2024年度　愛知県

数学

Km Km

1.

(1) 与式 $= -12-(-2)$

$= -12+2$

$= -10$ イ

(2) 与式 $= \dfrac{3(-2x+1)-4(x-3)}{12}$

$= \dfrac{-6x+3-4x+12}{12}$

$= \dfrac{-10x+15}{12}$ ウ

(3) 与式 $= 6a^2b \times \dfrac{3}{2ab} - 12ab^2 \times \dfrac{3}{2ab}$

$= 9a-18b$ エ

(4) $x^2+xy-y^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$- (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

$= 3+2\sqrt{6}+2+3-2-(3-2\sqrt{6}+2)$

$= 3+2\sqrt{6}+2+3-2-3+2\sqrt{6}-2$

$= 4\sqrt{6}+1$ ウ

(5) 式を整理して.

$$x^2+6x+9-11=5x+10$$

$\Leftrightarrow\ x^2+x-12=0$

$\Leftrightarrow\ (x+4)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-4,\ 3$ イ

(6) $3a+2b<900$ イ

注 ～以下 ⇒ $\leqq$, ～より小さい ⇒ $<$.

(7) y が x に反比例するので. $y=\dfrac{a}{x}$ とおく.

$x=4,\ y=3$ を代入して

$3=\dfrac{a}{4}\quad \therefore\ a=12$

よって. $y=\dfrac{12}{x}$

・$x>0$ のとき

$x=1 \Rightarrow y=12$　$x<y$ なので OK.

$x=2 \Rightarrow y=6$　$x<y$ なので ok

$x=3 \Rightarrow y=4$　$x<y$ なので ok.

$x=4 \Rightarrow y=3$　$x>y$ なので不適

↓ 以降 $x>y$ となるので不適

よって. $x>0$ では. 3個

・$x<0$ のとき

$x=-1 \Rightarrow y=-12$　$x>y$ なので不適

$x=-2 \Rightarrow y=-6$　$x>y$ なので不適

$x=-3 \Rightarrow y=-4$　$x>y$ なので不適

$x=-4 \Rightarrow y=-3$　$x<y$ なので OK

$x=-6 \Rightarrow y=-2$　$x<y$ なので OK

$x=-12 \Rightarrow y=-1$　$x<y$ なので OK

よって、$x<0$ では 3個

以上より、x, y が整数で、x が y より小さい点は 6個 エ である。

(8)

ア：64 の平方根は ± 8 なので正しい

イ：$\sqrt{16}=4$ なので誤り

ウ：$\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=6$ なので誤り

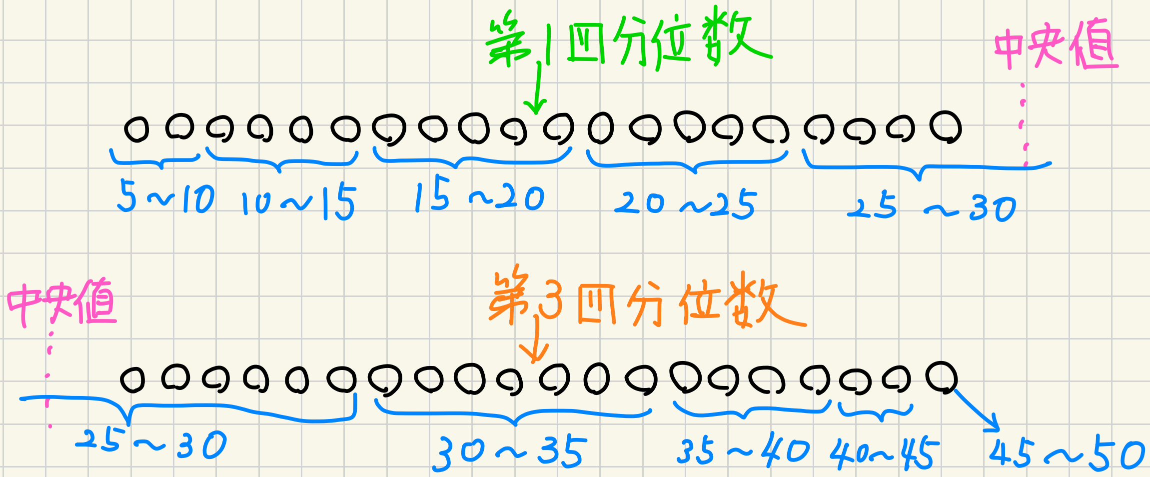
エ：$\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1$ なので誤り

オ：$\sqrt{3}\times 5=5\sqrt{3}$ なので誤り

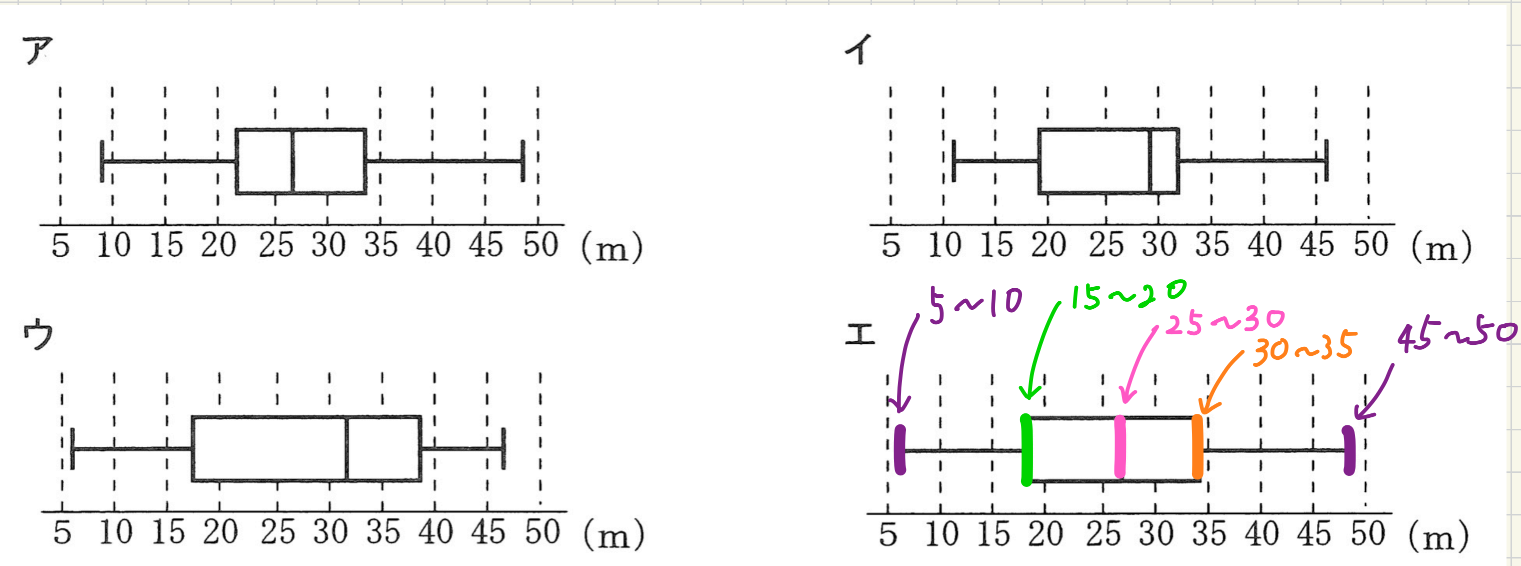
カ：$\sqrt{21}\div\sqrt{7}=\sqrt{3}$ なので正しい

答えは ア, カ

(9) データを小さい順に並べると、以下の通り

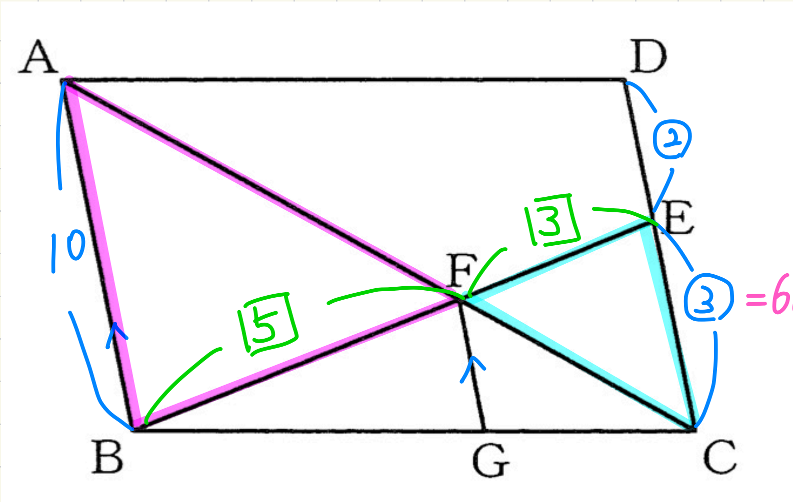


最小値：5~10
第1四分位数：15~20
中央値：25~30
第3四分位数：30~35
最大値：45~50



よって、ヒストグラムに対応する箱ひげ図は エ

(10)



DE：EC＝2：3，
DC＝AE＝10 cm より

$$EC = 10 \times \frac{3}{3+2} = 6\text{cm}$$

△ABFと△CEFにおいて，
□ABCDは平行四辺形だから，AB∥CD．よって
錯角が等しいから

$\angle FAB = \angle FCE$ ―― ①

$\angle FBA = \angle FEC$ ―― ②

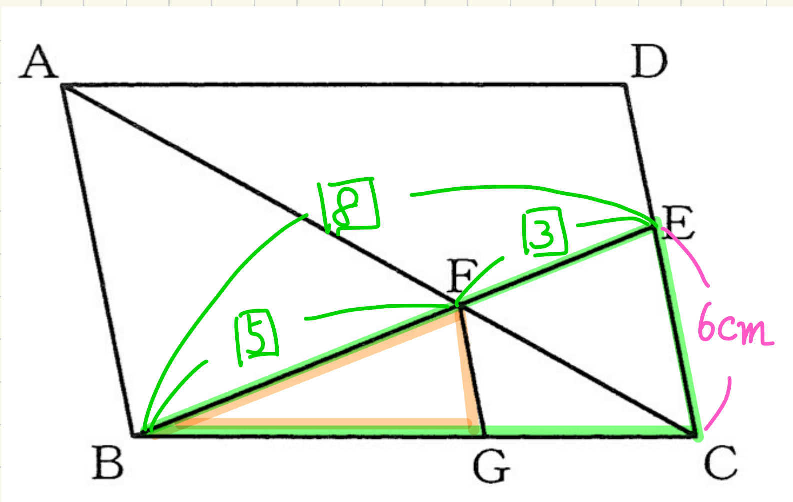
①，②より2組の角がそれぞれ等しいから

△ABF ∽ △CEF

対応する辺の比は等しいから

$BF : EF = \underbrace{AB}_{10} : \underbrace{CE}_{6}$

$\therefore BF : EF = 5 : 3$



△BCEと△BGFにおいて，AB∥CD，
AB∥FGよりFG∥EC
よって，同位角が等しいから

$\angle BCE = \angle BGF$ ―― ③

$\angle BEC = \angle BFG$ ―― ④

③、④より2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BCE \sim \triangle BGF$

対応する辺の比は等しいから

$$\underbrace{CE}_{6cm} : GF = \underbrace{BE}_{8} : \underbrace{BF}_{5}$$

よって

$$8GF = 30 \quad \therefore \underbrace{GF = \frac{15}{4}\,cm}_{}$$ ウ

2.

(1) 樹形図は以下の通り

a	b	a+b	a−b	ab	aがbの約数	a, bともに素数
2	3	5	−1	6	×	○
	4	6	−2	8	○	×
	5	7	−3	10	×	○
	6	8	−4	12	○	×
	7	9	−5	14	×	○
		2通り	0通り	0通り	2通り	3通り

a	b	a+b	a−b	ab	aがbの約数	a, bともに素数
3	2	5	1	6	×	○
	4	7	−1	12	×	×
	5	8	−2	15	×	○
	6	9	−3	18	○	×
	7	10	−4	21	×	○
		2通り	1通り	2通り	1通り	3通り

a	b	a+b	a−b	ab	aがbの約数	a,bともに素数
4	2	6	2	8	×	×
	3	7	1	12	×	×
	5	9	−1	20	×	×
	6	10	−2	24	×	×
	7	11	−3	28	×	×
		2通り	2通り	0通り	0通り	0通り

a	b	a+b	a−b	ab	aがbの約数	a,bともに素数
5	2	7	3	10	×	○
	3	8	2	15	×	○
	4	9	1	20	×	×
	6	11	−1	30	×	×
	7	12	−2	35	×	○
		2通り	3通り	2通り	0通り	3通り

a	b	a+b	a−b	ab	aがbの約数	a,bともに素数
6	2	8	4	12	×	×
	3	9	3	18	×	×
	4	10	2	24	×	×
	5	11	1	30	×	×
	7	13	−1	42	×	×
		2通り	4通り	0通り	0通り	0通り

a	b	a+b	a−b	ab	aがbの約数	a,bともに素数
7	2	9	5	14	×	○
	3	10	4	21	×	○
	4	11	3	28	×	×
	5	12	2	35	×	○
	6	13	1	42	×	×
		2通り	5通り	2通り	0通り	3通り

以上より

① $a+b$ が偶数 $=2+2+2+2+2+2=12$ 通り

② $a-b$ が正の数 $=0+1+2+3+4+5=15$ 通り

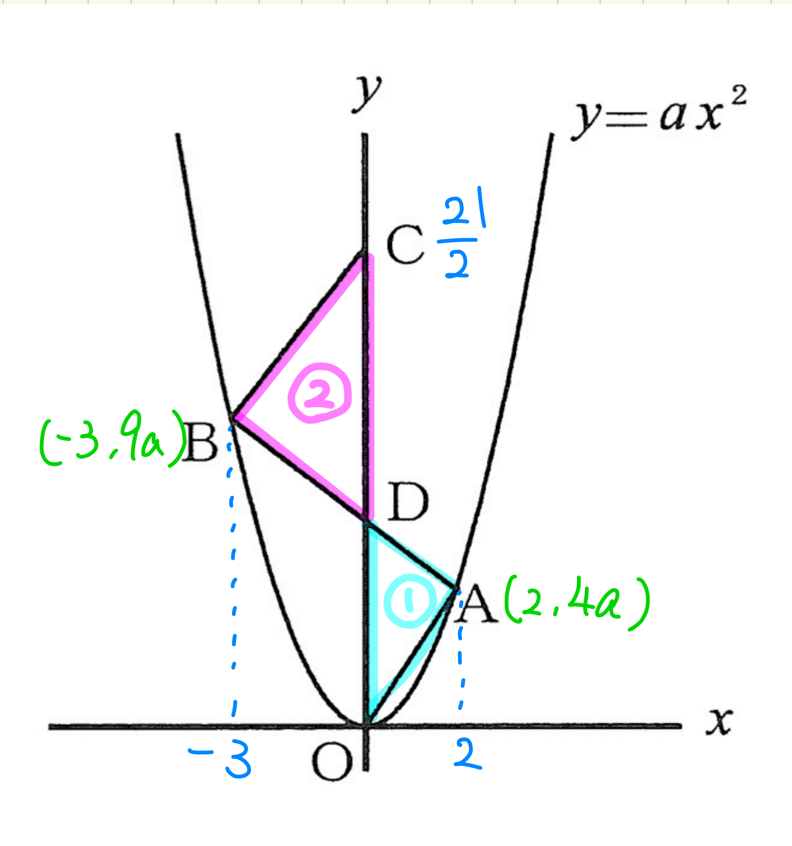
③ ab が奇数 $=0+2+0+2+0+2=6$ 通り

④ a が b の約数 $=2+1+0+0+0+0=3$ 通り

⑤ a, b ともに素数 $=3+3+0+3+0+3=12$ 通り

全体の場合の数は ①〜⑤ でどれも同じなので、
① と ⑤ の確率が等しい。よって エ

(2)



点Aは $y=ax^2$ 上にあり、
$x=2$ なので、

$$y=a\times2^2$$
$$=4a$$
$$\therefore A(2, 4a)$$

点Bは $y=ax^2$ 上にあり
$x=-3$ なので

$$y=a\times(-3)^2$$
$$=9a$$
$$\therefore B(-3, 9a)$$

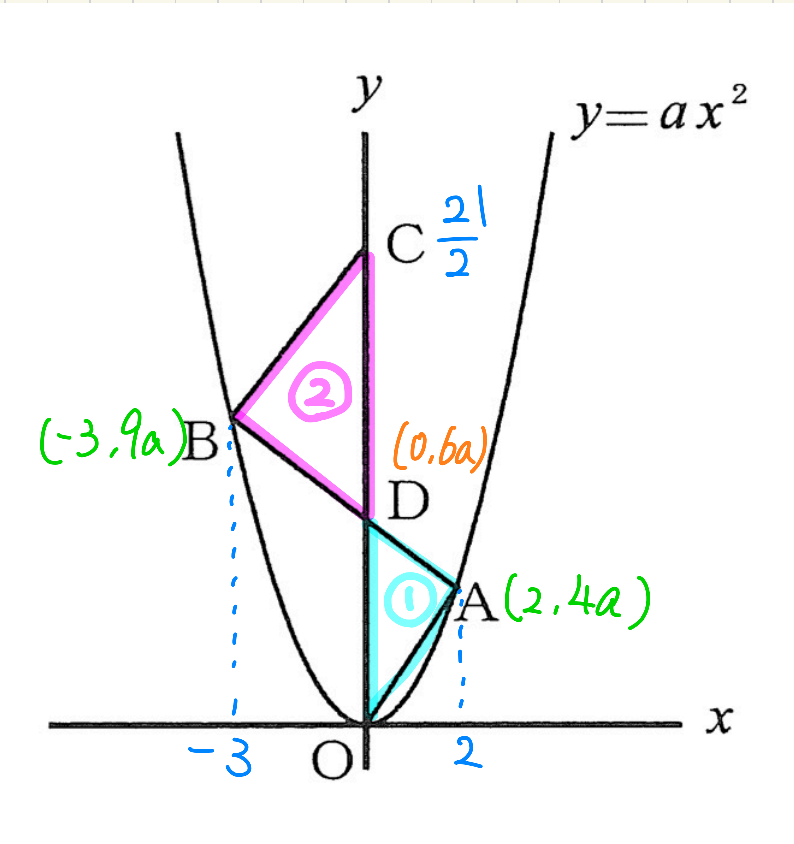
直線ABの式を $y=mx+n$ とおくと，A$(2, 4a)$，B$(-3, 9a)$ を通るので

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 4a & = & 2m+n \quad —— ① \\
-) & 9a & = & -3m+n \quad —— ② \\
\hline
 & -5a & = & 5m \\
 & m & = & -a
\end{array}
$$

$m=-a$ を ① に代入して，

$4a=-2a+n \qquad \therefore n=6a$

よって，直線ABは，$y=-ax+6a$ であり，Dの座標は，$(0, 6a)$



$CD=\dfrac{21}{2}-6a$

$DO=6a$

より，

$\triangle CBD=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{21}{2}-6a\right)\times 3$

$=\dfrac{63}{4}-9a$

$\triangle DOA=\dfrac{1}{2}\times 6a\times 2$

$=6a$

$\triangle CBD=2\triangle DOA$ より

$\dfrac{63}{4}-9a=2\times 6a$

$\Leftrightarrow 63-36a=48a$

$\Leftrightarrow \quad 84a = 63$

$\therefore a = \dfrac{63}{84}$ 　分子,分母 ÷21

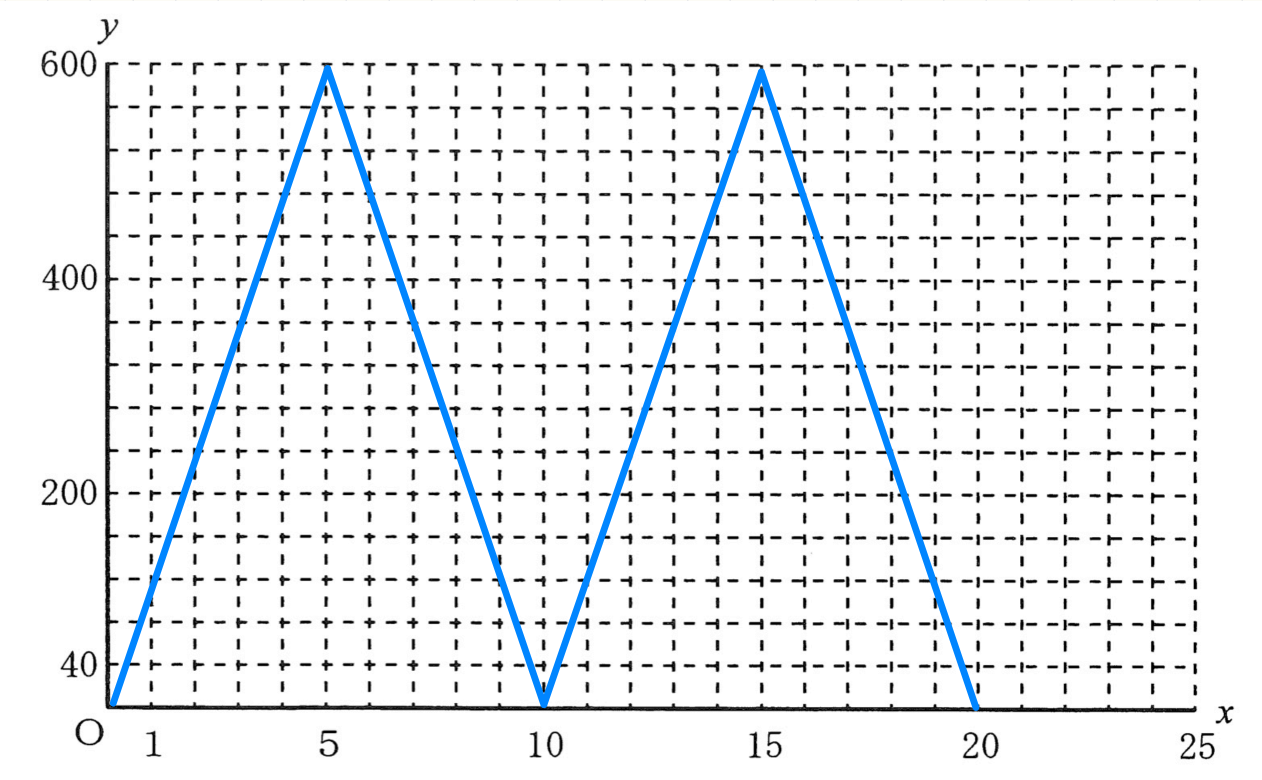
$= \dfrac{3}{4}$ ウ

(3)

① A地点とB地点は600mであり、弟は毎分120mの速さで走るから、

$600 \div 120 = 5$分

よって、弟はA・B間を5分で走るから、弟のグラフは以下の通り



$x=6$のとき、弟はB→Aに向けて走っており、Bを出発して1分後だから、Bと弟の距離は120m。よって、Aと弟の距離yは

$y = 600 - 120 = 480$ オ

② 弟はA↔Bを2往復するのに20分かかる.
兄は弟の1分後に出発し、弟の1分前に走り終えたので, 兄の走っていた時間は

$20-1-1=18$分

兄はAB間を3往復したので, 走った距離は

$600 \times 6 = 3600$m

$A \xrightarrow{600m} B \xrightarrow{600m} A \xrightarrow{600m} B \xrightarrow{600m} A \xrightarrow{600m} B \xrightarrow{600m} A$

1往復　1往復　1往復

よって兄の走る速さは.

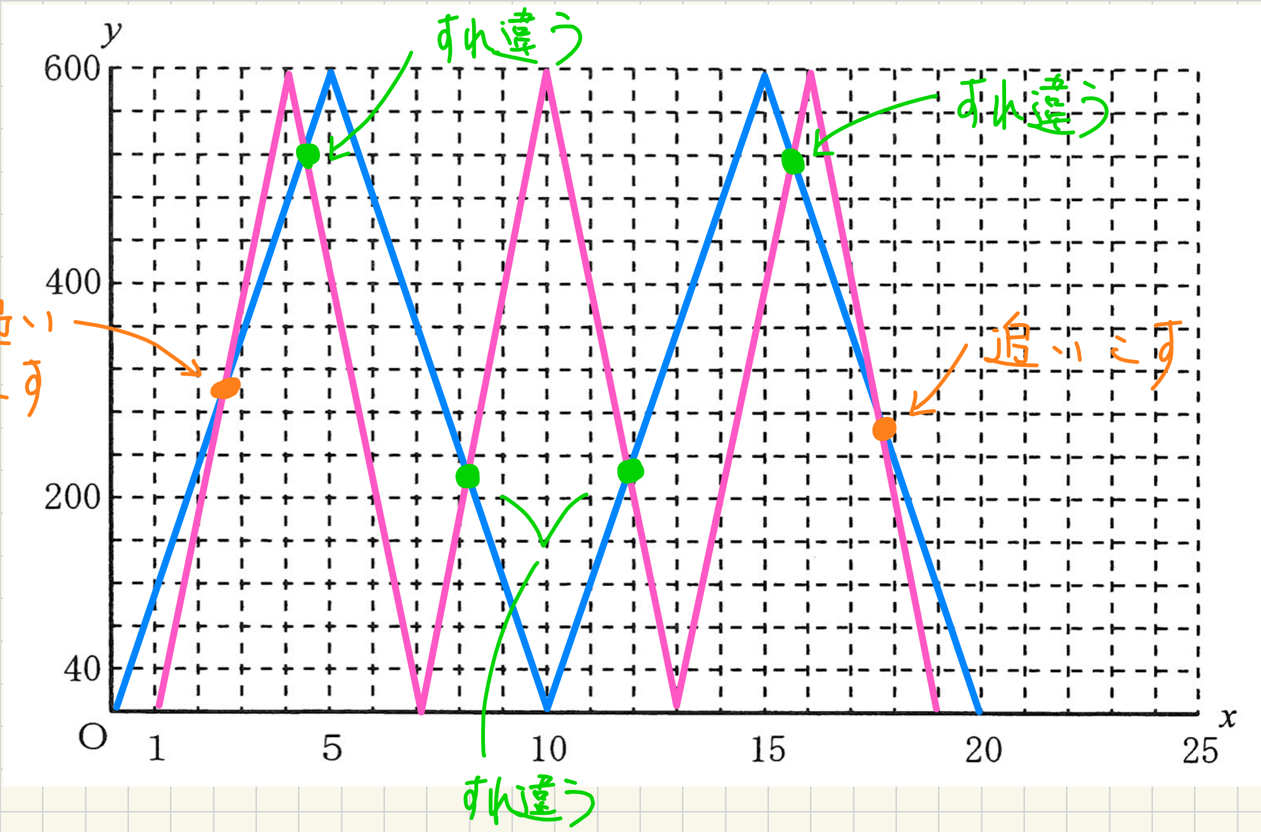
$3600 \div 18 = 200$

⇒毎分200m

AB間は600mだから, AB間を走る時間は

$600 \div 200 = 3$分

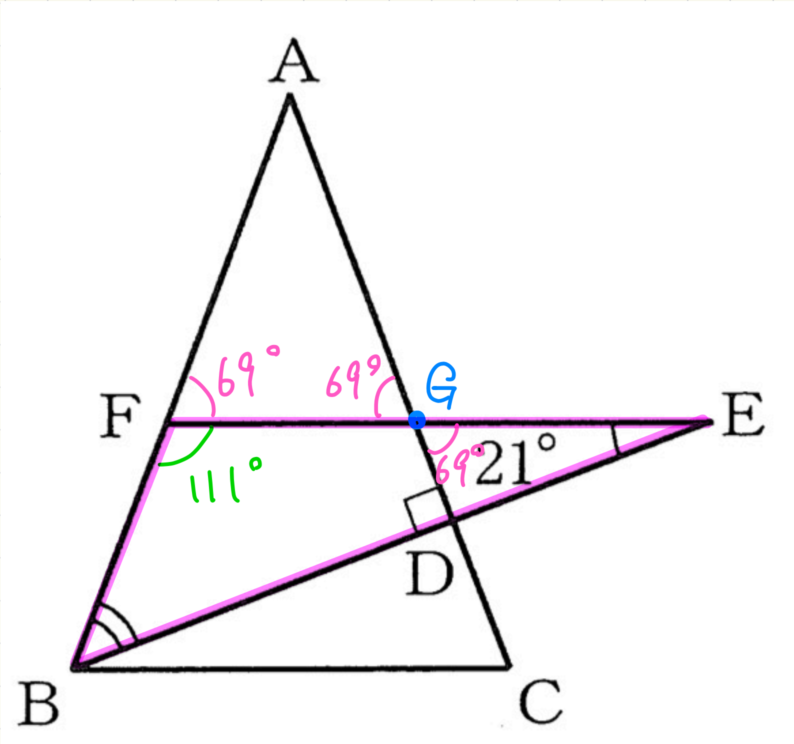
よって, 兄のグラフは以下の通り



よって, 兄と弟がすれ違うのは. 4回 イ

3.

(1)



ACとEFの交点をGとする.

△ABCはAB=ACの二等辺三角形で, EF//BCより△AFGは AF=AGの二等辺三角形である.

△DEGで外角の定理より

∠EGD = 90° − 21°

= 69°

対頂角は等しいから, ∠AGF = 69°

△AFG は AF = AG の二等辺三角形だから,

∠AFG = ∠AGF　∴ ∠AFG = 69°

直線は180°だから

∠EFB = 180° − 69°

= 111°

△EFBで, 三角形の内角の和は180°だから,

∠FBE = 180° − (111° + 21°)

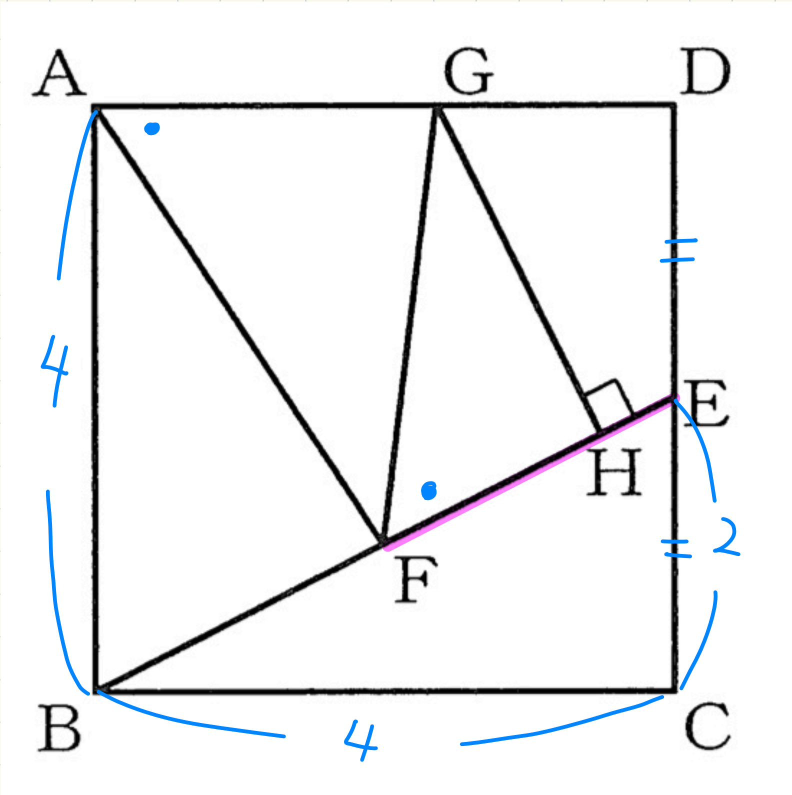
= 180° − 132°

= 48°

よって, ∠ABD = 48°

(2)

①



□ABCD は正方形なので.

AB = BC = CD = DA = 4cm

E は CD の中点なので.

CE = 2cm

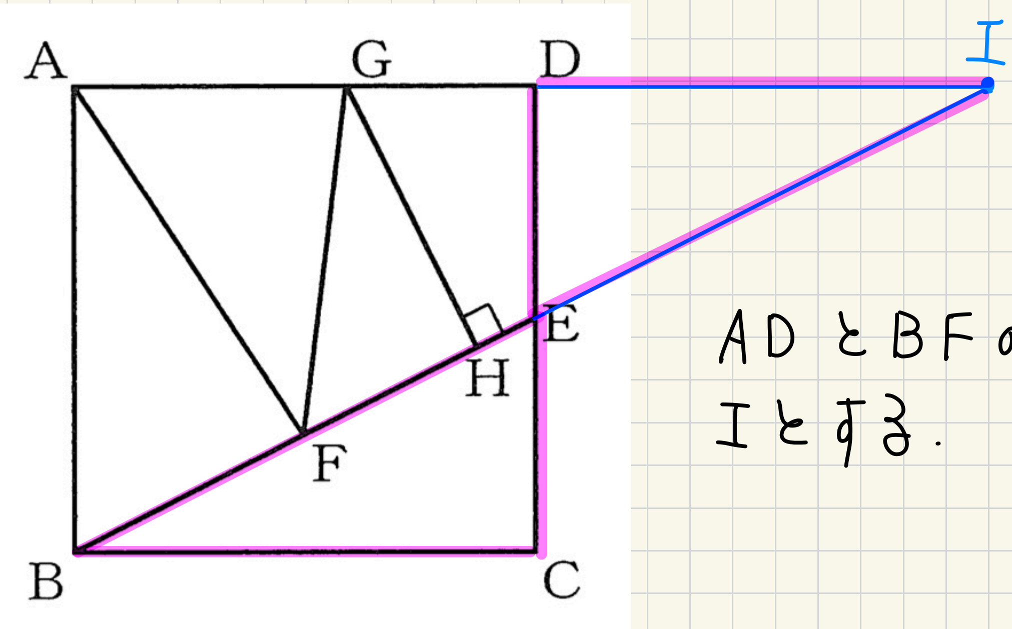
△BCE で三平方の定理より

$BE = \sqrt{4^2 + 2^2}$ $= \sqrt{16+4}$ $= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$= 2\sqrt{5}$ cm

F は BE の中点だから. EF = $\sqrt{5}$ cm

② やや難問



AD と BF の延長線の交点を I とする.

△BCE と △IDE において,

E は CD の中点だから.

CE = DE —— ㋐

対頂角は等しいから

$\angle BEC = \angle IED$ —— ①

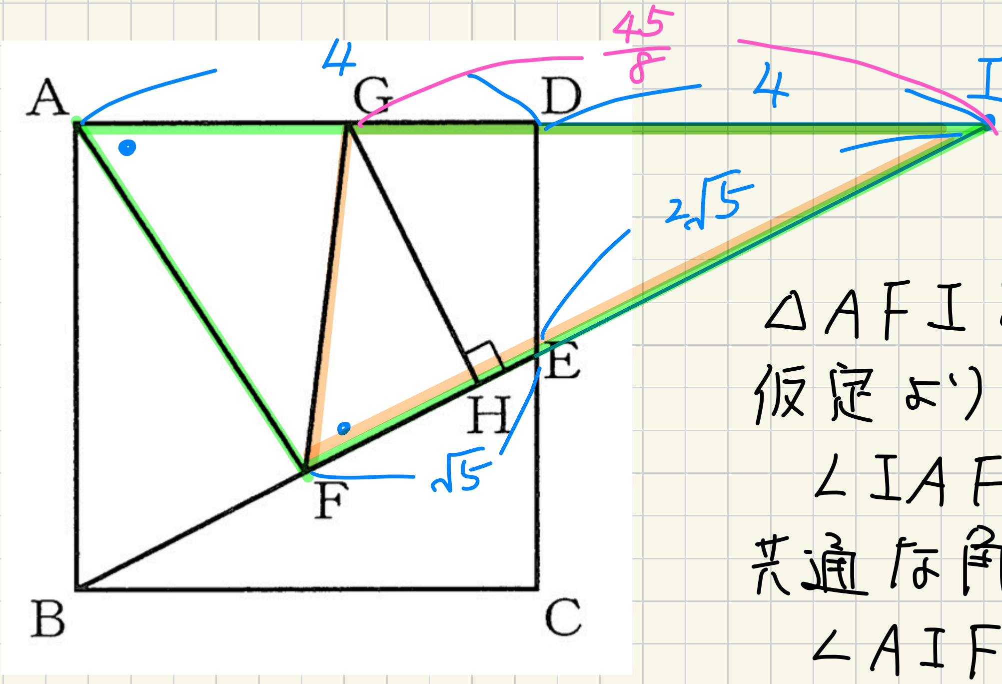
また,

$\angle BCE = \angle IDE = 90°$ —— ㋒

㋐, ①, ㋒より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので, $\triangle BCE \equiv \triangle IDE$

対応する辺は等しいから,

$DI = 4$ cm, $EI = 2\sqrt{5}$ cm.



$\triangle AFI$ と $\triangle FGI$ において,

仮定より

$\angle IAF = \angle IFG$ —— ㋓

共通な角は等しいから

$\angle AIF = \angle FIG$ —— ㋔

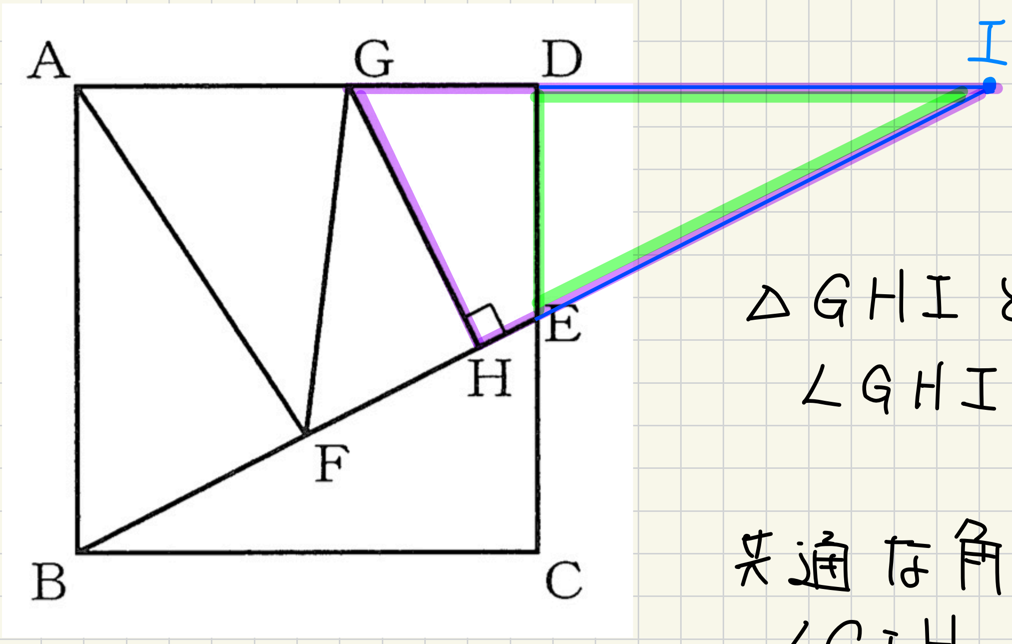
㋓, ㋔より2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AFI \sim \triangle FGI$.

対応する辺の比は等しいから.

$$\underset{3\sqrt{5}}{FI} : GI = \underset{8}{AI} : \underset{3\sqrt{5}}{FI}$$

$\therefore 8GI = 45 \rightarrow GI = \frac{45}{8}$ cm.



△GHIと△EDIにおいて

$\angle GHI = \angle EDI = 90^\circ$ —㋕

共通な角は等しいから

$\angle GIH = \angle EID$ —㋖

㋕,㋖より2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle GHI \sim \triangle EDI$

対応する辺の比は等しいから

$$HI : \underbrace{DI}_{4} = \underbrace{GI}_{\frac{45}{8}} : \underbrace{EI}_{2\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ 2\sqrt{5}\,HI = \frac{45}{2}$$

$$HI = \frac{45}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{45}{4} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{9\sqrt{5}}{4}\ \text{cm}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ \frac{45}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{9\sqrt{5}}{4}$$

よって

$$HE = HI - EI$$

$$= \frac{9\sqrt{5}}{4} - 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

以上より

$$HF = BE - BF - HE$$

$$= 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

HFはEBのA倍とおくと.

$$\frac{3\sqrt{5}}{4} = A \times 2\sqrt{5}$$

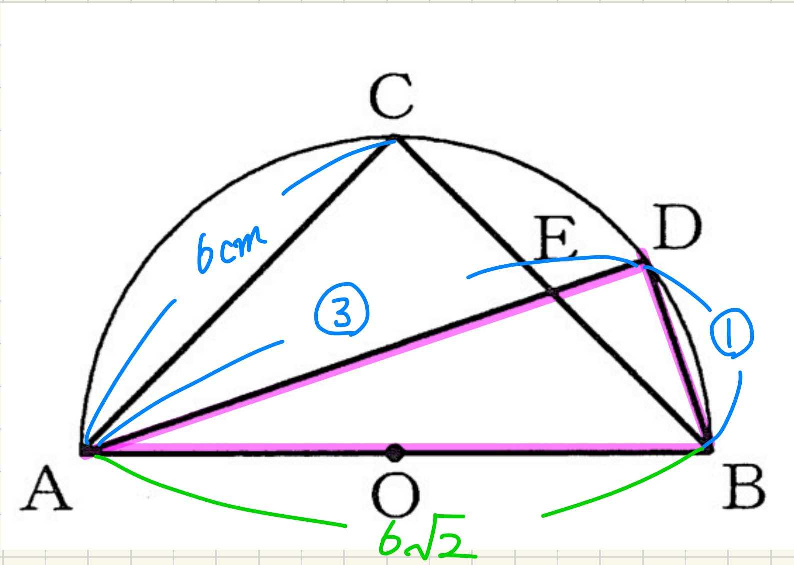
$$\therefore A = \frac{3\sqrt{5}}{4} \times \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{3}{8}$$

よって, HFはEBの $\frac{3}{8}$ 倍

(3)

①



∠ACBは直径に対する円周角なので

$\angle ACB = 90°$

よって△ABCは直角二等辺三角形だから

$\underbrace{AC}_{6cm} : BC : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$

$6 : AB = 1 : \sqrt{2}$

$AB = 6\sqrt{2}$ cm

∠ADBは直径ABに対する円周角なので、

$\angle ADB = 90°$

$DA : DB = 3 : 1$ より、$DA = ③$、$DB = ①$ と書くことにすると、△ADBで三平方の定理より

$$AB = \sqrt{③^2 + ①^2}$$
$$= \sqrt{⑨ + ①}$$
$$= \sqrt{10}$$

よって、

$DA : DB : AB = 3 : 1 : \sqrt{10}$

$6\sqrt{2}$cm

したがって、

$$DA : 6\sqrt{2} = 3 : \sqrt{10}$$
$$\sqrt{10}\,DA = 18\sqrt{2}$$
$$DA = \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$= \frac{18}{\sqrt{5}}$$

$\frac{18}{\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{18\sqrt{5}}{5}$

$$= \frac{18\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

また、

$$DB : 6\sqrt{2} = 1 : \sqrt{10}$$

$$\sqrt{10}\,DB = 6\sqrt{2}$$

$$DB = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

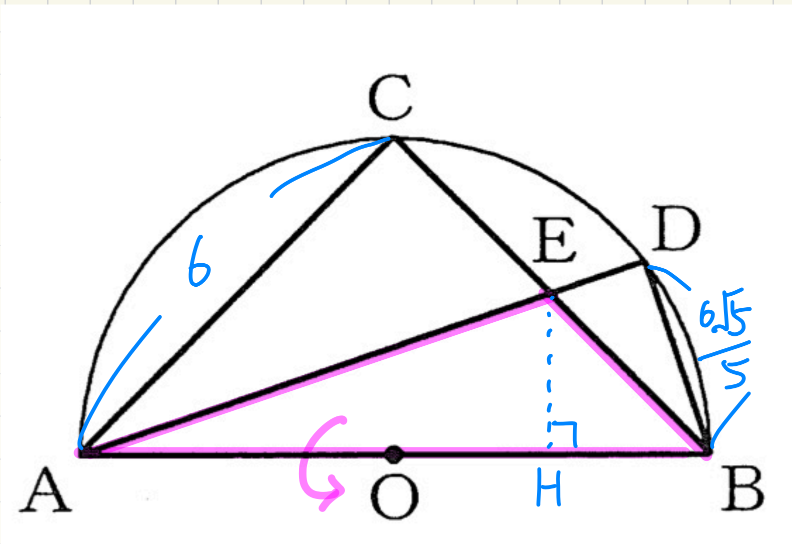
$$= \frac{6\sqrt{5}}{5}\ \text{cm}$$

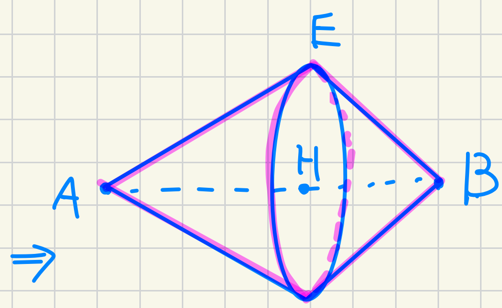
したがって、△DAB の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{18\sqrt{5}}{5} \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{18 \times 6 \times 5}{2 \times 5 \times 5}$$

$$= \frac{54}{5}\ \text{cm}^2$$

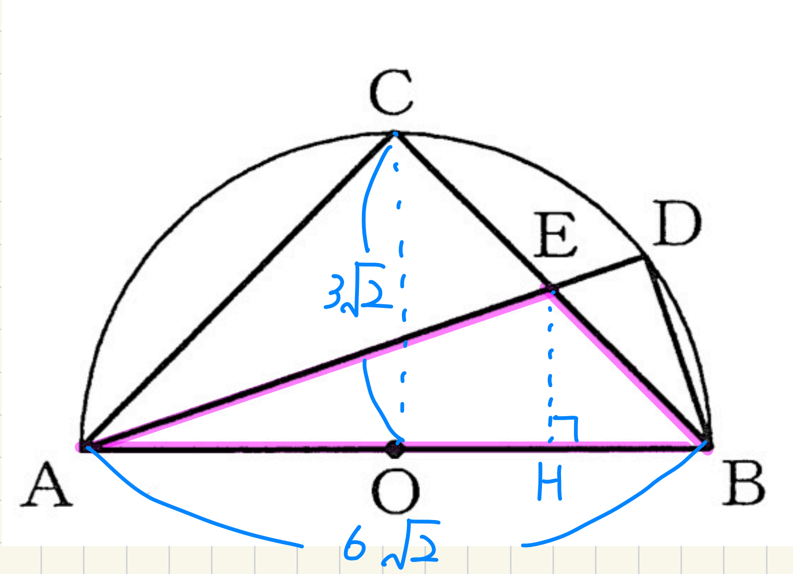
②





E から AB に垂線を下ろした足を H とする。

$\triangle AEC$と$\triangle BED$において.
$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は等しいから
$\angle EAC = \angle EBD$ — ㋐
また.
$\angle ECA = \angle EDB = 90°$ — ㋑
㋐, ㋑より2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle AEC \backsim \triangle BED$
相似比は.
$$AC : BD = 6 : \frac{6\sqrt{5}}{5}$$
$$= 30 : 6\sqrt{5}$$
$$= 5 : \sqrt{5}$$
相似な三角形の面積比は. 相似比の2乗に等しいので.
$$\triangle AEC : \triangle BED = 5^2 : \sqrt{5}^2$$
$$= 25 : 5$$
$$= 5 : 1 \quad \text{——} \ \text{☆}$$
ここで. $\triangle ABE$の面積をxとすると.
$$\triangle AEC = \triangle ABC - \triangle ABE$$
$$= \triangle ABC - x$$
$$\triangle BED = \triangle ABD - \triangle ABE$$
$$= \triangle ABD - x$$
と表せる.



①より $AB = 6\sqrt{2}$ cm だから

$OB = OC = 3\sqrt{2}$.

よって

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$

$= 18$

また $\triangle ABD$ の面積は.①より $\frac{54}{5}$。よって.

$\triangle AEC = \triangle ABC - x$

$= 18 - x$

$\triangle BED = \triangle ABD - x$

$= \frac{54}{5} - x$

☆より $\triangle AEC : \triangle BED = 5 : 1$ だから.

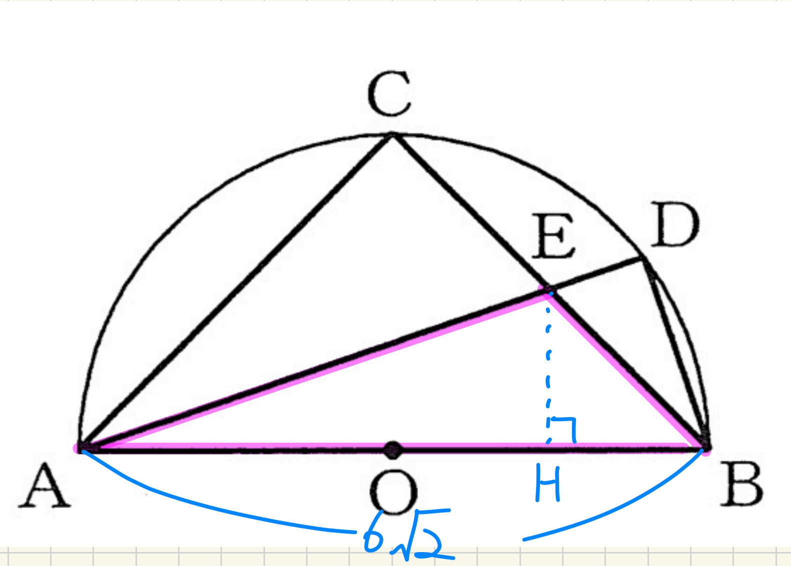
$18 - x : \frac{54}{5} - x = 5 : 1$

$\Leftrightarrow 5\left(\frac{54}{5} - x\right) = 18 - x$

$\Leftrightarrow 54 - 5x = 18 - x$

$-4x = -36$

$x = 9$ … $\triangle ABE$ の面積

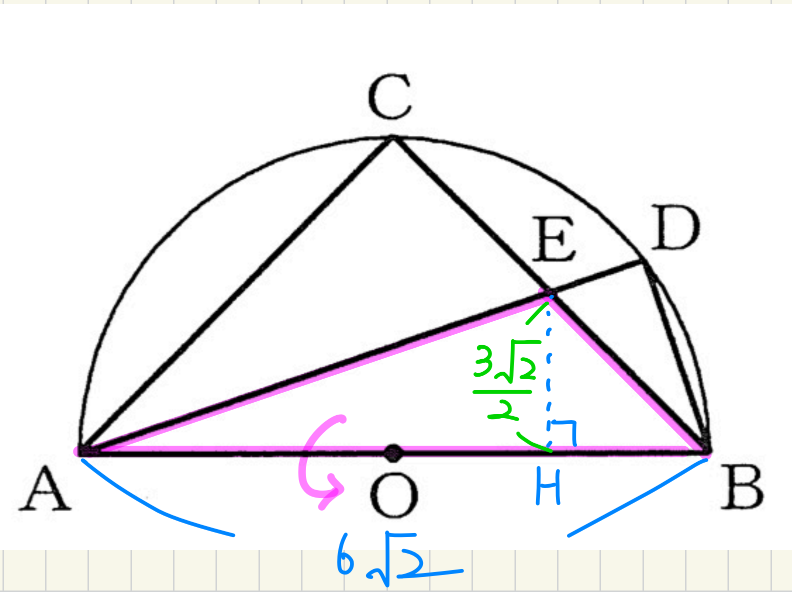


$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \times AB \times EH$$
$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times EH$$
$$= 3\sqrt{2}\,EH$$

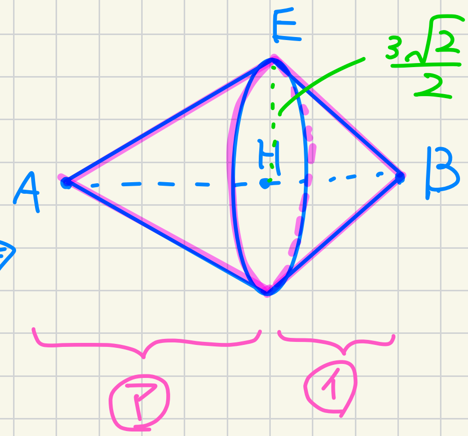
よって

$$3\sqrt{2}\,EH = 9$$
$$EH = \frac{9}{3\sqrt{2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



⇒



よって求める体積は、

$$\underbrace{\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\pi\times AH\times\frac{1}{3}}_{ア}+\underbrace{\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\pi\times BH\times\frac{1}{3}}_{イ}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}\times\pi\times(\underbrace{AH+BH}_{AB\ \rightarrow\ 6\sqrt{2}})$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}\times\pi\times6\sqrt{2}$$

$$=\frac{9\times2\times6\sqrt{2}}{2\times2\times3}\pi$$

$$=9\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^3$$