2024年度 千葉県
数学

kmkm

1.

(1)

① 与式 $= -4 + 6$

$= 2$

② 与式 $= \dfrac{a^2 b \times (-9a)}{3ab}$

$= -3a^2$

③ 与式 $= \sqrt{7}^2 - 2\sqrt{21} + \sqrt{21} - \sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$

$= 7 - \sqrt{21} - 6$

$= 1 - \sqrt{21}$

(2)

① $x^2 + 2x = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0$

② 解の公式より

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{6}$$

(3)

① 標本調査 … 集団の一部を調査して，全体を推定する調査

↕

全数調査：集団全部を調査

ア：全数調査

イ：標本調査

⇒川の全ての水を調査できない

ウ：全数調査

エ：全数調査

② 白い球をx個とする。オレンジの球30個を追加したので，球の合計は，$x+30$個

よって，オレンジの球の割合は，

$$\frac{30}{x+30} \quad —— ㋐$$

また，10個の球を取り出したとき，オレンジの球が3個なので，オレンジの球の割合は，

$$\frac{3}{10} \quad —— ㋑$$

㋐と㋑が等しいと推定して

$$\frac{30}{x+30}=\frac{3}{10}$$

よって

$$30 \times 10 = 3(x+30)$$

$$\Leftrightarrow \quad 300 = 3x + 90$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = 210$$

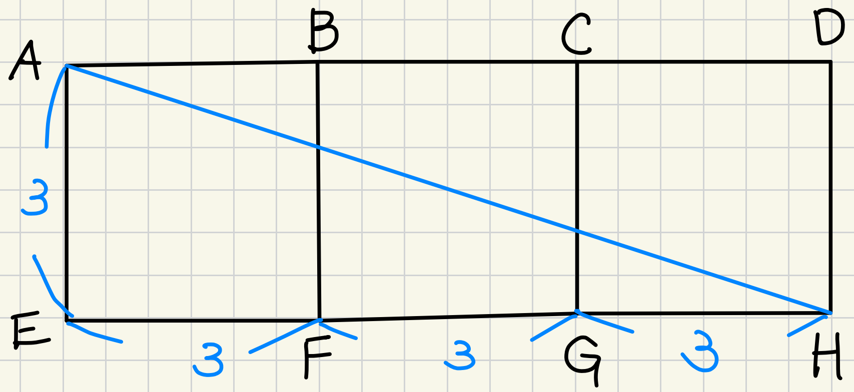
$$\therefore \quad x = 70$$

よって，およそ70個

(4)

① エ

② ひもが通る面の展開図で考える。



ひもが最短となるのは，A，Hを直線で結んだときである。

△AEHで三平方の定理より

$$AH = \sqrt{3^2 + 9^2}$$

$$= \sqrt{9 + 81}$$

$$= \sqrt{90}$$

$$= 3\sqrt{10}\ \text{cm}$$

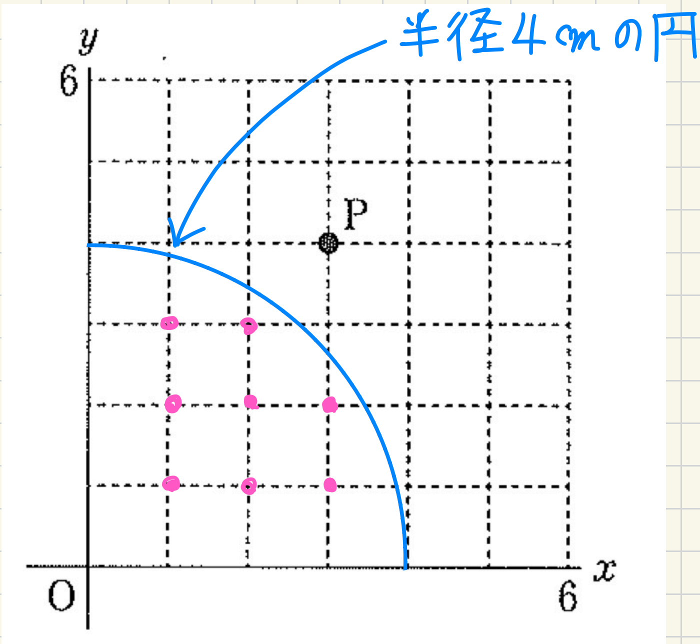
(5)

2つのさいころを投げたときの出る目は
$6 \times 6 = 36$ 通りである

① $x = a$, $y = b$ で $y = x$ より $b = a$.
よって, 2つのさいころの目が同じだから,
$(a, b) = (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5),$
$(6,6)$ の 6通り

求める確率は
$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

②



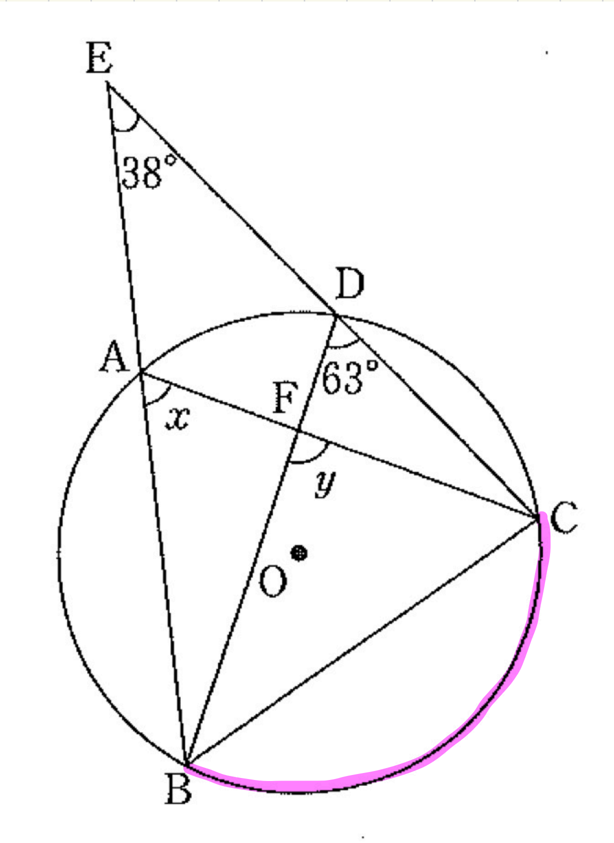
OPの長さが4cm以下
⇒ Oを中心とする半径4cm
の円の周と内側に
点Pがあれば良い

左図より
$(a, b) = (1,1), (1,2), (1,3),$
$(2,1), (2,2), (2,3),$
$(3,1), (3,2)$
の 8通り

よって, 求める確率は $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

(6)

①



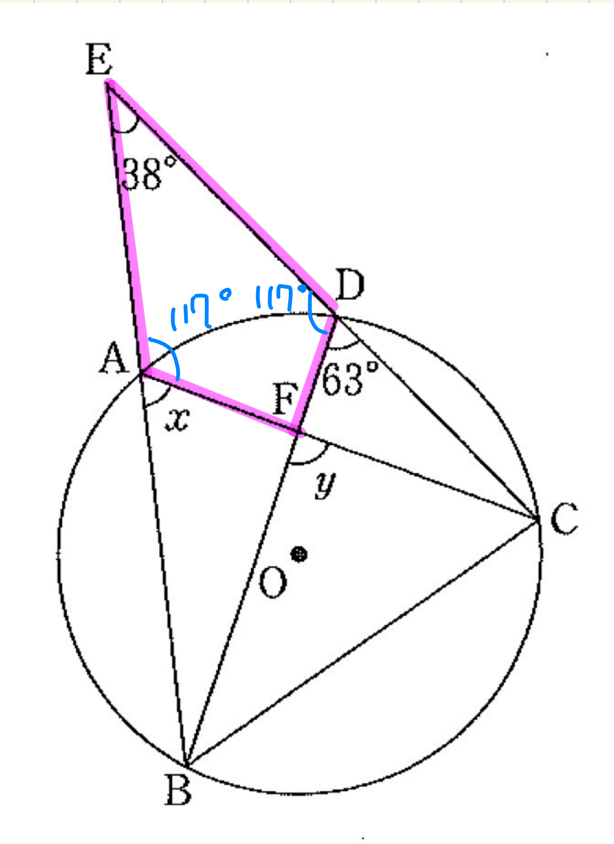
$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角は等しいから

$\angle BAC = \angle BDC$

よって、

$\angle BAC = 63°$

②



$\angle EAF = \angle EDF = 180° - 63°$

$= 117°$

□BAFDの内角の和は360°だから

$\angle AFD = 360° - (38° + 117° + 117°)$

$= 360° - 272°$

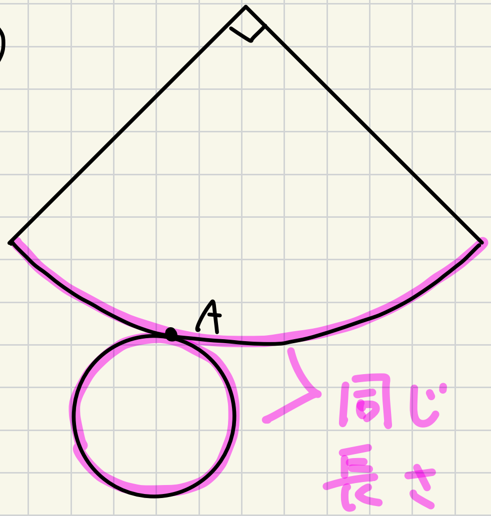
$= 88°$

対頂角は等しいから

$\angle BFC = 88°$

(7)

①



おうぎ形の半径を r cm とすると、おうぎ形の周の長さは、

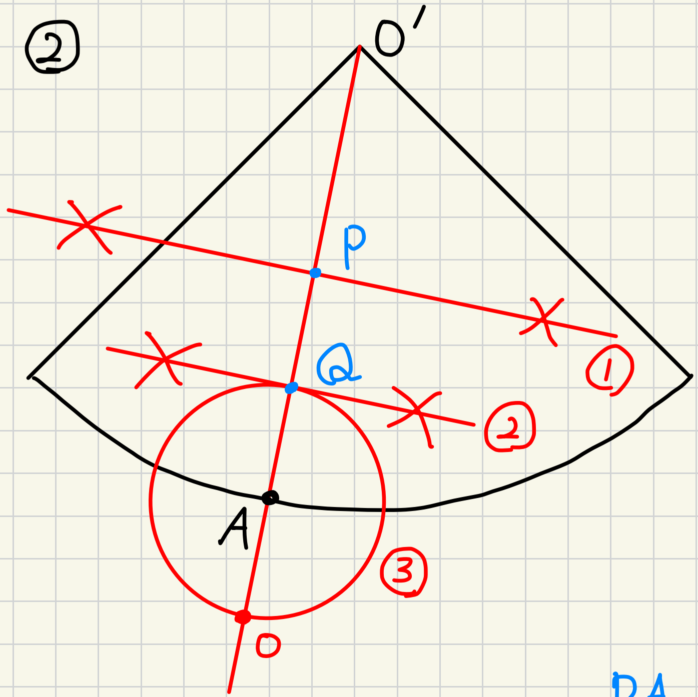
$$\underbrace{2r}_{直径} \times \frac{90^\circ}{360^\circ} = 2r \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2}r$$

おうぎ形の周の長さと、底面の円周の長さは等しいから、底面の円の半径を x cm とすると、

$$2x = \frac{1}{2}r \Rightarrow r = 4x$$

よって、おうぎ形の半径は底面の円の半径の4倍

②



おうぎ形の中心を O' とする。
①より底面の円の半径は、
おうぎ形の半径の $\frac{1}{4}$ と
なれば良い。

① O'A の垂直二等分線
⇒ O'A との交点を P とする。

② PA の垂直二等分線
⇒ O'A との交点を Q とする。

$$\left.\begin{aligned} O'A &= 2PA = 2 \times \overbrace{2QA}^{PA} \\ &= 4QA \end{aligned}\right) \Rightarrow QA が底面の半径$$

③ Aを中心として、半径QAの円を書く。
⇒ O'Aの延長線との交点がOである。

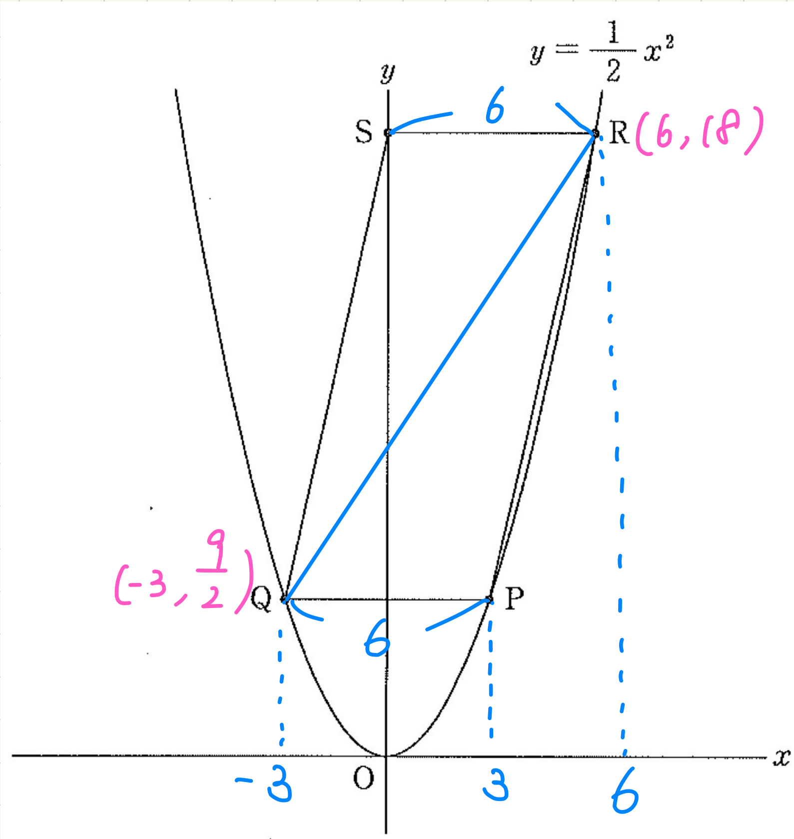
2.

(1)

① 点Pは $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあり、$x=3$ だから

$$y=\frac{1}{2}\times 3^2$$
$$=\frac{9}{2}$$

②



点Qは点Pとy軸対称なので、$Q(-3, \frac{9}{2})$

よって、

$$PQ = 3-(-3)$$
$$= 6$$

□PRSQは平行四辺形なので、PQ = RS。よって

$$RS = 6$$

Sはy軸上の点だから、Rのx座標は6である。

点Rは $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあり、$x=6$ なので、

$$y=\frac{1}{2}\times 6^2 = 18 \qquad \therefore R(6, 18)$$

直線QRの式を $y=ax+b$ とおくと、$Q\left(-3,\frac{9}{2}\right)$、
$R(6,18)$ を通るので

$$\frac{9}{2}=-3a+b \quad \text{―― ㋐}$$
$$18=6a+b \quad \text{―― ㋑}$$

㋐ × 2 + ㋑ より

$$\begin{array}{rrcrr} & 9 & = & -6a & +2b \\ +) & 18 & = & 6a & +b \\ \hline & 27 & = & & 3b \end{array}$$

$\therefore b=9$

$b=9$ を㋑に代入して

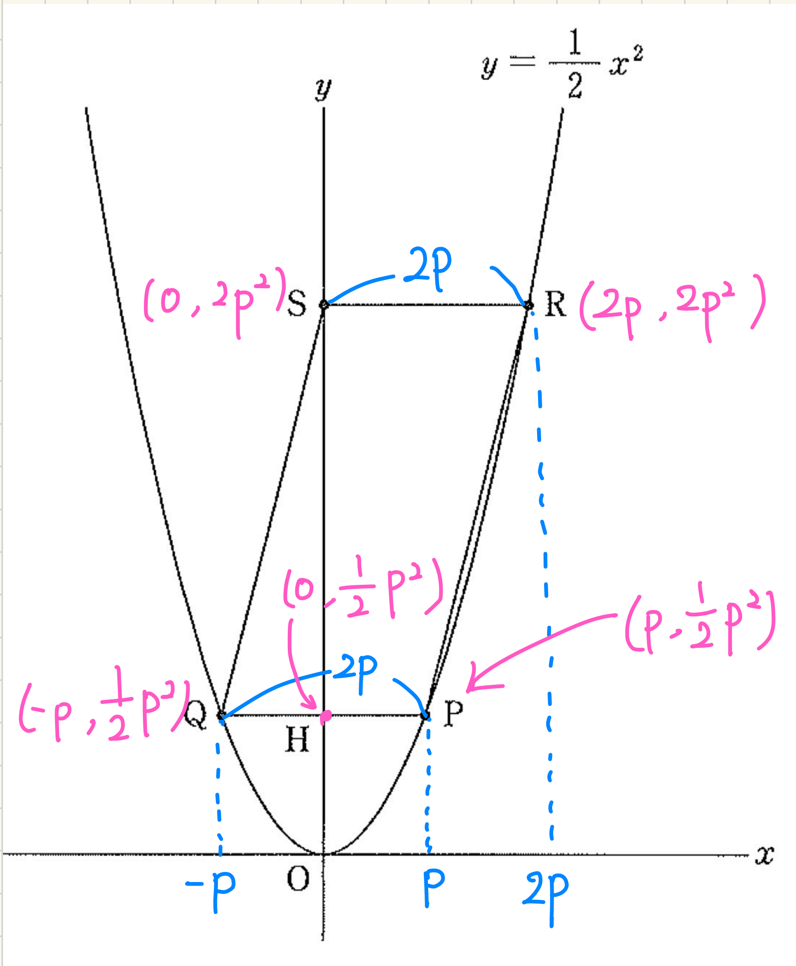
$18=6a+9$

$6a=9$

$a=\frac{3}{2}$

よって、傾き $\frac{3}{2}$、切片 9

(2)



点Pは $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあり
$x=p$ なので

$y=\frac{1}{2}p^2$

$\therefore P\left(p, \frac{1}{2}p^2\right)$

点Qは点Pと y 軸対称だから

$Q\left(-p, \frac{1}{2}p^2\right)$

よって、

$\underline{PQ} = p - (-p) = \underline{2p}$

□PRSQは平行四辺形なので、$RS = 2p$。
点Sはy軸上にあるから、Rのx座標は$2p$。

点Rは$y = \frac{1}{2}x^2$上にあり、$x = 2p$だから、

$$y = \frac{1}{2} \times (2p)^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 4p^2$$
$$= 2p^2 \qquad \therefore \underline{R(2p,\ 2p^2)}$$

よって、

$$\underline{SH} = 2p^2 - \frac{1}{2}p^2$$
$$= \underline{\frac{3}{2}p^2}$$

$SH = 2PQ$ より

$$\frac{3}{2}p^2 = 2 \times 2p$$
$$\Leftrightarrow 3p^2 - 8p = 0$$
$$\Leftrightarrow p(3p - 8) = 0$$
$$\therefore p = 0,\ \frac{8}{3}$$

$\frac{3}{2}p^2 = 4p$

$\Leftrightarrow 3p^2 = 8p$

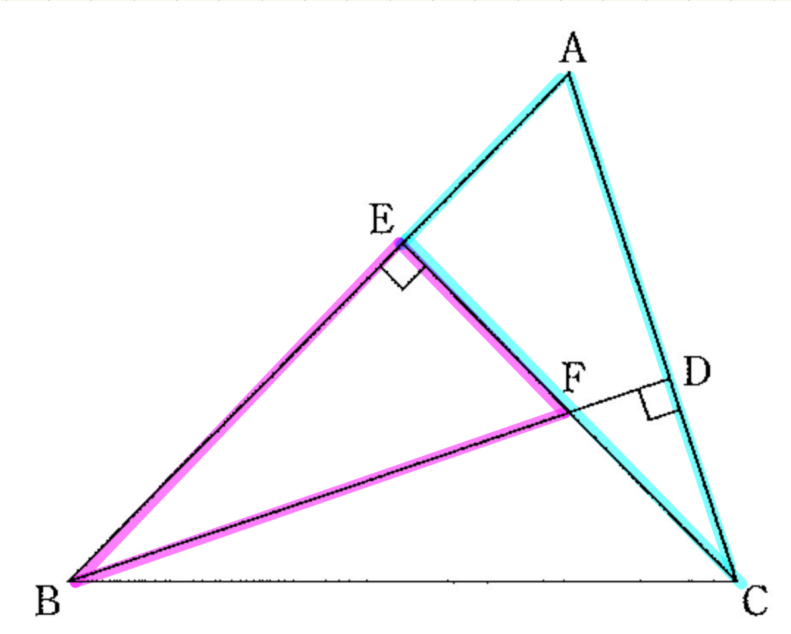
$p = 0$のとき、□PRSQは四角形にならないので、$\underline{p = \frac{8}{3}}$

3.

(1) $\angle EBC = \angle ECB$ イ $= 45°$ だから，$\triangle EBC$ は，

二等辺三角形 ウ である．よって，$EB = EC$ カ

(2)



$\triangle EBF$ と $\triangle ECA$ において，

$EB = EC$ —— ①

$\angle BEF = \angle CEA = 90°$ —— ②

対頂角は等しいので，

$\angle EFB = \angle DFC$ —— ③

また，$\angle BEF = \angle CDF = 90°$，三角形の内角の和は 180° だから

$\angle EBF = 180° - \angle BEF - \angle EFB$ …△EBFより

$= 90° - \angle EFB$ —— ④

$\angle ECA = 180° - \angle CDF - \angle DFC$ …△DCFより

$= 90° - \angle DFC$ —— ⑤

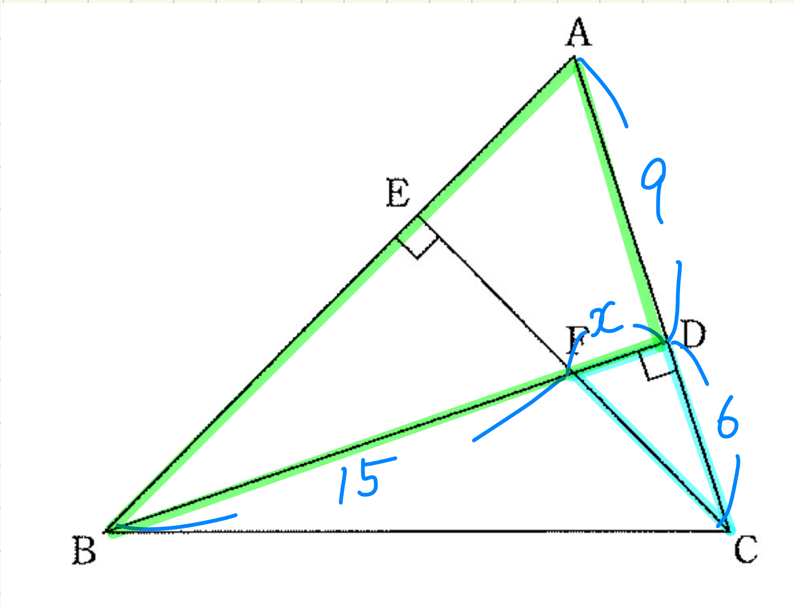
③，④，⑤より

$\angle EBF = \angle ECA$ —— ⑥

①，②，⑥より 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle EBF \equiv \triangle ECA$（証明終わり）

(3)



$DF = x$ cm とおく.

(2) より $\triangle EBF \equiv \triangle ECA$

だから.

$BF = CA$

よって.

$BF = 9 + 6 = 15$ cm

$\triangle DCF$ と $\triangle DBA$ において

$\angle CDF = \angle BDA = 90^\circ$ —— ①

(2) より $\triangle EBF \equiv \triangle ECA$ だから

$\angle EBF = \angle ECA$

よって

$\angle FCD = \angle ABD$ —— ②

①, ② より 2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle DCF \sim \triangle DBA$

対応する辺の比は等しいから

$\underbrace{DC}_{6} : \underbrace{DB}_{15+x} = \underbrace{DF}_{x} : \underbrace{DA}_{9}$

よって.

$x(15 + x) = 54$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 15x - 54 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 18)(x - 3) = 0$

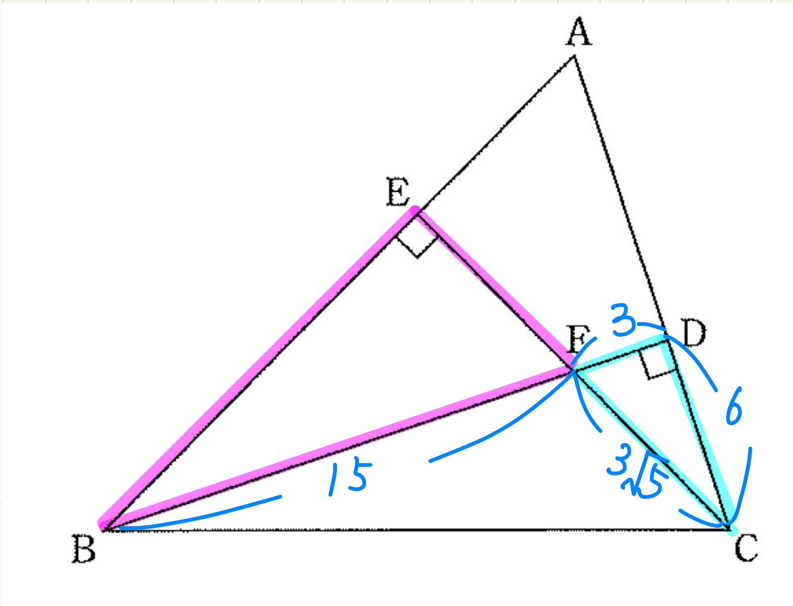
$\therefore \quad x = -18, 3$

$x > 0$ より $x = 3$ cm

△DFCで三平方の定理より

$DF = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5}$ cm



△EBFと△DCFにおいて

$\angle BEF = \angle CDF = 90^\circ$ ―③

対頂角は等しいから

$\angle BFE = \angle CFD$ ―④

③,④より2組の角がそれぞれ等しいので

△EBF ∽ △DCF

対応する辺の比は等しいから

$EF : \underset{3}{DF} = \underset{15}{BF} : \underset{3\sqrt{5}}{CF}$

$\therefore 3\sqrt{5}\,EF = 45$

$EF = \dfrac{15}{\sqrt{5}}$ cm

同様に

$EB : \underset{6}{DC} = \underset{15}{BF} : \underset{3\sqrt{5}}{CF}$

$\therefore 3\sqrt{5}\,EB = 90$

$EB = \dfrac{30}{\sqrt{5}}$ cm

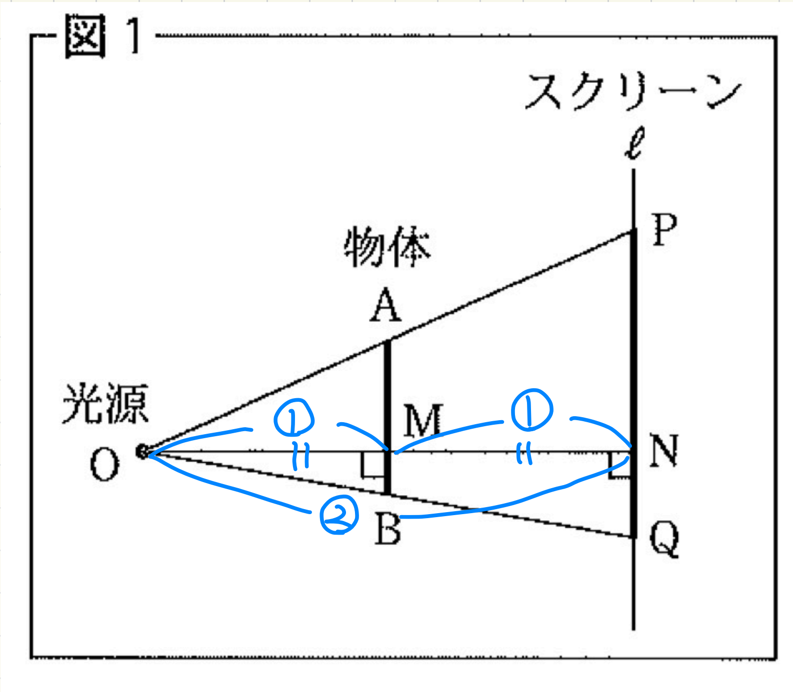
以上より △EBF の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{15}{\sqrt{5}} \times \frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{15 \times 15}{5} = 45\ \mathrm{cm}^2$$

4.

(1)

①



△OAB ∽ △OPQ

また、OM = ON より

OM : ON = 1 : 2

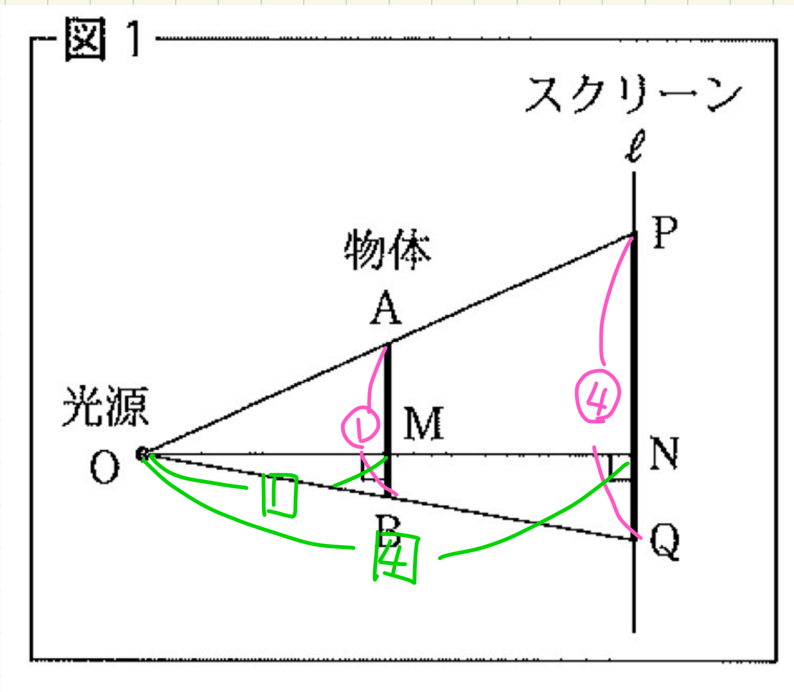
よって、

AB : PQ = 1 : 2

∴ PQ = 2AB

したがって、PQ は AB の 2倍 になる

②



△OAB ∽ △OPQ

PQ を AB の 4倍 にしたいので、AB : PQ = 1 : 4

よって、

OM : ON = 1 : 4

したがって、

OM : MN = 1 : 3

③ 直線OEの式を $y=ax$ とおくと、E(4, 1)を通るから

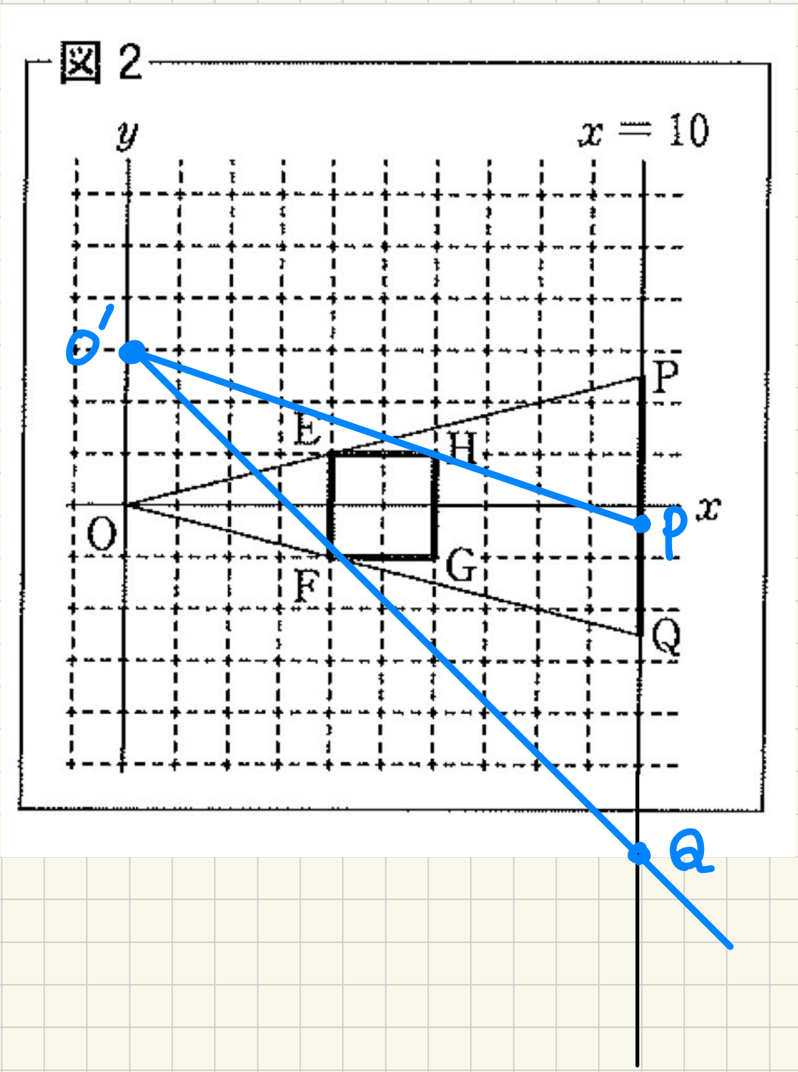
$$1=4a \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

よって、直線OEは $y=\frac{1}{4}x$ で、点Pはこの直線上にあり $x=10$ だから

$$y=\frac{10}{4}$$
$$=\frac{5}{2}$$

よって、$p=\frac{5}{2}$

(2)



O' の座標は (0, n) より

直線O'H、直線O'F の切片は n である。

(a) 直線 O′H の式を $y = mx + n$ とおくと、
H(6, 1) を通るから

$$1 = 6m + n$$

$$\Leftrightarrow 6m = 1 - n$$

$$m = \frac{1-n}{6}$$

よって、$y = \frac{1-n}{6}x + n$ で、点 P はこの直線上にあり、$x = 10$ だから

$$y = \frac{1-n}{6} \times 10 + n$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{5}{3}n + n$$

$$= -\frac{2}{3}n + \frac{5}{3}$$

(b) 直線 O′F の式を $y = mx + n$ とおくと、
F(4, −1) を通るから

$$-1 = 4m + n$$

$$\Leftrightarrow 4m = -1 - n$$

$$m = \frac{-1-n}{4}$$

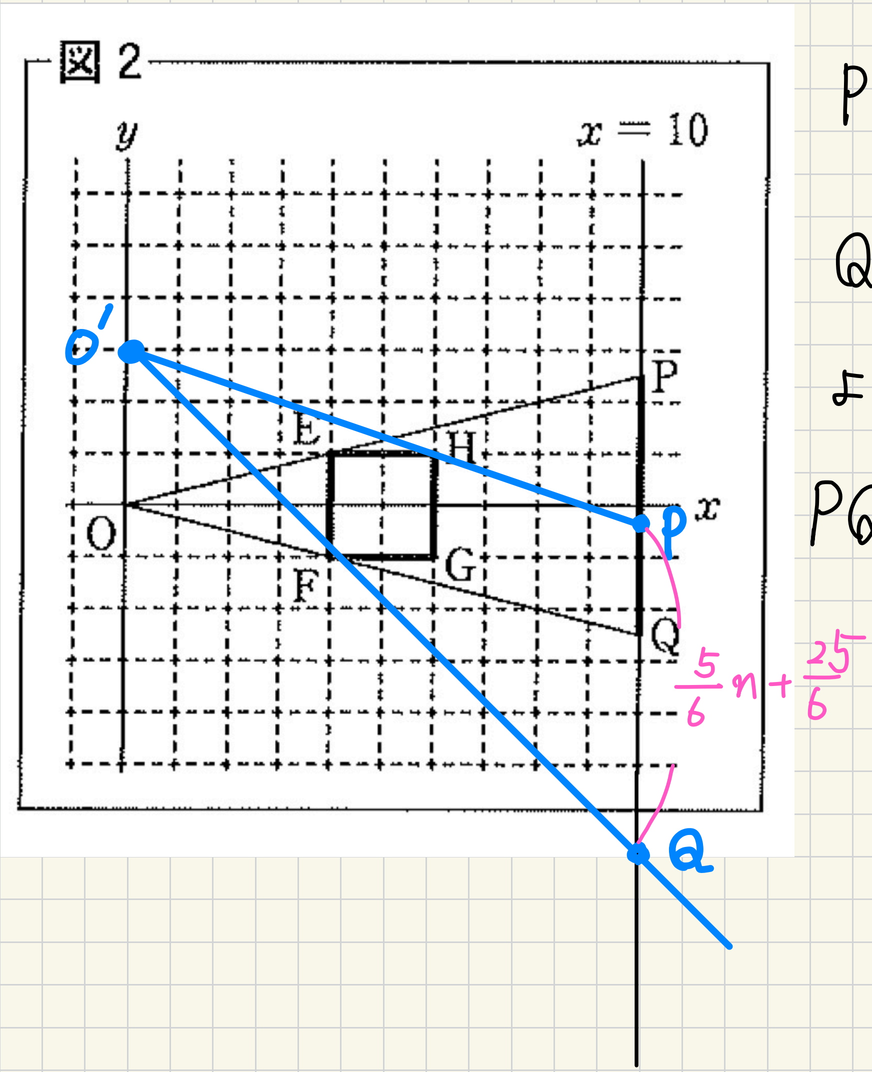
よって、$y = \frac{-1-n}{4} + n$ で、点 Q はこの直線上にあり、$x = 10$ だから

$$y = \frac{-1-n}{4} \times 10 + n$$

$$= -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}n + n$$

$$= -\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}$$

(3)



P の y 座標は $-\frac{2}{3}n + \frac{5}{3}$

Q の y 座標は $-\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}$

より

$$PQ = -\frac{2}{3}n + \frac{5}{3} - \left(-\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}n + \frac{5}{3} + \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{4}{6}n + \frac{9}{6}n + \frac{10}{6} + \frac{15}{6}$$

$$= \frac{5}{6}n + \frac{25}{6}$$

これが 100 cm になれば良いので

$$\frac{5}{6}n + \frac{25}{6} = 100$$

両辺 ÷5

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}n + \frac{5}{6} = 20$$

$\Leftrightarrow \quad n + 5 = 120$

$\therefore n = 115$