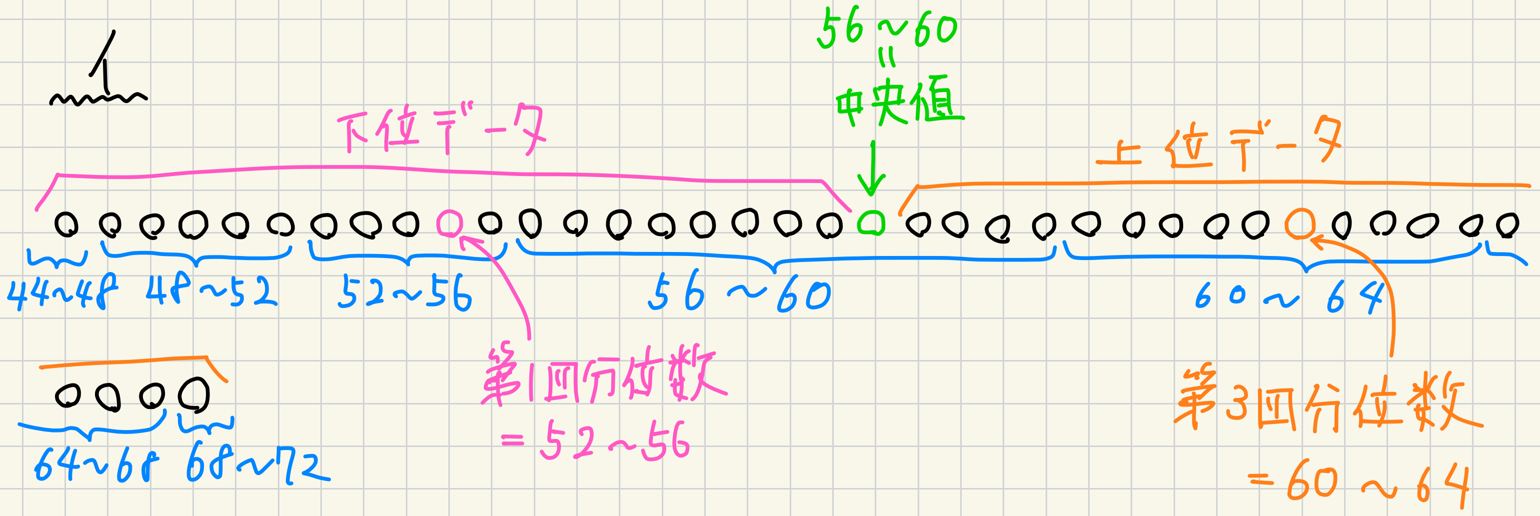
四分位範囲 $= 60-51 = 9$ 回

(2)

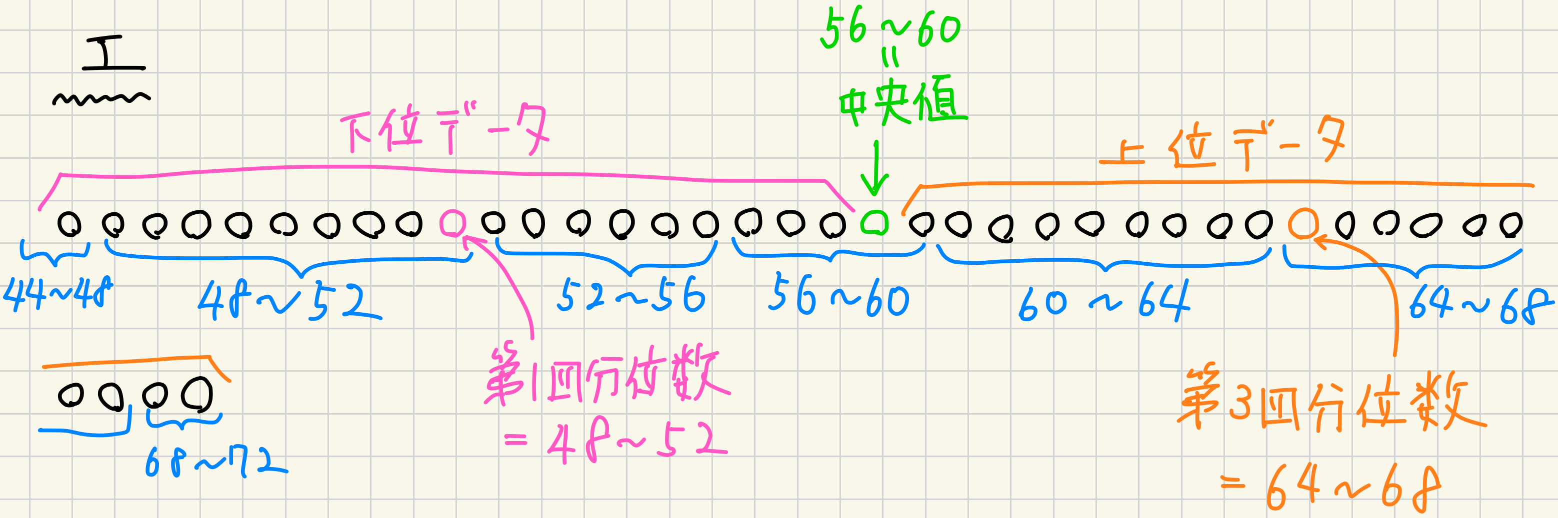
1組：最小値が40〜44回なので、ア、ウのいずれかである。
最大値が68〜72回なので、ア

2組：最小値が44〜48回なので、イ、エのいずれかである。

イ



エ



エは第1四分位数が48〜52、第3四分位数が64〜68なので、箱ひげ図と一致する。
よって答えはエ

1組：ア、2組：エ

(3)

大輔さん：1組の範囲 = 71 − 43 = 28回
(箱ひげ図)　2組の範囲 = 68 − 47 = 21回
よって1組の方が大きいので誤り.

由衣さん：1組の四分位範囲 = 60 − 51 = 9回
(箱ひげ図)　2組の四分位範囲 = 65 − 51 = 14回
よって2組の方が大きいので.正しい.

雄太さん：1組の64回以上 = 4 + 1 = 5回 (アより)
(ヒストグラム)　2組の64回以上 = 8 + 2 = 10回 (エより)
よって2組の方が大きいので正しい

恵子さん：アのヒストグラムより.平均値は.以下の通り.
(ヒストグラム)　〰：階級値

$$\frac{42\times1+46\times4+50\times5+54\times14+58\times4+62\times6+66\times4+70\times1}{39}$$

$$=\frac{42+184+250+756+232+372+264+70}{39}$$

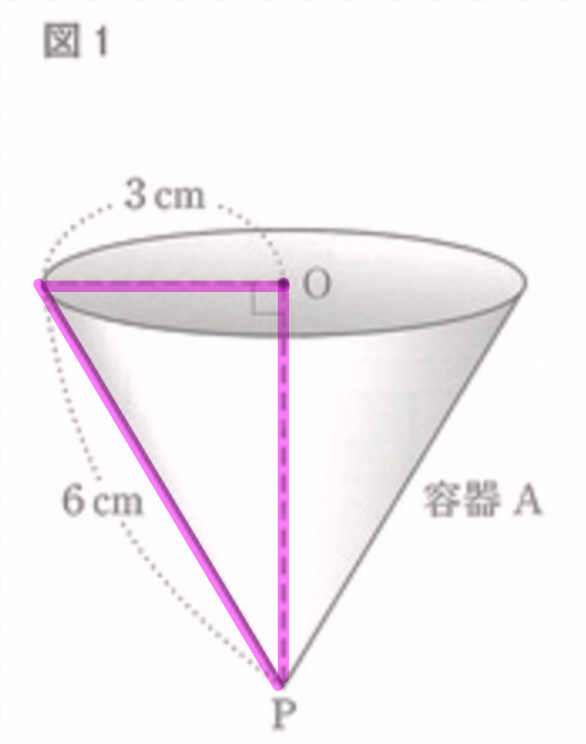
$$=\frac{2170}{39}$$

= 55.64…回
よって誤り

以上より.答えは.イ,ウ

4

(1)



三平方の定理より

$$OP = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

よって体積は

$$3 \times 3 \times \pi \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= 9\sqrt{3}\pi \ cm^3$$

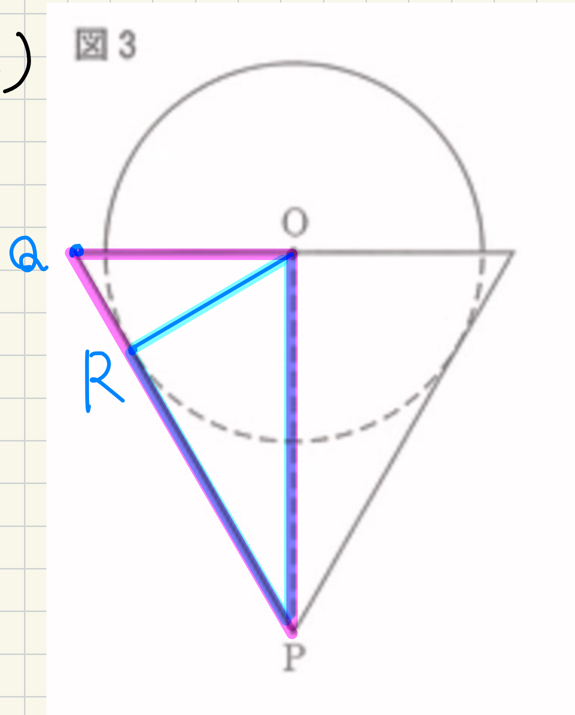
(2)

円すいの表面積 = 母線 × 底面の半径 × π

$$= 6 \times 3 \times \pi$$

$$= 18\pi \ cm^2$$

(3)



左図のように、Q, R をとる
※ R は容器 A と球 B 接点。

⇒ QP と円 O は接する

⇒ $\angle PRO = 90°$

△OPQ と△RPO において，

$\angle POQ = PRO = 90°$ —— ①

共通な角は等しいから

$\angle OPQ = \angle RPO$ —— ②

①，②より 2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OPQ \backsim \triangle RPO$

対応する辺の比は等しいから

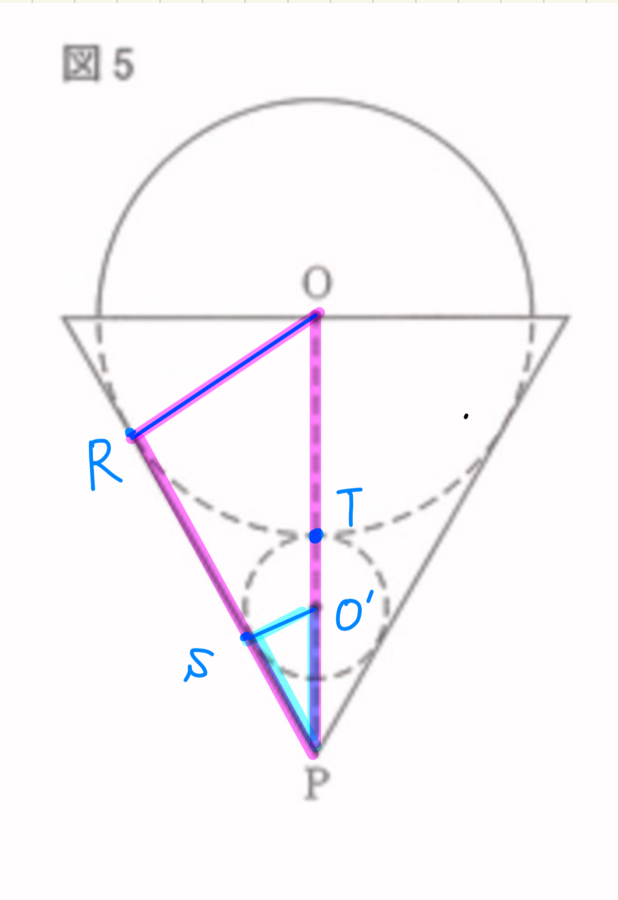
$\underbrace{OQ}_{3} : RO = \underbrace{PQ}_{6} : \underbrace{PO}_{3\sqrt{3}}$

よって

$6RO = 9\sqrt{3}$

$\therefore \underbrace{RO}_{\text{球Bの半径}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm

(4)



左図のように，R，S，T をとる。

また球 C の中心を O′ とする。

△ORP と△O′SP において，

$\angle ORP = \angle O'SP = 90°$ —— ①

共通な角は等しいから

$\angle OPR = \angle O'PS$ —— ②

①，②より 2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ORP \backsim \triangle O'SP$

対応する辺の比は等しいから

$$OR : O'S = OP : O'P \quad \text{——} \; ③$$

ここで

$$OP = 3\sqrt{3},\quad OT = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

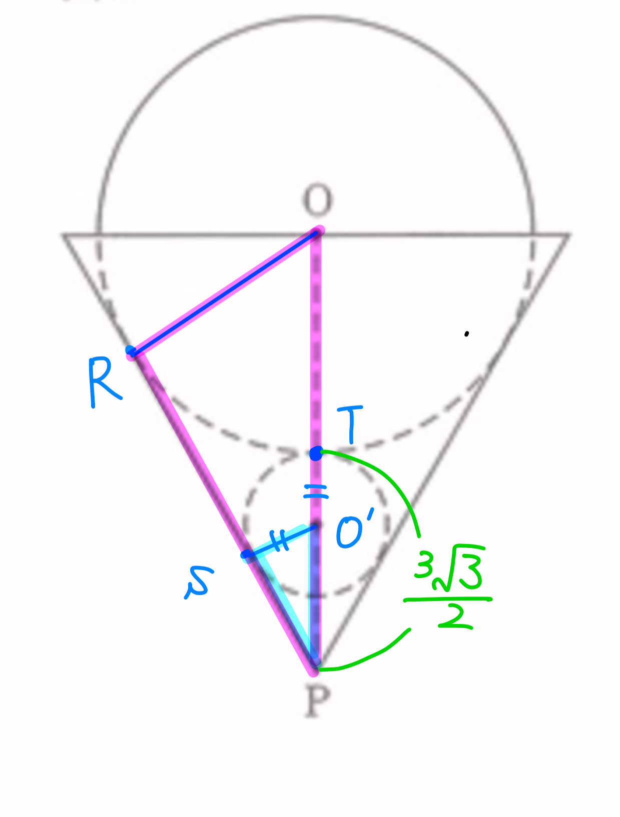
だから

$$TP = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

図 5



O'S と O'T は球Cの半径

だから

$$O'S = O'T$$

よって

$$O'P = \frac{3\sqrt{3}}{2} - O'T$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - O'S$$

したがって ③ から

$$\underbrace{OR}_{\frac{3\sqrt{3}}{2}} : O'S = \underbrace{OP}_{3\sqrt{3}} : \underbrace{O'P}_{\frac{3\sqrt{3}}{2} - O'S}$$

よって

$$3\sqrt{3}\,O'S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - O'S\right)$$

$$= \frac{9 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} O'S$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) O'S = \frac{9 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9\sqrt{3}}{2} O'S = \frac{9 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \ O'S = \frac{9 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{9\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \ \mathrm{cm}$$

したがって，球Cの体積は.

$$\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \ \mathrm{cm}^3$$

※半径 r の球の体積は.

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

$\boxed{5}$

(1) 点 A は. $y = 2x^2$ 上にあり. $x = 1$ なので.

$$y = 2 \times 1^2$$
$$= 2 \qquad \therefore A(1, 2)$$

直線OAの式を $y = ax$ とおくと. A(1, 2)を通るから

$$2 = a \times 1 \qquad \therefore a = 2$$

よって. 直線OA : $y = 2x$

点 B は 直線OA : $y = 2x$ 上にあり. $x = 4$ なので.

$$y = 2 \times 4$$
$$= 8 \qquad \therefore B(4, 8)$$

さらに, 点 B は $y = ax^2$ 上にあり. B(4, 8) を通るから

$$8 = a \times 4^2$$
$$16a = 8 \qquad \therefore a = \frac{1}{2}$$

(2) 点 C は $y = 2x^2$ 上にあり. $x = -1$ なので.

$$y = 2 \times (-1)^2$$
$$= 2 \qquad \therefore C(-1, 2)$$

直線BCの式を $y = mx + n$ とおくと, B(4, 8) C(−1, 2) を通るから

$$8 = 4m + n \quad \text{—— ①}$$
$$-)\ 2 = -m + n \quad \text{—— ②}$$
$$6 = 5m$$

$$m = \frac{6}{5}$$

$m = \frac{6}{5}$ を ②に代入して

$$2 = -\frac{6}{5} + n$$

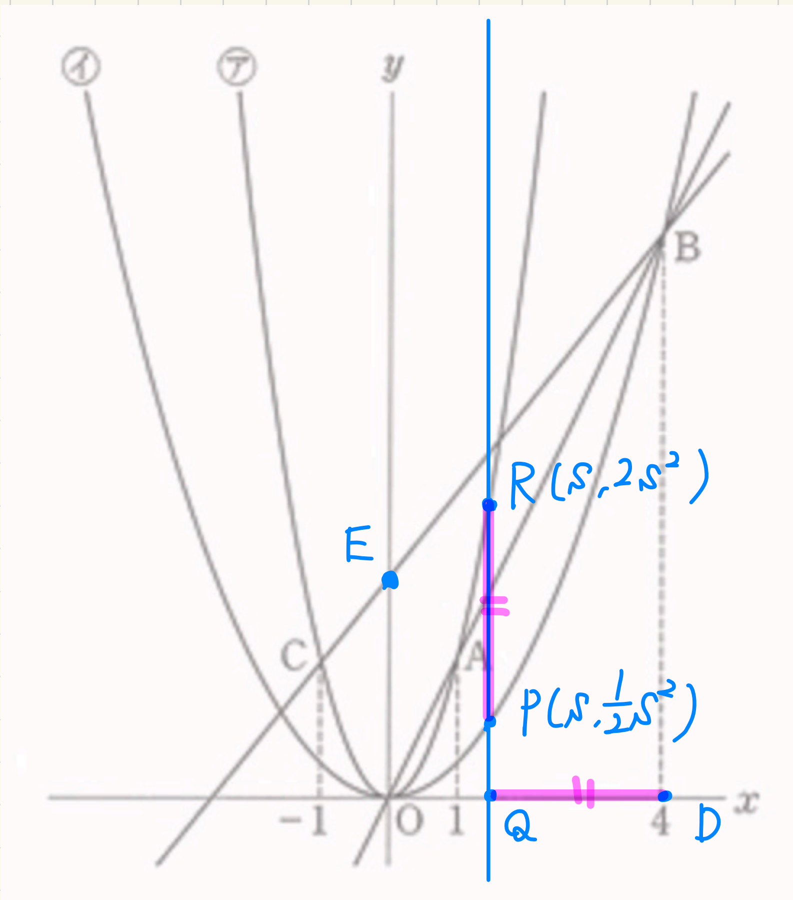
$$n = 2 + \frac{6}{5}$$

$$= \frac{16}{5}$$

よって、$y = \frac{6}{5}x + \frac{16}{5}$

(3)

①



点Pのx座標をsとする。

$QD = 4 - s$ —— ㋐

点Pは$y = \frac{1}{2}x^2$上にあり、$x = s$なので

$$y = \frac{1}{2}s^2$$

$\therefore$ $P\left(s, \frac{1}{2}s^2\right)$

点Rは$y=2x^2$上にあり、$x=s$（点Pのx座標と等しい）なので

$$y=2s^2 \qquad \therefore R(s,\ 2s^2)$$

よって

$$PR = 2s^2 - \frac{1}{2}s^2$$
$$= \frac{3}{2}s^2 \quad \text{——} \ ①$$

$PR=QD$より ㋐ $=$ ①。よって

$$\frac{3}{2}s^2 = 4-s$$
$$\Leftrightarrow \quad 3s^2 = 8-2s$$
$$\Leftrightarrow \quad 3s^2+2s-8=0$$

解の公式より

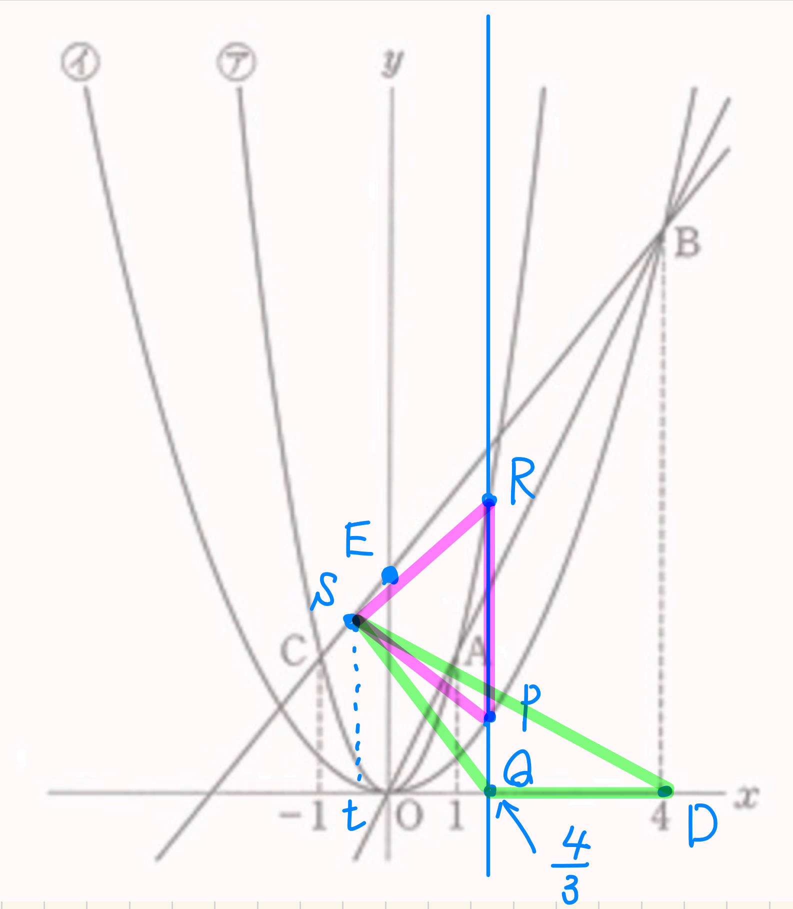
$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\times3\times(-8)}}{2\times3}$$
$$= \frac{-2\pm\sqrt{100}}{6}$$
$$= \frac{-2\pm10}{6}$$
$$= \frac{8}{6},\ -\frac{12}{6}$$
$$= \frac{4}{3},\ -2$$

点Pは O，B の間にあるから．$0 \leqq s \leqq 4$

よって $s = \frac{4}{3}$

したがって，点Pのx座標は $\frac{4}{3}$

②



$\triangle SPR$ と $\triangle SQD$ において，底辺をそれぞれ PR，QD とすると，PR = QD であるから．面積比は高さの比と等しい。よって．

$\triangle SPR$ の高さ

$= \frac{5}{6} \times \triangle SQD$ の高さ．

点Sのx座標をtとすると，点Sは $y = \frac{6}{5}x + \frac{16}{5}$ 上にあるから

$$y = \frac{6}{5}t + \frac{16}{5} \qquad \therefore S\left(t, \frac{6}{5}t + \frac{16}{5}\right)$$

$\triangle SPR$ の高さ $= \frac{4}{3} - t$

$\triangle SQD$ の高さ $= \frac{6}{5}t + \frac{16}{5}$

であるから

$$\frac{4}{3} - t = \frac{5}{6}\left(\frac{6}{5}t + \frac{16}{5}\right)$$

$$= t + \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad -t - t = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}$$

$$-2t = \frac{4}{3}$$

$$\therefore t = -\frac{2}{3}$$

$t = -\frac{2}{3}$ を $y = \frac{6}{5}x + \frac{16}{5}$ に代入して

$$y = \frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{16}{5}$$

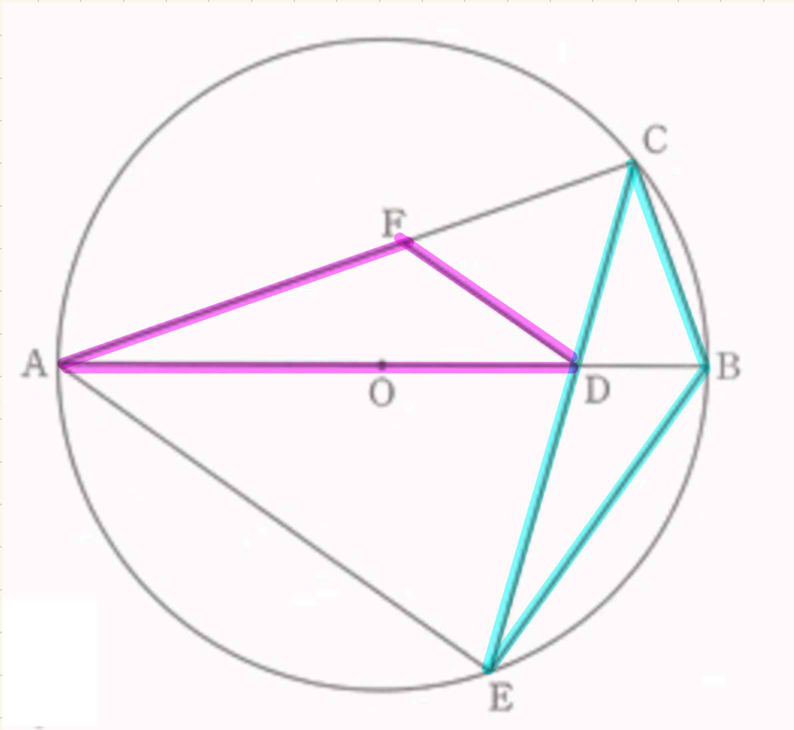
$$= -\frac{4}{5} + \frac{16}{5}$$

$$= \frac{12}{5}$$

よって、S の座標は $\left(-\frac{2}{3}, \frac{12}{5}\right)$

$\boxed{6}$

(1)



△ADFと△ECBにおいて、

∠FADと∠BECは$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角だから

$\angle FAD = \angle BEC$ —— ①

AE // FDより錯角が等しいから

$\angle EAB = \angle FDA$ —— ②

∠EABと∠BCEは$\overset{\frown}{BE}$に対する円周角だから

$\angle EAB = \angle BCE$ —— ③

②、③より

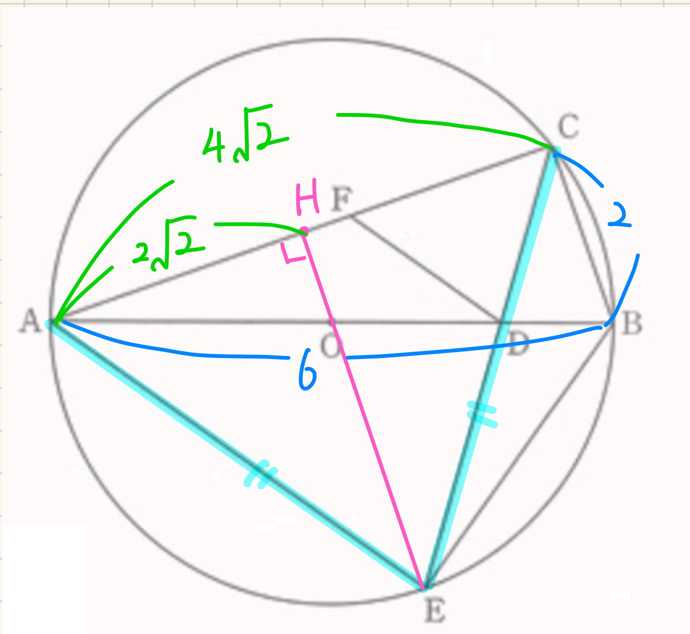
$\angle FDA = \angle BCE$ —— ④

①、④より2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle ADF \sim \triangle ECB$ (証明終わり)

(2)

①



∠ACBは直径に対する円周角なので、

$\angle ACB = 90°$

△ABCで三平方の定理より

$AC = \sqrt{6^2 - 2^2}$ $= \sqrt{36-4}$ $= \sqrt{32}$ $= 4\sqrt{2}$

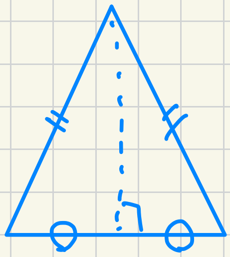
$= 4\sqrt{2}$

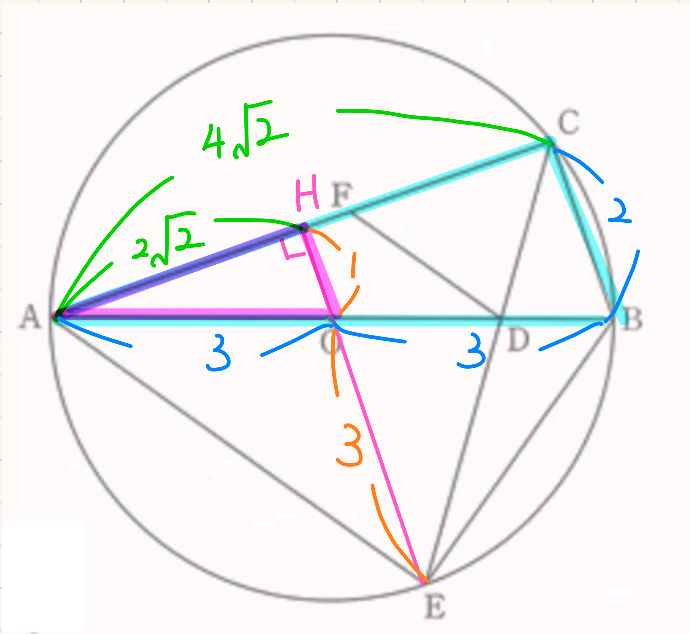
点EからACに垂線を下ろした足をHとする.
△AECはAE=ECの二等辺三角形だから.

$$AH = CH$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$





△AOHと△ABCにおいて.
共通な角は等しいから

$$\angle HAO = \angle CAB \text{ — ㋐}$$

また,

$$\angle AHO = \angle ACB = 90^\circ \text{ — ㋑}$$

㋐,㋑より2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AOH \sim \triangle ABC$$

対応する辺の比は等しいから

$$OH : \underbrace{BC}_{2} = \underbrace{AH}_{2\sqrt{2}} : \underbrace{AC}_{4\sqrt{2}}$$

$$\therefore 4\sqrt{2}\,OH = 4\sqrt{2}$$

$$OH = 1\text{ cm}$$

OEは円の半径だから. $OE = 3\text{cm}$
よって

$$EH = 3 + 1$$

$$= 4\text{ cm}$$

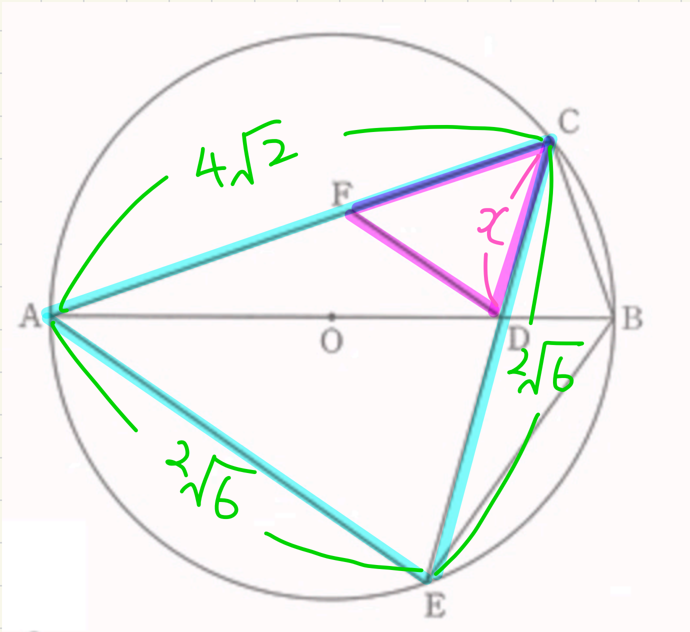
△AEHで三平方の定理より

$$AE = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{16 + 8} \quad = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{6}\ \text{cm}$$

② 難問



△CFDと△CAEにおいて，ED∥AEより同位角が等しいから

∠CFD = ∠CAE ―― ㋐

∠CDF = ∠CEA ―― ㋑

㋐，㋑より2組の角がそれぞれ等しいので

△CFD ∽ △CAE

対応する辺の比は等しいから

CD : CE = CF : CA

CD = x cm とおくと，

$$x : \underbrace{2\sqrt{6}}_{AE=CE より} = CF : 4\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{6}\,CF = 4\sqrt{2}\,x$$

$$CF = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}x$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

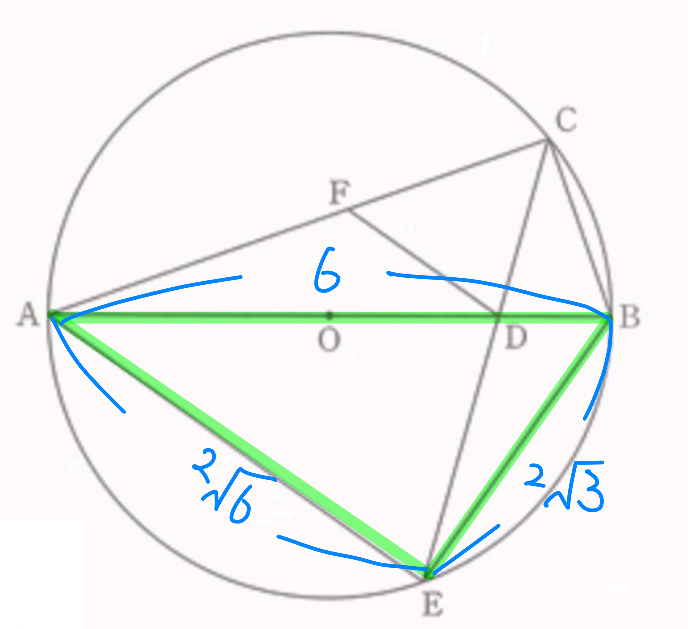
$$= \frac{2\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

よって

$$AF = CA - CF$$

$$= 4\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$



∠AEBは直径に対する円周角だから

$$\angle AEB = 90^\circ$$

よって、△AEBで三平方の定理より

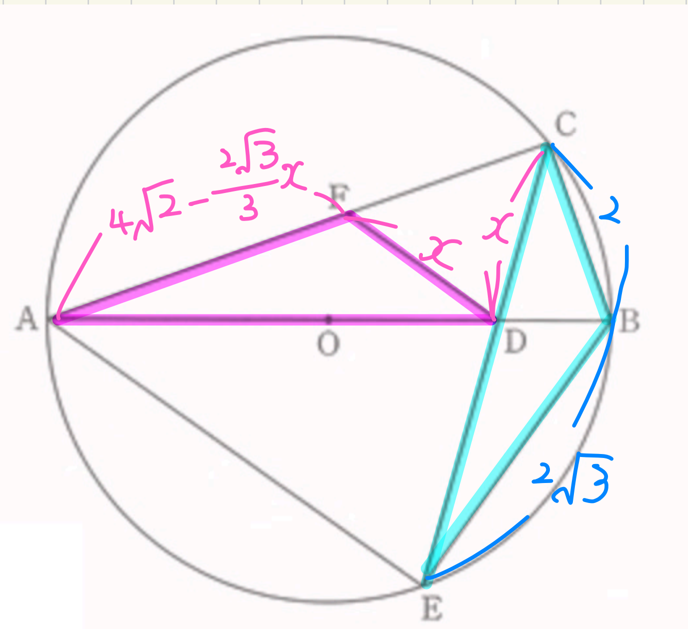
$$BE = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{6})^2}$$

$$= \sqrt{36-24}$$

$$= \sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$



△CFD ∽ △CAEで、

△CAEは、AE = ECの二等辺三角形だから

△CFDもFD = DCの二等辺三角形。よって

$$FD = x.$$

(1) より $\triangle ADF \backsim \triangle ECB$ だから

$$\underbrace{AF}_{4\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}x} : \underbrace{EB}_{2\sqrt{3}} = \underbrace{DF}_{x} : \underbrace{CB}_{2} \quad \text{—— ⑦}$$

よって

$$2\sqrt{3}x = 2\left(4\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)$$

両辺 ÷ 2

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x = 4\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}x = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\sqrt{3}}{3}x = 4\sqrt{2}$$

よって

$$x = 4\sqrt{2} \times \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$$

$$\frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12\sqrt{6}}{5 \times 3} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

よって、⑦ より $\triangle ADF$ と $\triangle ECB$ の相似比は、

$$DF : CB = \frac{4\sqrt{6}}{5} : 2$$

式を整理して

$$DF : CB = \frac{2\sqrt{6}}{5} : 1$$

$$= 2\sqrt{6} : 5$$

相似な三角形の面積比は、相似比の2乗に等しいから

$$\triangle ADF : \triangle ECB = (2\sqrt{6})^2 : 5^2$$

$$= 24 : 25$$

よって

$$25\triangle ADF = 24\triangle ECB$$

$$\therefore \triangle ADF = \frac{24}{25}\triangle ECB$$

したがって、$\triangle ADF$ の面積は、$\triangle ECB$ の面積の $\frac{24}{25}$ 倍