2023年度　奈良県

数学

Km Km

$\boxed{1}$

(1)

① 与式 $= 7 + 6$
$= 13$

② 与式 $= 15 + 16 \div (-2)$
$= 15 - 8$
$= 7$

③ 与式 $= x^2 - 3x - 10 - 2x + 2$
$= x^2 - 5x - 8$

④ 与式 $= \sqrt{12} - \sqrt{27}$
$= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$
$= -\sqrt{3}$

(2) $\begin{cases} x + 4y = 5 & \text{—— ①} \\ 4x + 7y = -16 & \text{—— ②} \end{cases}$

① × 4 − ② より

$$\begin{array}{rr} & 4x + 16y = 20 \\ -) & 4x + 7y = -16 \\ \hline & 9y = 36 \\ & y = 4 \end{array}$$

$y = 4$ を①に代入して

$x + 4 \times 4 = 5$
$\therefore x = -11$

よって, $x = -11,\ y = 4$

(3) 解の公式より

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

(4) 具体的な数で考えてみる.

$a<0$, $b<0$ より, $a=-1$, $b=-2$ とすると.

$a+b = -1-2 = -3$

$a-b = -1-(-2) = 1$

$ab = -1 \times (-2) = 2$

$$\frac{a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

よって, 式の値が最も小さくなるのは. $a+b$

(5) 相似な立体の体積比は.相似比の3乗に等しいので.

$\underbrace{\text{三角すいA}}_{24}$: 三角すいB $= 2^3 : 3^3$

$= 8 : 27$

よって

24 : 三角すいB $= 8 : 27$

$8 \times$ 三角すいB $= 24 \times 27$

三角すいB $= \dfrac{24 \times 27}{8}$

$= 3 \times 27 = 81\ \text{cm}^3$

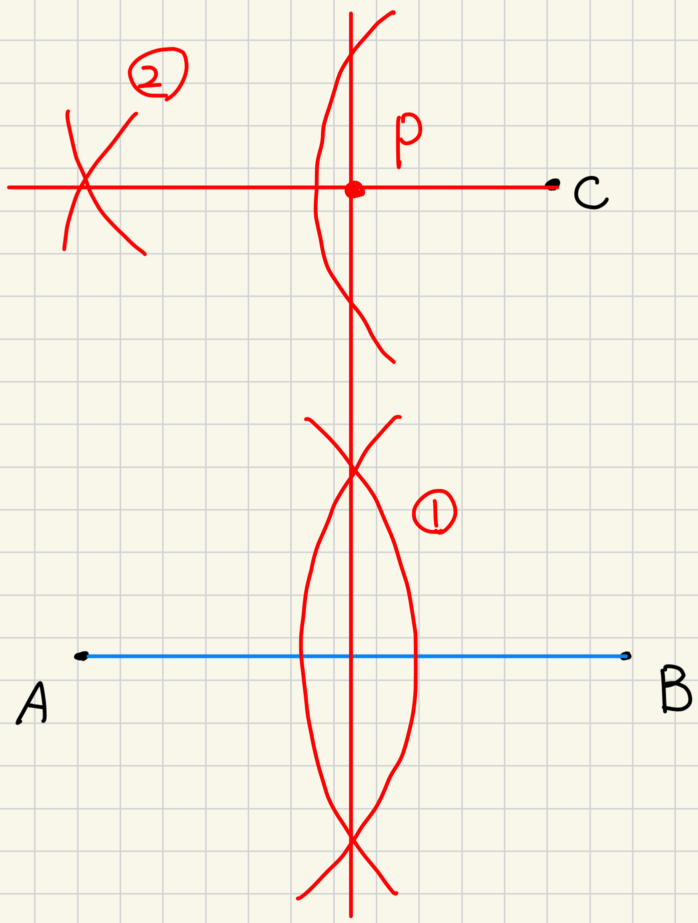
(6) 樹形図は以下の通り

1	2	3	P
表	表	表	3
表	表	裏	0
表	裏	表	0
表	裏	裏	−3

1	2	3	P
裏	表	表	0
裏	表	裏	−3
裏	裏	表	−3
裏	裏	裏	−6

よって、求める確率は $\frac{3}{8}$

(7)

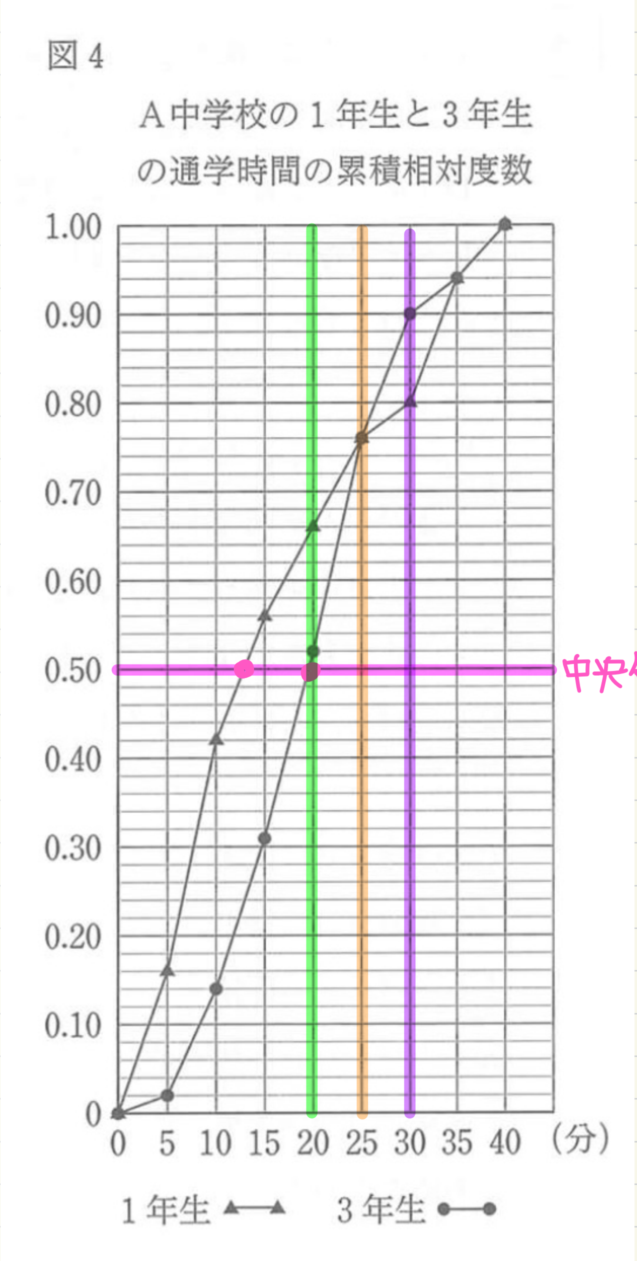


① ABの垂直二等分線を描く

② Cを通り①と垂直な線を描く

③ ①と②の交点がP.

(8)



ア：1年生の中央値は
10～15分

3年生の中央値は
15～20分

よって、3年生の中央値の方が大きいので
誤り

イ：1年生の20分未満の生徒の割合は0.70

3年生の20分未満の生徒の割合は 0.52
よって、1年生も3年生も20分未満の生徒は半分以上いるので正しい

ウ：1年生の25分未満の生徒の割合は0.76で
75人いるので
$75 \times 0.76 = 57$人

3年生の25分未満の生徒の割合は0.76で
90人いるので
$90 \times 0.76 = 68.4$人

よって3年生の方が多いので誤り

エ：1年生の25分未満の割合は0.76、30分未満の割合は、0.80なので、25分以上30分未満の生徒の割合は、

$$0.80 - 0.76 = 0.04$$

生徒は75人いるので、

$$75 \times 0.04 = 3人$$

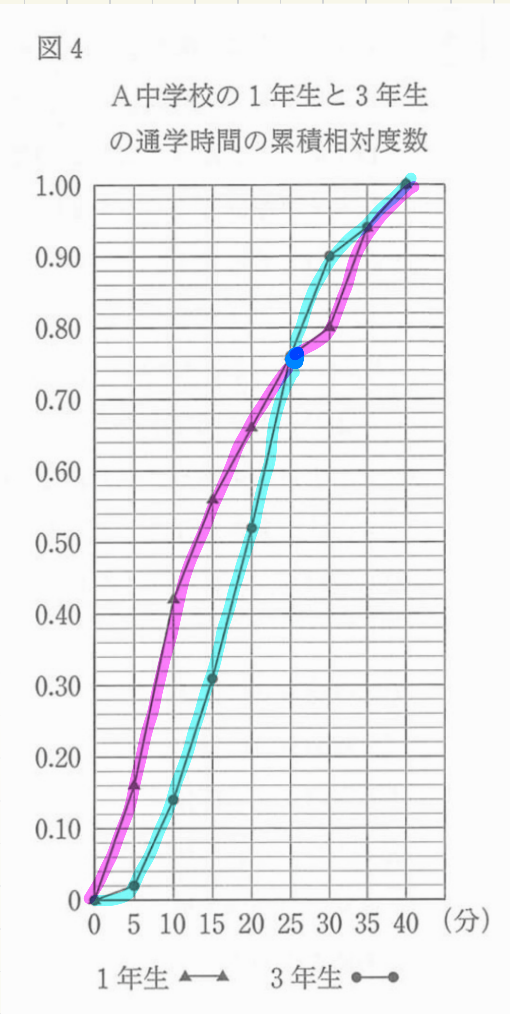
3年生の25分未満の割合は0.76、30分未満の割合は、0.90なので、25分以上30分未満の生徒の割合は、

$$0.90 - 0.76 = 0.14$$

生徒は90人いるので、

$$90 \times 0.14 = 12.6人$$

よって3年生の方が多いから正しい

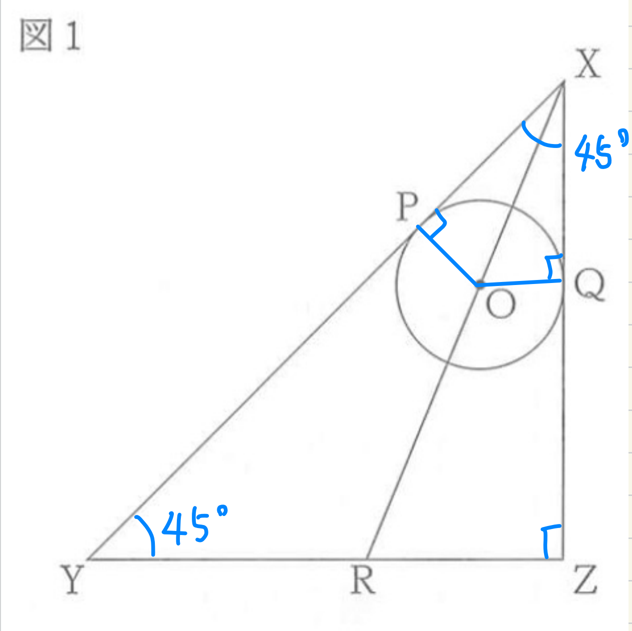


オ：グラフが左ほど通学時間は短い。
累積相対度数が0.76より小さいところでは、全体的に1年生の方が短い。
0.76を超えると、3年生の方が短いが、全体の傾向としては、1年生の方が短い。
よって正しい。

以上より、答えは、イ、エ、オ

$\boxed{2}$

(1) ①

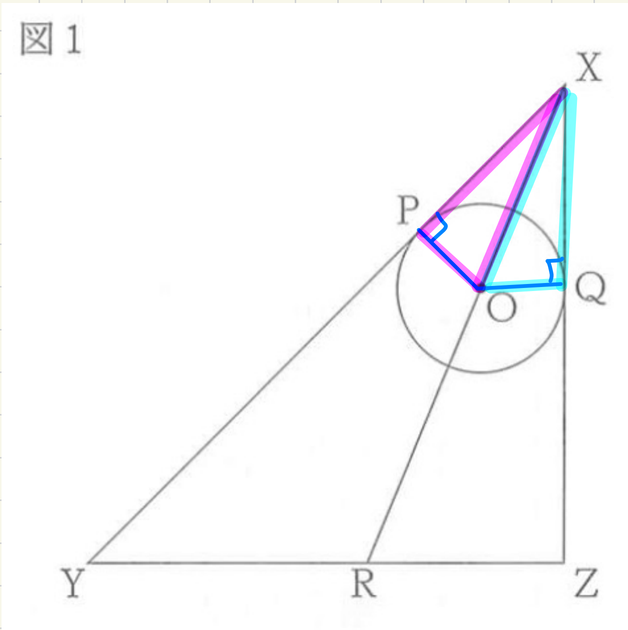


$\triangle XYZ$ は $XZ = YZ$,
$\angle XZY = 90°$ なので、
直角二等辺三角形。
$\therefore \angle YXZ = 45°$

また、XY, XZ は円 O の
接線なので、
$OP \perp XY$, $OQ \perp YZ$

□$XPOQ$ の内角の和は $360°$ なので
$$\angle POQ = 360° - (45° + 90° + 90°)$$
$$= 135°$$

②



$\triangle XPO$ と $\triangle XQO$ において、
共通な辺は等しいから
$XO = XO$ ― ①
OP, OQ は円の半径だから
$OP = OQ$ ― ②
$OP \perp XY$, $OQ \perp XZ$ より
$\angle XPO = \angle XQO = 90°$ ― ③

①、②、③より直角三角形の斜辺と他の一辺が
それぞれ等しいので
$$\triangle XPO \equiv \triangle XQO$$

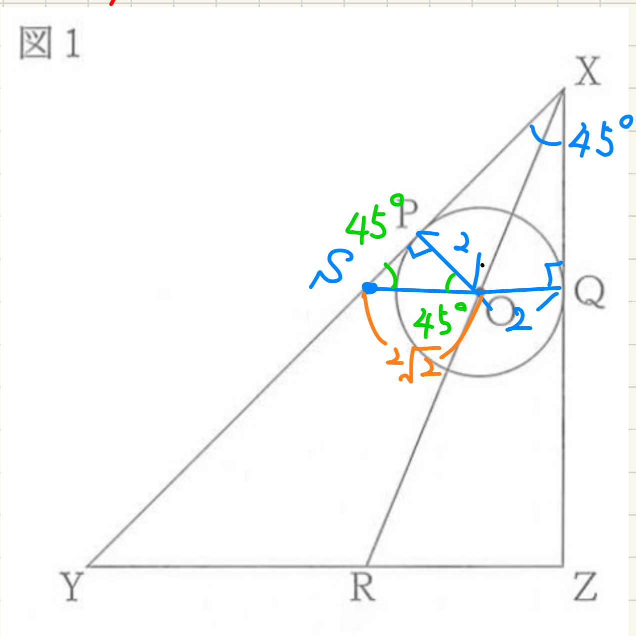
対応する角は等しいから

$\angle PXO = \angle QXO$

よって、XRは$\angle YXZ$の二等分線だから

二辺XY、XZから距離が等しい点

③ 難問



XPとOQの延長の交点をSとする.

$\triangle XSQ$の内角の和は180°だから

$\angle XSQ = 180° - (90° + 45°)$

$= 45°$

$\triangle PSO$の内角の和は180°だから

$\angle SOP = 180° - (90° + 45°)$

$= 45°$

したがって、$\triangle PSO$は45°−45°−90°の直角三角形なので.

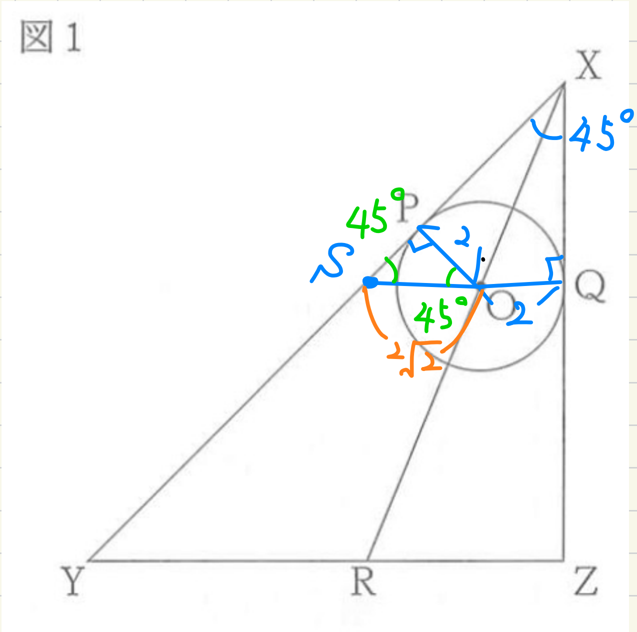
$\underbrace{PO}_{2} : PS : OS = 1 : 1 : \sqrt{2}$

$\therefore 2 : OS = 1 : \sqrt{2}$

$OS = 2\sqrt{2}$ cm

よって.

$SQ = 2 + 2\sqrt{2}$ cm



△XSQは直角二等辺三角形だから

$SQ = XQ$

②より△XPO≡△XQOより

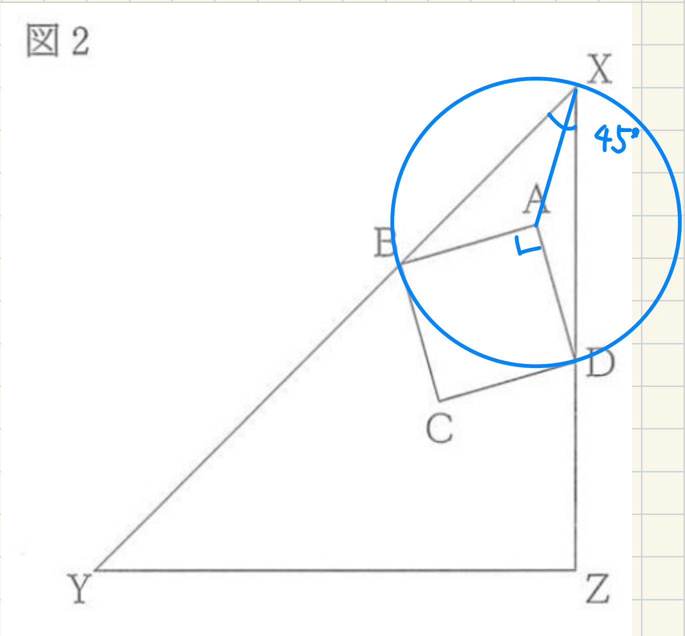
対辺する辺の長さは等しいから

$XP = XQ$

$\therefore XP = 2 + 2\sqrt{2}$ cm

(2)

①



$\angle BAD = 90°$, $\angle BXD = 45°$ より、

$\angle BAD = 2\angle BXD$

よって、∠BADは中心角、∠BXDは円周角となっている。

よって、X, B, DはAを中心とした円の周上にある。

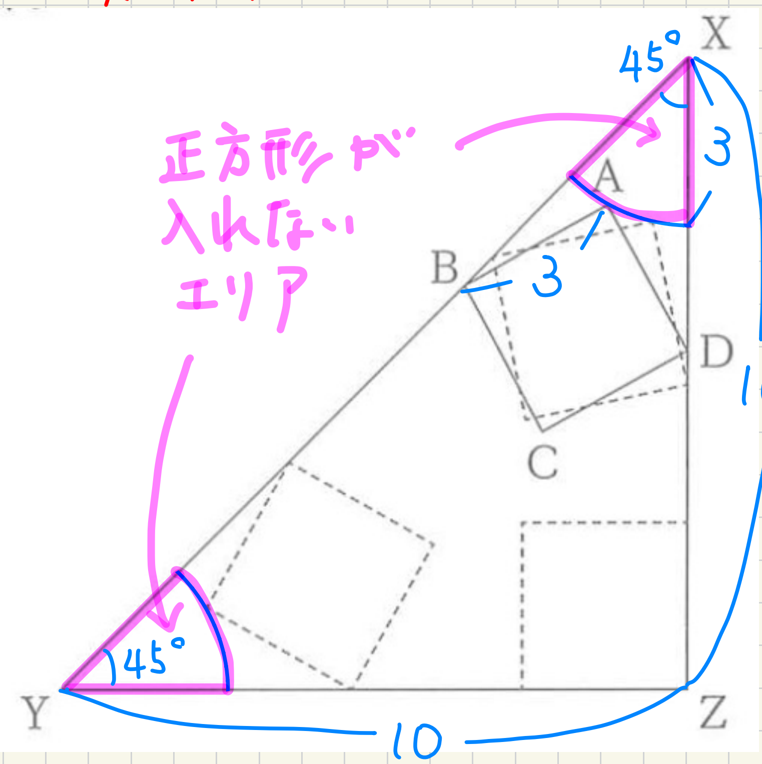
AX, AB, ADは円Aの半径なので

$AX = AB = AD$

AB, ADは正方形の一辺の長さなので、2点X, Aの距離は、正方形ABCDの1辺の長さに等しい。

イ

② 難問



花子さんの会話より、
「正方形ABCDが動いて、辺XY，XZ上の2点B，Dの位置が変わっても，2点X，A間の距離について同じことが言える」
⇒XAは正方形ABCDの一辺の長さ

したがって，上図のピンクのエリアは正方形ABCDが入れず，他のエリアは全て入ることができる。
よって，求める面積は

$\triangle XYZ - \text{◸} - \text{◺}$

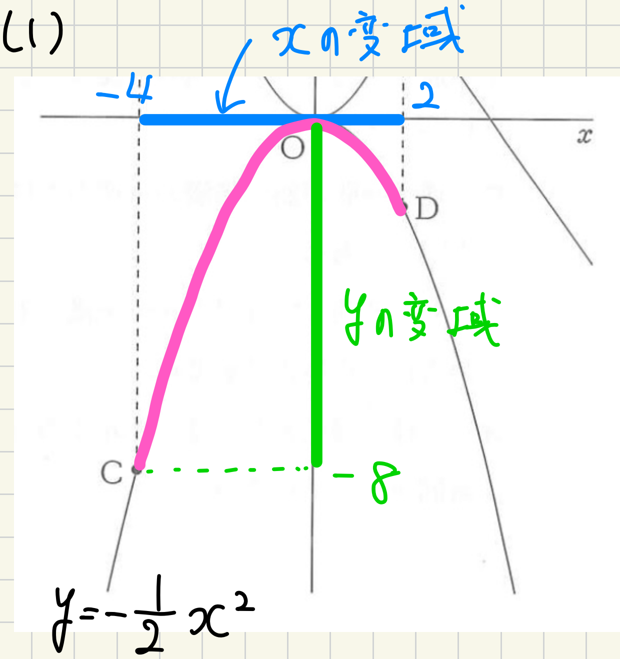
$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 - 3 \times 3 \times \pi \times \frac{45^\circ}{360^\circ} - 3 \times 3 \times \pi \times \frac{45^\circ}{360^\circ}$$

$$= 50 - \frac{9\pi}{8} - \frac{9\pi}{8}$$

$$= 50 - \frac{9}{4}\pi \quad cm^2$$

3

(1)



左図より、$x=-4$のとき、

$$y=-\frac{1}{2}\times(-4)^2$$
$$=-8$$

よって

$$-8\leqq y\leqq 0$$

(2) 点Dは$y=-\frac{1}{2}x^2$上にあり、$x=2$なので、

$$y=-\frac{1}{2}\times 2^2$$
$$=-2 \qquad \therefore D(2,-2)$$

よって、C$(-4,-8)$、D$(2,-2)$を通る直線の式を
$y=ax+b$とおくと、

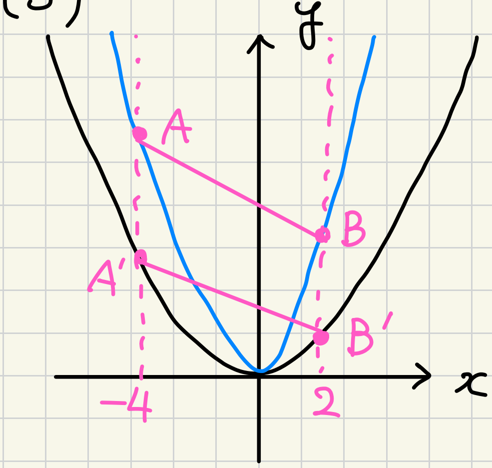
$$-8=-4a+b \quad — ①$$
$$-)\ -2=2a+b \quad — ②$$
$$-6=-6a$$
$$a=1$$

$a=1$を②に代入して

$$-2=2\times1+b \quad\Rightarrow\quad b=-4$$

よって、$y=x-4$

(3)

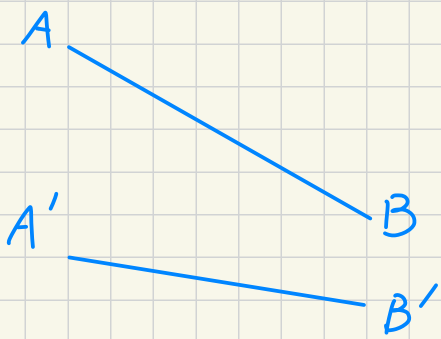


aの値が大きくなると、グラフの開きが狭くなる
⇒黒のグラフと青のグラフでは、青のグラフの方がaの値は大きい。

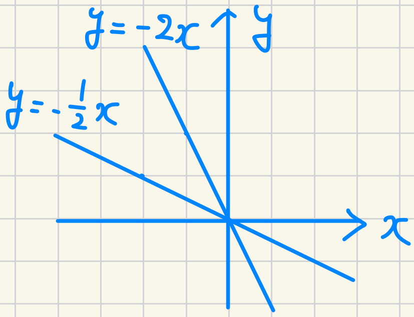
ABの傾きは負なので、aの値が大きくなると、ABの傾きは小さくなる。

ア

注



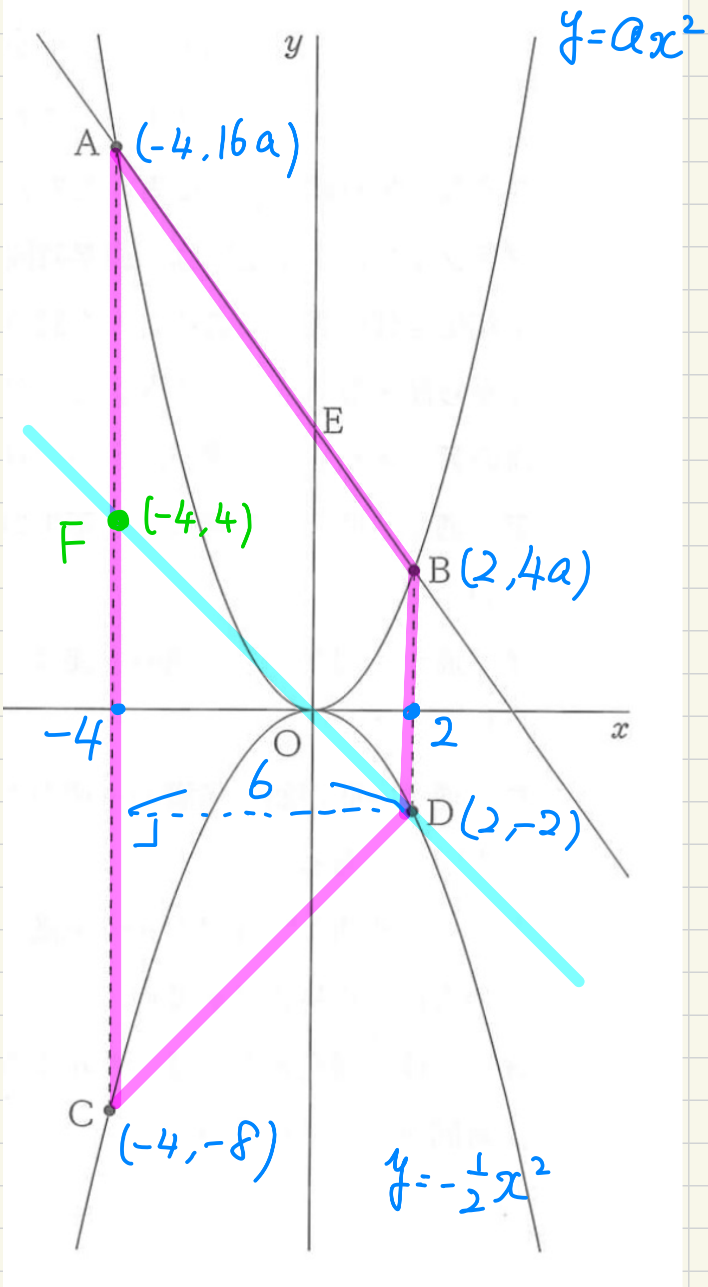
直線ABと直線A'B'では、直線ABの方が急である。



左図のように、$y=-2x$ と $y=-\frac{1}{2}x$ では、$y=-2x$ の方が急である。

$-2<-\frac{1}{2}$ より
傾きが負のときは、傾きが小さいほど急なグラフになる。

(4)



A, B, C, D の各座標は左図の通り。

$$AC = 16a - (-8) = 16a + 8 = 8(2a+1)$$

$$BD = 4a - (-2) = 4a + 2 = 2(a+1)$$

よって、□ACDB の面積は

$$\frac{\{8(2a+1)+2(a+1)\} \times 6}{2} = (16a+8+4a+2) \times 3 = 60a + 30$$

OD と AC の交点を F とする。

OD が □ACDB の面積を2等分するので、△FCD は、□ACDB の面積の半分になれば良い。

$$\therefore \triangle FCD = \frac{1}{2} \times (60a + 30)$$

$$= 30a + 15 \quad ―― ①$$

直線 OD の式を $y = mx$ とおくと、D$(2, -2)$ を通るので

$$-2 = 2m \quad \therefore m = -1$$

よって、OD : $y = -x$

点Fは $y=-x$ 上にあり、$x=-4$ なので

$$y=-(-4)$$
$$=4.$$

$\therefore F(-4,4)$

よって、

$$FC=4-(-8)=12$$

より△FCDの面積は

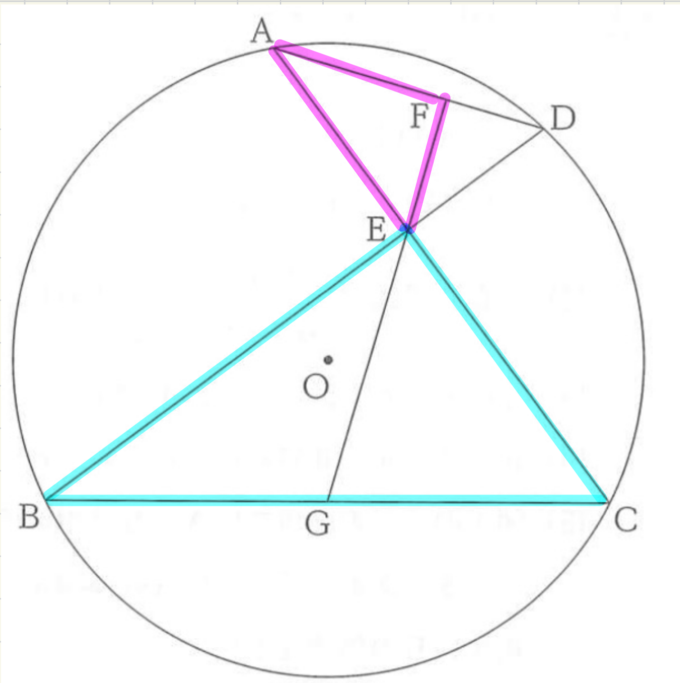
$$\triangle FCD=\frac{1}{2}\times12\times6$$
$$=36 \quad —— ②$$

① = ② より

$$30a+15=36$$
$$30a=21$$
$$\therefore a=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$$

$\boxed{4}$

(1)



△AEFと△BCEにおいて、

仮定から

$\angle AFE=90°$ —— ①

$\angle BEC=90°$ —— ②

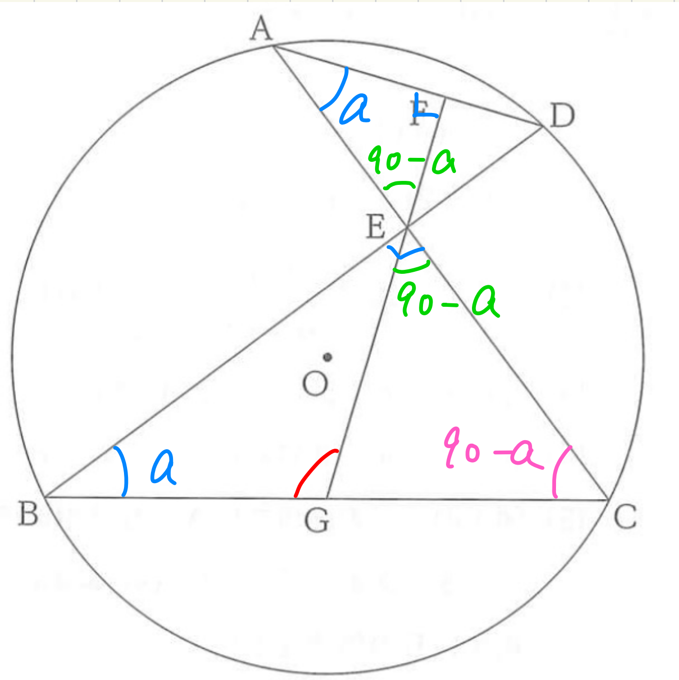
①,② より

$\angle AFE=\angle BEC$ —— ③

1つの弧に対する円周角は等しいから

$\angle EAF = \angle CBE$ ―― ④
③, ④より2組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle AEF \backsim \triangle BCE$ (証明終わり)

(2)



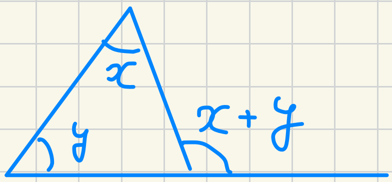
$\triangle AEF$の内角の和は$180°$で、$\angle DAE = a$, $\angle AFE = 90°$だから

$\angle AEF = 180° - 90° - a$
$= 90° - a$

対頂角は等しいから
$\angle GEC = \angle AEF$
$\therefore \angle GEC = 90° - a$

$\triangle BCE$の内角の和は$180°$で、$\angle EBC = a$, $\angle BEC = 90°$だから

$\angle BCE = 180° - 90° - a$
$= 90° - a$

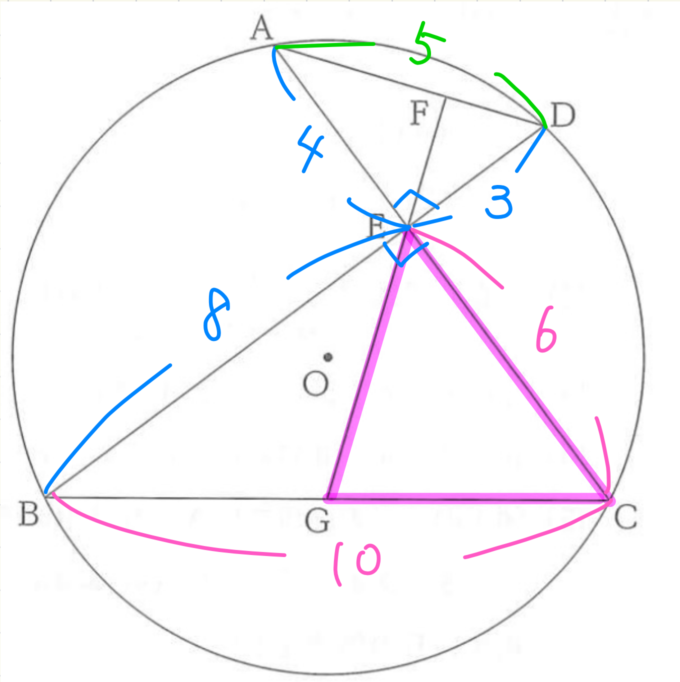


$\triangle EGC$で外角の定理より

$\angle BGE = 90° - a + 90° - a$
$= 180° - 2a$

(3)

①



△AEDで三平方の定理より

$AD = \sqrt{4^2+3^2}$ $= \sqrt{16+9}$

$= 5$ $= \sqrt{25} = 5$

△AEDと△BECにおいて、

$\overset{\frown}{DC}$に対する円周角は等しいから

∠EAD = ∠EBC ― ①

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから

∠ADE = ∠BCE ― ②

①、②より2組の角がそれぞれ等しいから

△AED ∽ △BEC

△AEDは3:4:5の三角形なので、△BECも3:4:5の三角形である。よって、

EC : BE : BC = 3 : 4 : 5

(BE = 8)

・EC : 8 = 3 : 4

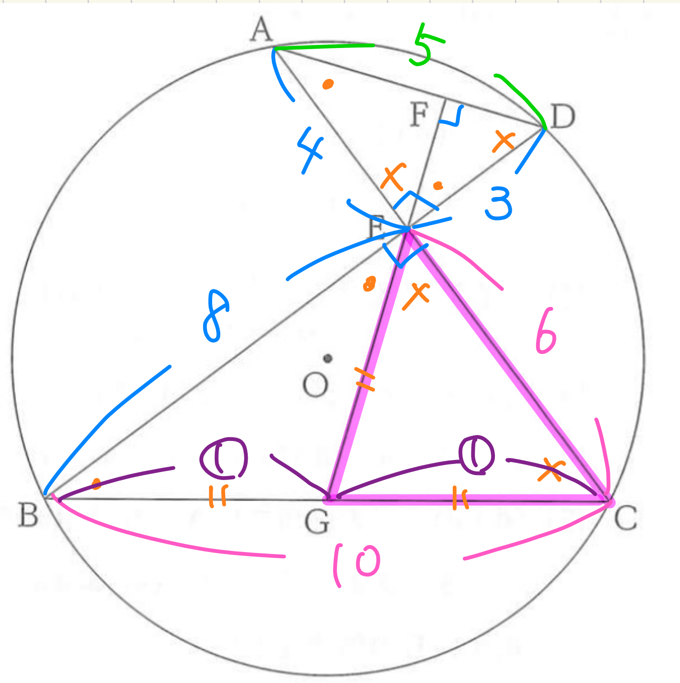
4EC = 24

EC = 6

・8 : BC = 4 : 5

4BC = 40

BC = 10



$\angle EAD = \bullet$, $\angle AEF = x$
と書くこととすると、

$\triangle AEF$は直角三角形なので

$\bullet + x = 90^\circ$

$\angle FED = 90^\circ - x$
$= \bullet$

$\angle EDF = 90^\circ - \bullet$
$= x$

対頂角は等しいから

$\angle AEF = \angle CFG \Rightarrow \angle CFG = x$

$\angle FED = \angle GEB \Rightarrow \angle GEB = \bullet$

$\overset{\frown}{DC}$に対する円周角は等しいから

$\angle EAD = \angle DBC \Rightarrow \angle DBC = \bullet$

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから

$\angle EDF = \angle ACB \Rightarrow \angle ACB = x$

よって、$\triangle BGE$, $\triangle EGC$は二等辺三角形である。

$\triangle BGE$より $BG = EG$

$\triangle EGC$より $EG = GC$

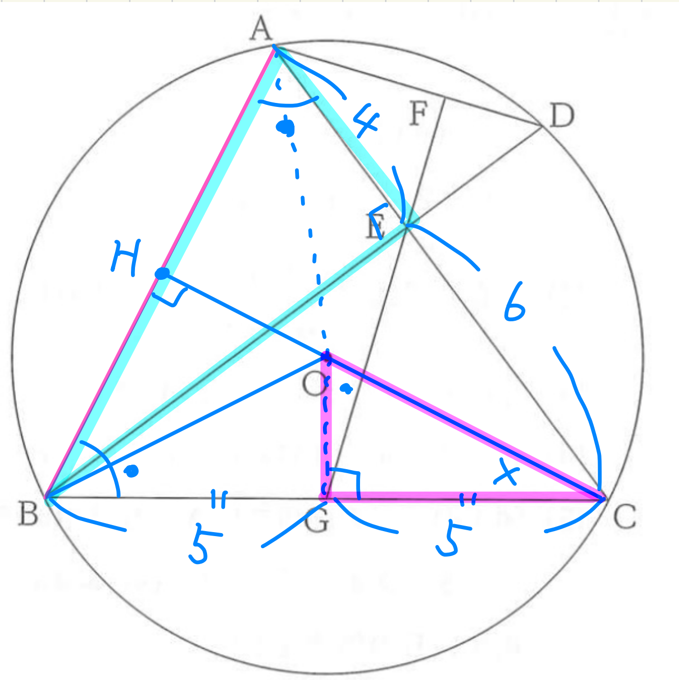
よって、$BG = GC \Rightarrow$ 点GはBCの中点

$\triangle EBC = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ である。$\triangle BCG$と$\triangle FGC$において、底辺をBC、GCとすると、高さが等しいので、面積比は底辺比と等しい。よって

$\underbrace{\triangle EBC}_{24} : \triangle CEG = 2 : 1$

$2\triangle CEG = 24 \quad \therefore \triangle CEG = 12\text{cm}^2$

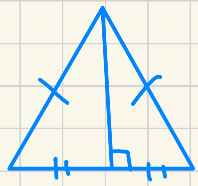
② 難問



補助線ABを引き, ABの中点をHとする.
このとき, OA = OB より, 点O は CH上にある.
また, △ABCは, AC = BC = 10 の二等辺三角形だから,

CH ⊥ AB

である



△OGCと△AEBにおいて

$\angle OGC = 90^\circ$, $\angle AEB = 90^\circ$ より

$\angle OGC = \angle AEB$ —— ①

$\angle OCG = x$, $\angle COG = \bullet$ と書くことにすると.

△OGCの内角の和は180°なので.

$\bullet + x + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \bullet + x = 180^\circ$

△BCHの内角の和は180°なので.

$\angle HBC = 180^\circ - 90^\circ - x$
$= 90^\circ - x$
$= \bullet$

△ABCは二等辺三角形なので. 底角が等しいから

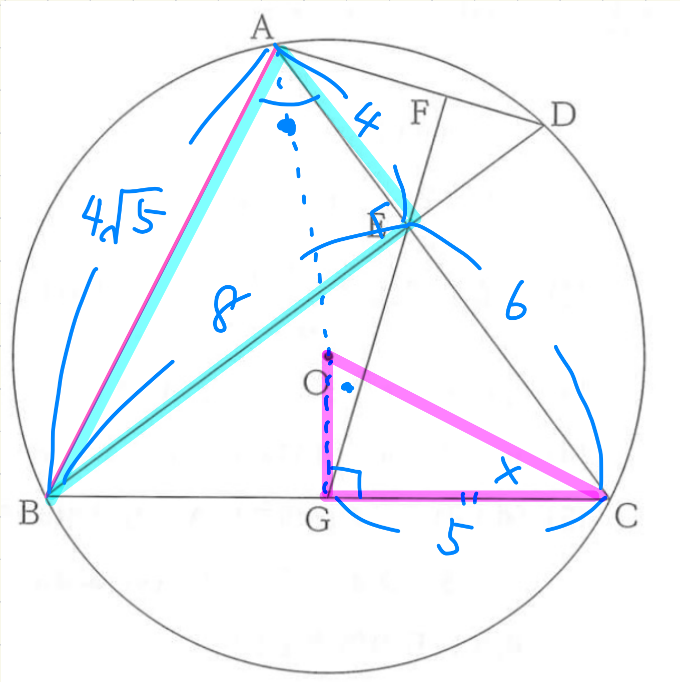
$\angle HBC = \angle CAB \Rightarrow \angle CAB = \bullet$

よって.

$\angle COG = \angle BAE$ —— ②

①, ②より2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OGC \sim \triangle AEB$ —— ③



$\triangle AEB$で三平方の定理より

$AB=\sqrt{8^2+4^2}$ $=\sqrt{64+16}$

$=4\sqrt{5}$ cm $=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

③より対応する辺の比は等しいから

$\underbrace{GC}_{5}:\underbrace{EB}_{8}=OC:\underbrace{AB}_{4\sqrt{5}}$

よって

$8OC=20\sqrt{5}$

$OC=\frac{20}{8}\sqrt{5}$

$=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm