2024年度 長野県
数学

Km Km

[問1]

(1) 与式 $= 3+5$

$= \underline{8}$

(2) 与式 $= \dfrac{xy^2}{6} \times \dfrac{12}{xy}$

$= \underline{2y}$

(3) $8n+16 = 8(n+2)$

nは自然数だから、$n+2$も自然数。

よって、$8(n+2)$は常に8の倍数となる。

答えは<u>エ</u>

(4) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$= (\underbrace{\sqrt{5}+\sqrt{3}}_{x} \underset{+}{+} \underbrace{\sqrt{5}-\sqrt{3}}_{y})\{\underbrace{\sqrt{5}+\sqrt{3}}_{x} \underset{-}{-} (\underbrace{\sqrt{5}-\sqrt{3}}_{y})\}$

$= 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{3}$

$= \underline{4\sqrt{15}}$

(5) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-5) = 0$

$\therefore \underline{x = -2, 5}$

(6)

$\underbrace{132+x}_{\text{薄力粉}} : \underbrace{12+x}_{\text{砂糖}} = 7:2$

よって、

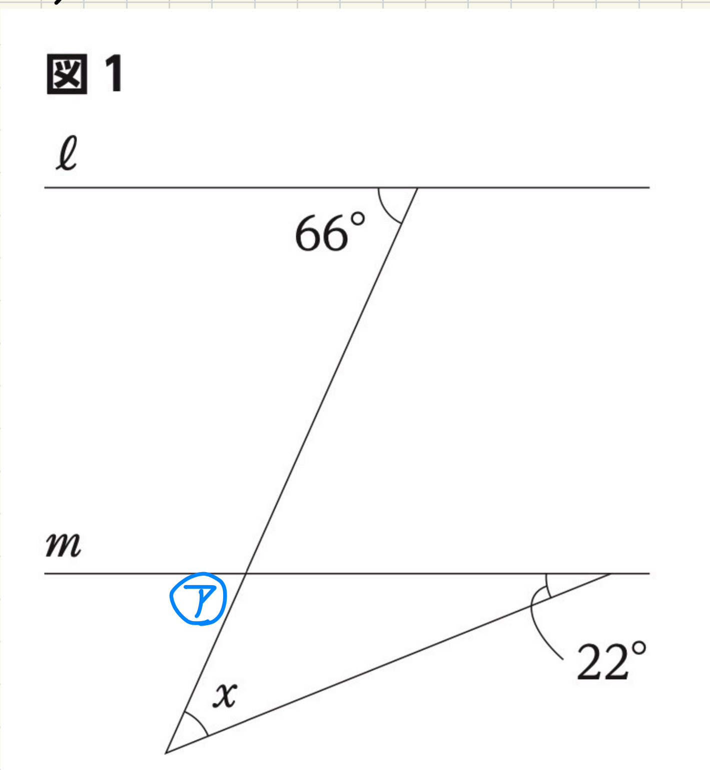
$7(12+x) = 2(132+x)$

$84+7x = 264+2x$

$5x = 180$

$x = 36$

(7)



$\ell \parallel m$ より同位角が等しいから

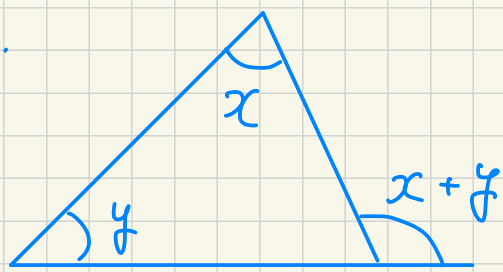
ア $= 66°$

三角形の外角の定理より

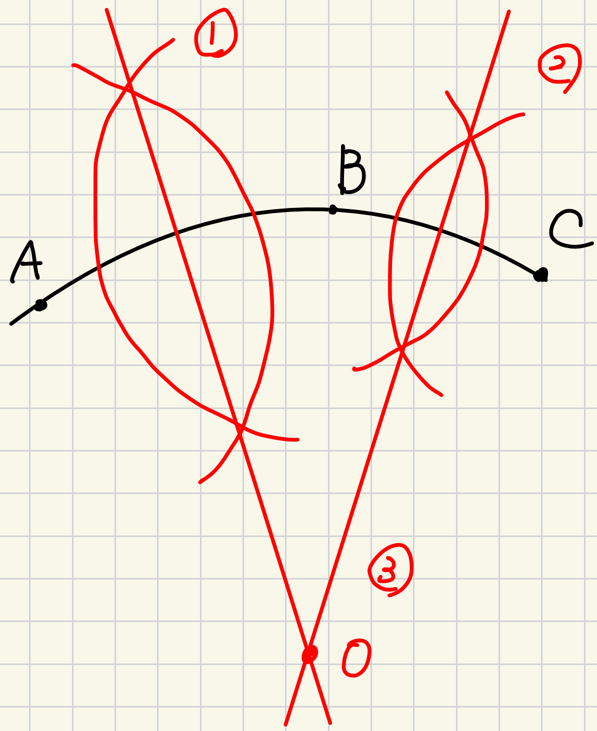
$x + 22 = 66$

$\therefore x = 44°$

※



(8)



① 線分ABの垂直二等分線

② 線分BCの垂直二等分線

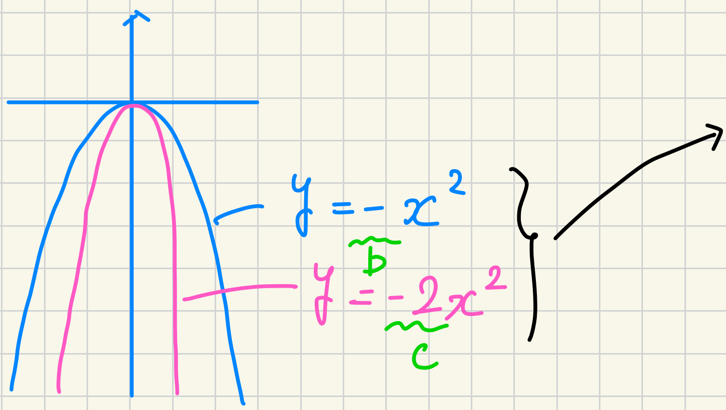
③ ①と②の交点が O.

(9)

① $y=ax^2$ は 上に開いているので $a>0$.
$y=bx^2$, $y=cx^2$ は下に開いているので.
$b<0$, $c<0$.

また, $y=cx^2$ の方が $y=bx^2$ より狭いので,
c の絶対値は b の絶対値より大きい
$\Rightarrow |c|>|b|$
b, c は負の数であるから, $c<b$.

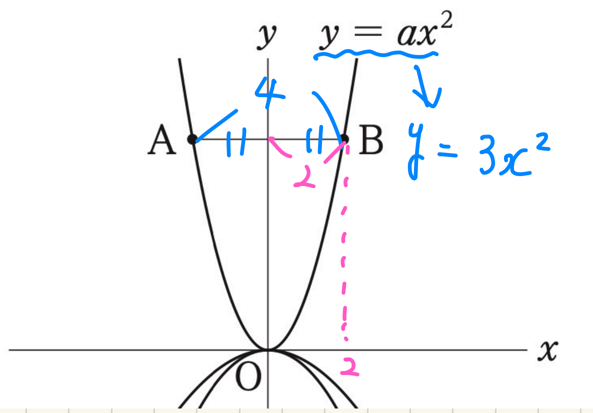
よって, a, b, c の順



$\underbrace{-2}_{c} < \underbrace{-1}_{b}$

② 点A、点Bはy軸について対称

図3



よってBのx座標は2.

$y = 3x^2$ に $x = 2$ を代入して

$$y = 3 \times 2^2$$
$$= 12 \quad \therefore B(2, 12)$$

(10) 3けたの整数は、以下の6通り

123, 132, 213, 231, 312, 321

このうち、奇数となるのは、123, 213, 231, 321 の4通り。よって求める確率は

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

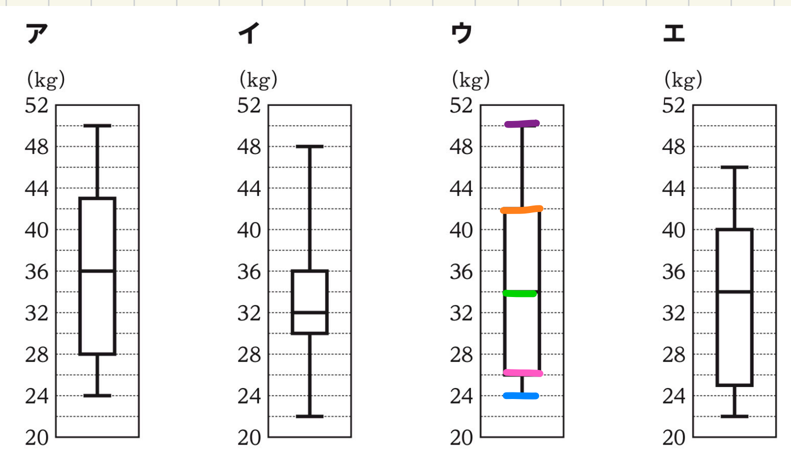
(11)

［データ］

下位データ　　　　　　上位データ

24、26、26、26、28、30、32、34、36、38、40、42、44、48、50

最小値　第1四分位数　中央値　第3四分位数　最大値



よって、ウ

[問2] エ

(1)

① ア：図1の150分以上の生徒数が不明のため、図2と比較できない

イ：図1，図2ともに最大値と最小値が不明のため、範囲＝最大値−最小値も不明

ウ：図1の最頻値の階級は60〜120分なので、

$$階級値 = \frac{60+120}{2} = \frac{180}{2} = 90分$$

図2の最頻値の階級は、30〜60分なので、

$$階級値 = \frac{30+60}{2} = \frac{90}{2} = 45分$$

よって正しい

エ：

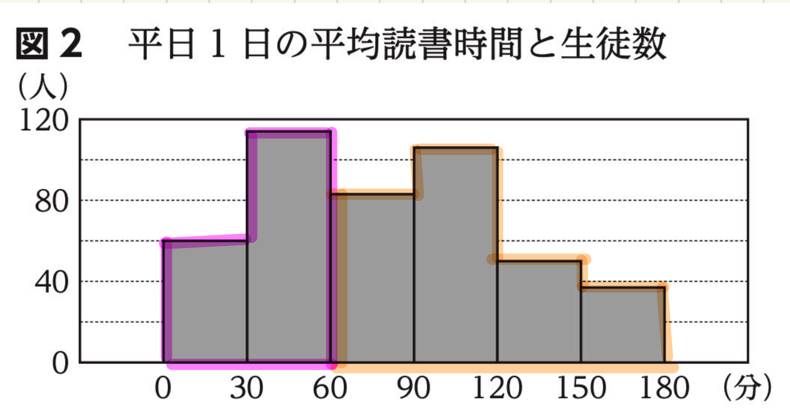


図2のヒストグラムから、0〜60分の生徒より、60〜180分の生徒の方が多い

⇒ 中央値は60分以上の階級にある。

よって誤り

②

i　1・2年生の60分未満の生徒数は94人,
3年生の60分未満の生徒数は80人.
人数だけでみると,1・2年生の生徒数の方が多いが,度数の合計も1・2年生の方が多いため,相対度数で比較する必要がある.
イ

ii.　1・2年生の合計人数と3年生の合計人数が異なるので,相対度数を用いた度数分布多角形をかき,その形を比べる.
また,それぞれのデータの代表値と度数分布多角形を組み合わせて,データの傾向を調べる.

よって,答えはア

(2)

①　図3より4月に「好き」「どちらかといえば好き」と答えた人数の合計

②　7月は4月に比べて,「好き」,「どちらかといえば好き」の人数の合計が $278-220=58$ 人増加している.
7月は4月に比べて,「好き」が10%増,「どちらかといえば好き」が40%増なので.

$$\frac{10}{100}x+\frac{40}{100}y=58$$

よって.

$$\frac{10}{100}x = 58 - \frac{40}{100}$$

③ 夏さんの連立方程式より.

$$\begin{cases} x + y = 220 & \text{— ㋐} \\ \frac{110}{100}x + \frac{140}{100}y = 278 & \text{— ㋑} \end{cases}$$

㋐×11 − ㋑×10 より

$$\begin{array}{rrcr} & 11x + 11y & = & 2420 \\ -) & 11x + 14y & = & 2780 \\ \hline & -3y & = & -360 \end{array}$$

$$\therefore y = 120$$

$y = 120$ を㋐に代入して.

$$x + 120 = 220$$

$$\therefore x = 100.$$

x は4月に「好き」と答えた人数であり. 7月に「好き」と答えた人数は 10% 増だから.

$$100 \times \frac{110}{100} = 110$$

よって. 4月 : 100人, 7月 : 110人

注 y は. 4月に「どちらかといえば好き」と答えた人数である.

(別解) 令さんの連立方程式より.

$$\begin{cases} x = 220 - y & \text{—— ㋐} \\ \dfrac{10}{100}x = 58 - \dfrac{40}{100}y & \text{—— ㋑} \end{cases}$$

㋑ × 10 より

$$x = 580 - 4y \quad \text{—— ㋒}$$

㋐ を ㋒ に代入して

$$220 - y = 580 - 4y$$

$$3y = 360$$

$$y = 120.$$

$y = 120$ を ㋐ に代入して

$$x = 220 - 120$$

$$= 100.$$

x は4月に「好き」と答えた人数であり. 7月に「好き」と答えた人数は 10% 増だから.

$$100 \times \frac{110}{100} = 110$$

よって. 4月: 100人, 7月: 110人

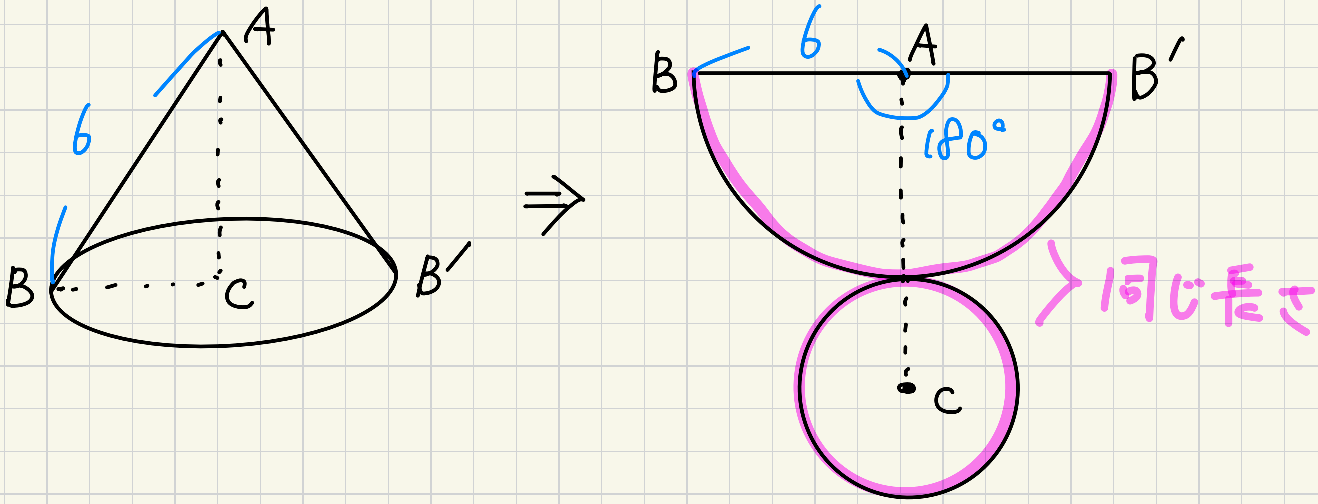
II

(1) 半円を, PQを軸として回転させた立体は球となる. 半径 r の球の体積は. $\frac{4}{3}\pi r^3$ より.

半径が 3cm の球の体積は.

$$\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = \frac{4}{3}\pi \times 81 = 36\pi \text{ cm}^3$$

(2) △ABCを，辺ACを軸として回転させた立体は，円すいとなる。



側面の半円の周の長さと，底面の円周の長さは等しいから、底面の半径をrとすると，

$$\underbrace{6\times 2}_{\text{半円Aの直径}}\times\pi\times\frac{180^\circ}{360}=\underbrace{2\times r}_{\text{円Cの直径}}\times\pi.$$

$$\therefore\ 12\pi\times\frac{1}{2}=2r\pi$$

$$\Leftrightarrow\ 6=2r \qquad \therefore\ r=3$$ … BCの長さでもある

よって，円すいの表面積は，

$$\underbrace{6\times6\times\pi\times\frac{180^\circ}{360}}_{\text{半円Aの面積}}+\underbrace{3\times3\times\pi}_{\text{円Cの面積}}=18\pi+9\pi$$

$$=\underline{27\pi\ \text{cm}^2}$$

また，球の表面積は，半径をrとすると，$4\pi r^2$だから，(1)の表面積は，

$$4\pi\times3^2=\underline{36\pi\ \text{cm}^2}$$

以上より図4を回転させてできる球の表面積は、
図5を回転させてできる円すいの表面積の

$$\frac{36\pi}{27\pi} = \frac{4}{3}\text{倍}$$

(参考)

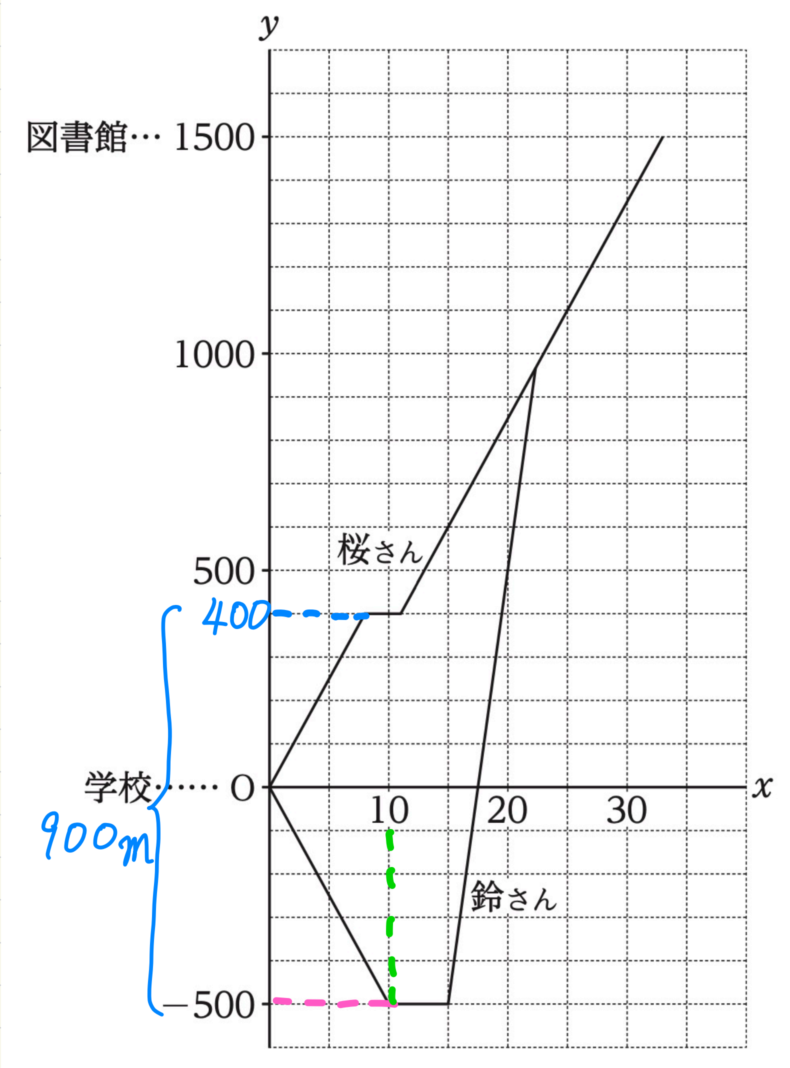
球の表面積は、円すいの表面積のA倍とすると、

$$36\pi = 27\pi \times A \Rightarrow A = \frac{36\pi}{27\pi} = \frac{4}{3}$$

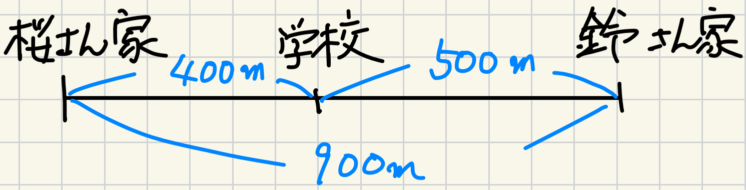
[問3] I

(1)

図1



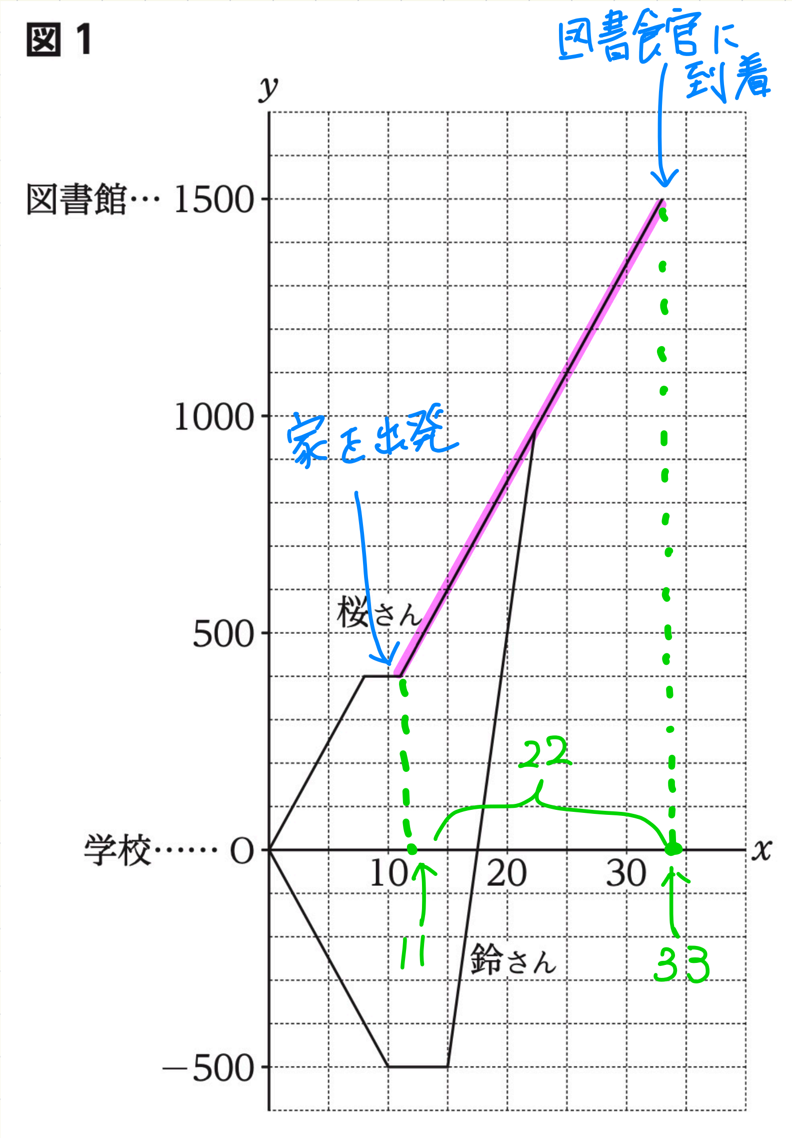
鈴さんは歩いて10分後に帰宅したので、図1より学校から、図書館とは反対の方向に500mの地点にある。あ



また、桜さんの家は、図1より図書館と同じ方向にあり、歩いて8分後に帰宅したから、学校から桜さんの家まで400m。

よって、桜さんの家は、鈴さんの家から900mの地点にある。い

(2)



桜さんが家を出たのは、学校から出発して $8+3=11$ 分後である。
よって、グラフは $(11, 400)$ を通る。

また、学校～図書館は 1500m、学校～桜さんの家は 400m だから、
桜さんの家～図書館は
$1500-400=1100$m

桜さんは分速 50m で進むから、桜さんの家～図書館までにかかる時間は
$1100 \div 50 = 22$ 分

よって、グラフは $(33, 1500)$ を通る。

桜さんの式を $y=ax+b$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
400 &= 11a + b \quad \text{——} ① \\
-)\ 1500 &= 33a + b \quad \text{——} ② \\
\hline
-1100 &= -22a
\end{aligned}
$$

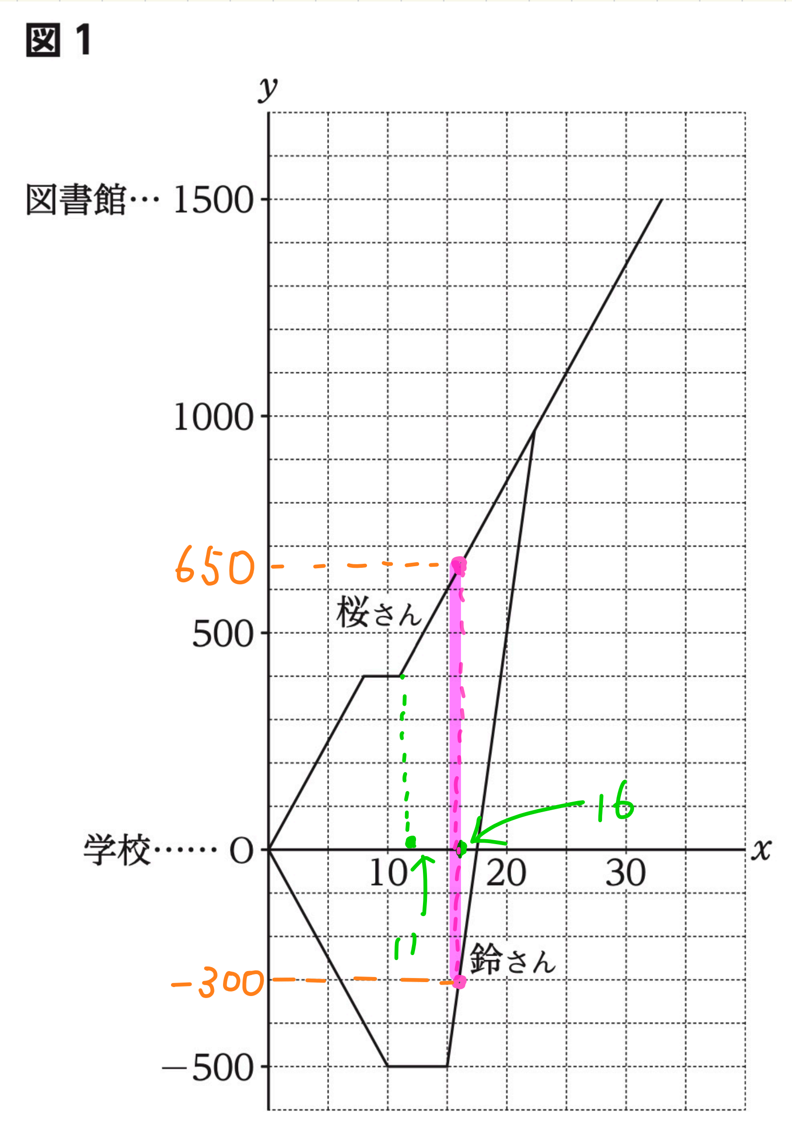
$$a = 50$$

$a=50$ を ① に代入して、

$400 = 11 \times 50 + b \Rightarrow b = -150$

よって，$y = 50x - 150$ で x の変域は $11 \leqq x \leqq 33$

(3)



(2)より桜さんが家を出て5分後は，桜さんが学校を出て16分後なので，$y = 50x - 150$ に $x = 16$ を代入して，

$$y = 50 \times 16 - 150$$
$$= 650$$

また，このとき，鈴さんは，鈴さんの家から自転車で図書館に向かっている。このときの鈴さんの式を $y = ax + b$ とおくと，

分速200mだから，$a = 200$。また，鈴さんは，学校から10分かけて帰宅し，5分後に家を出たので，$x = 15$ のときに鈴さんは家を出た。よって，$(15, -500)$ を通る。以上より，$y = 200x + b$ に $x = 15$，$y = -500$ を代入して，

$$-500 = 200 \times 15 + b \Rightarrow b = -3500$$

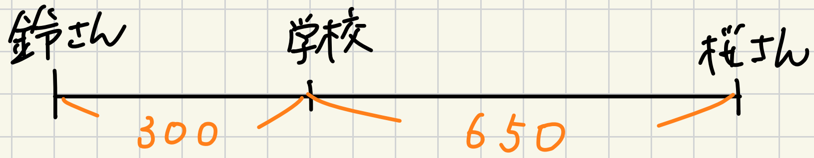
よって，鈴さんのグラフの式は，$y = 200x - 3500$

$x = 16$ のとき.

$y = 200 \times 16 - 3500$

$= 3200 - 3500$

$= -300$



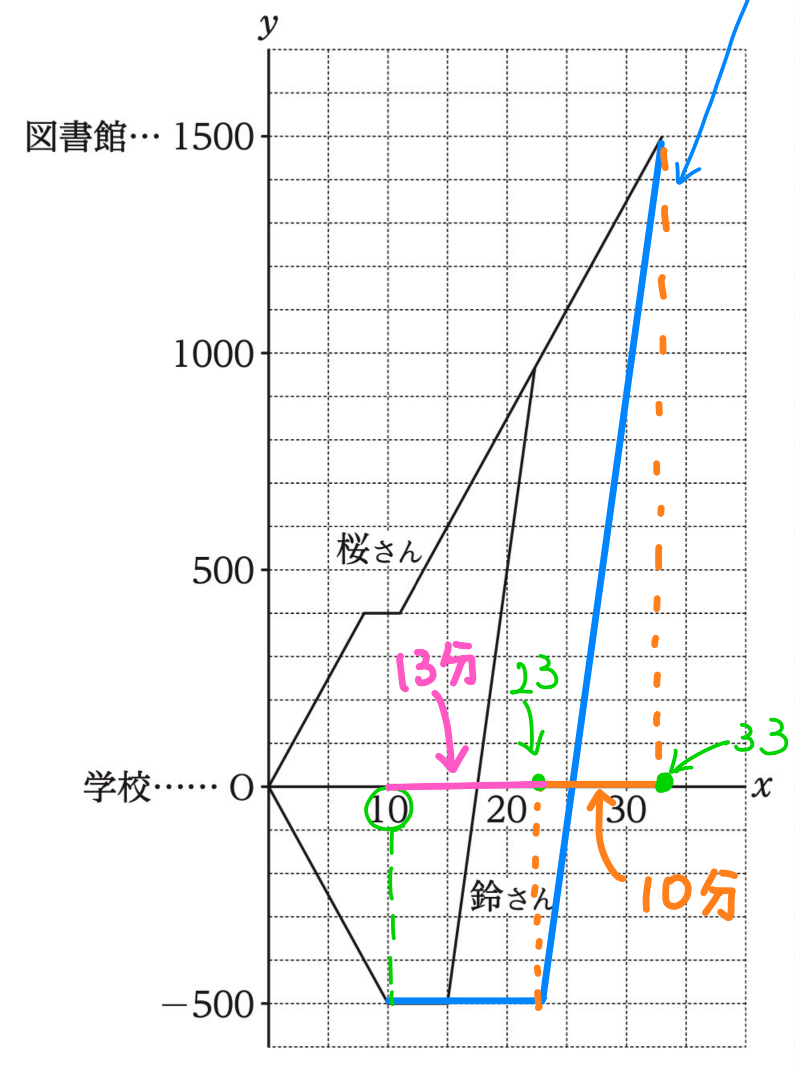
よって, 桜さんと鈴さんの距離は.

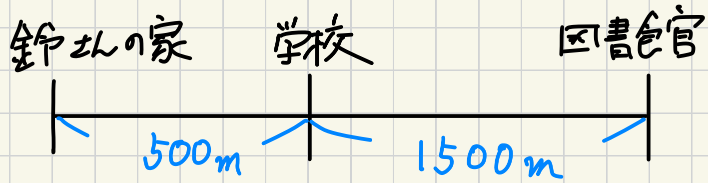
$650 + 300 = 950$ m

(4)

図 1

鈴さんのグラフ





鈴さんの家〜図書館は.

$500 + 1500 = 2000$ m.

鈴さんは. 分速200mで進むから, かかる時間は

$2000 \div 200 = 10$分

よって, 鈴さんは.

$x = 33 - 10$

$= 23$

のときに, 鈴さんの家を出発した。

また，$x=10$ のとき，鈴さんは家に着いたので，
家にいた時間は $23-10=13$ 分．
よって，鈴さんは帰宅してから13分後に家を出発した。

II

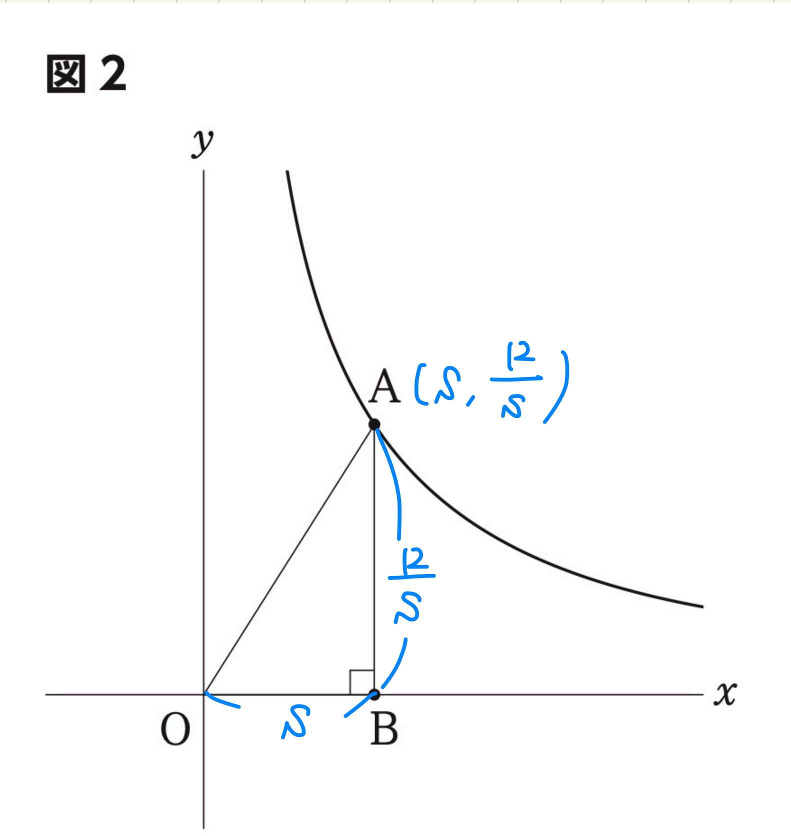
(1)

① $y=\frac{12}{x}$ において，y が自然数となるのは，

x が12の約数のときである．12の約数は，
1, 2, 3, 4, 6, 12

なので，x，y がともに自然数となるのは，6個

②



点 A の x 座標を s とする．点 A は $y=\frac{12}{x}$ 上にあり，$x=s$ だから

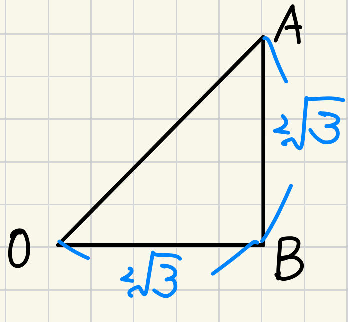
$$y=\frac{12}{s} \quad \therefore A\left(s, \frac{12}{s}\right)$$

よって，$OB=s$，$AB=\frac{12}{s}$

$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形だから，$OB=AB$．
よって，

$$s=\frac{12}{s} \Leftrightarrow s^2=12 \quad \therefore s=\pm 2\sqrt{3}.$$

点Aのx座標は正なので、$s = 2\sqrt{3}$



また、$OB : AB : OA = 1 : 1 : \sqrt{2}$

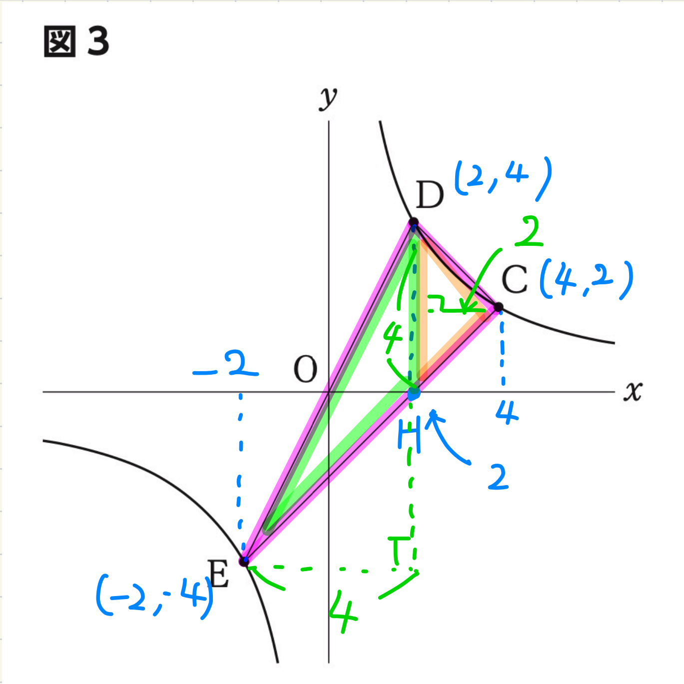
より

$\underbrace{OB}_{2\sqrt{3}} : OA = 1 : \sqrt{2}$

よって、$OA = 2\sqrt{6}$ cm

(2)

①



点Dは $y = \dfrac{8}{x}$ 上にあり、

$x = 2$ なので、

$$y = \frac{8}{2} = 4 \quad \therefore D(2,4)$$

点Cは $y = \dfrac{8}{x}$ 上にあり、

x座標は、Dのy座標と等しいから、$x = 4$

$$\therefore y = \frac{8}{4} = 2 \quad \therefore C(4,2)$$

双曲線は、原点について対称なので、点Eは、点Dと原点について対称。よって、E$(-2,-4)$

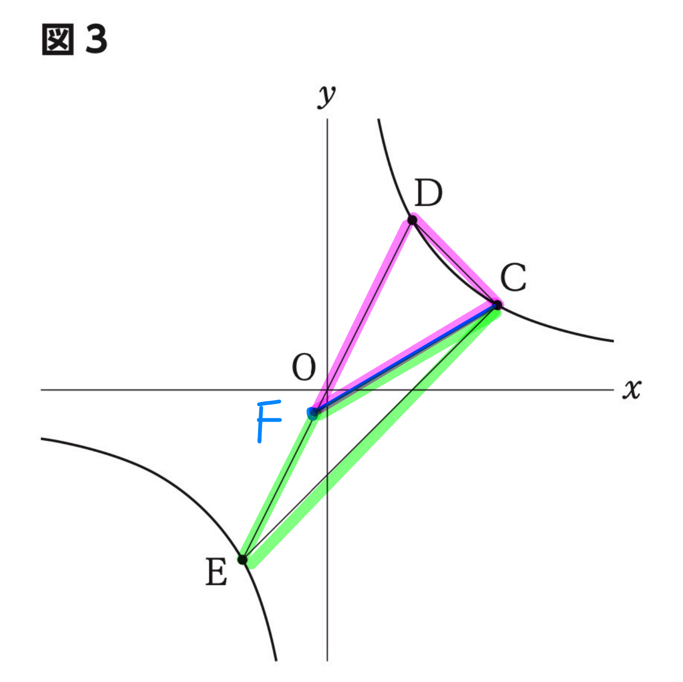
点Dからx軸に垂線を下ろした足をHとすると、

$$\triangle CDE = \triangle DEH + \triangle DHC$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2$$

$$= 8 + 4 = 12 \text{ cm}^2$$

②



点Cを通り、△CDEの面積を2等分する直線と、線分DEの交点をFとする。

△CDF＝△CFEとなれば良い。△CDFの底辺をDF、△CFEの底辺をFEとすると、高さは等しいので、DF＝FEとなれば良い。

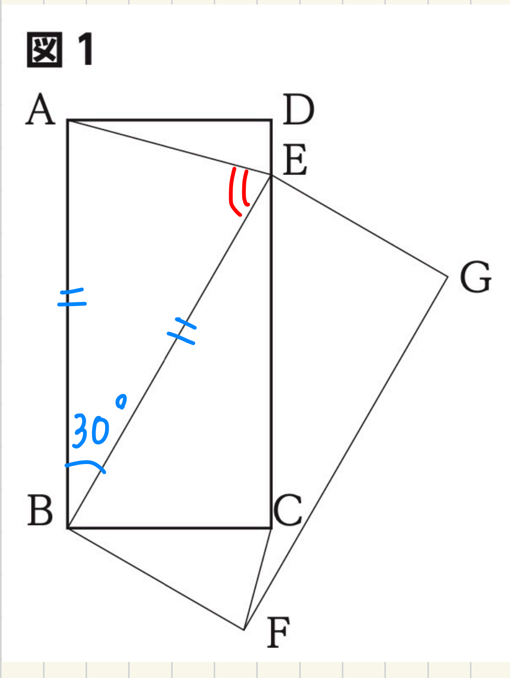
よって、FはDEの中点であり、これは原点に一致する。
したがって求める直線は原点とC(4, 2)を通るから、
$y=ax$とおくと、

$$2=4a \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

よって、求める直線の式は $y=\frac{1}{2}x$

[問4]

(1)

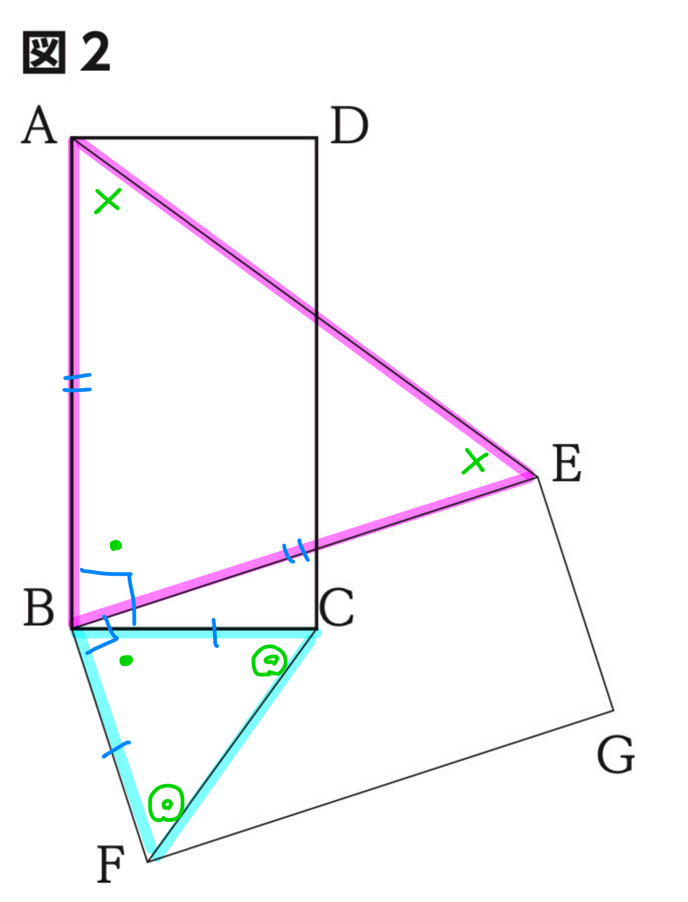


□EBFGは□ABCDを回転させてできた図形だから、
AB＝EB。よって、△ABEは二等辺三角形なので、

$$\angle AEB = (180^\circ - 30^\circ) \div 2$$
$$= 75^\circ$$

(2)

①



$\angle ABC = 90°$, $\angle EBF = 90°$

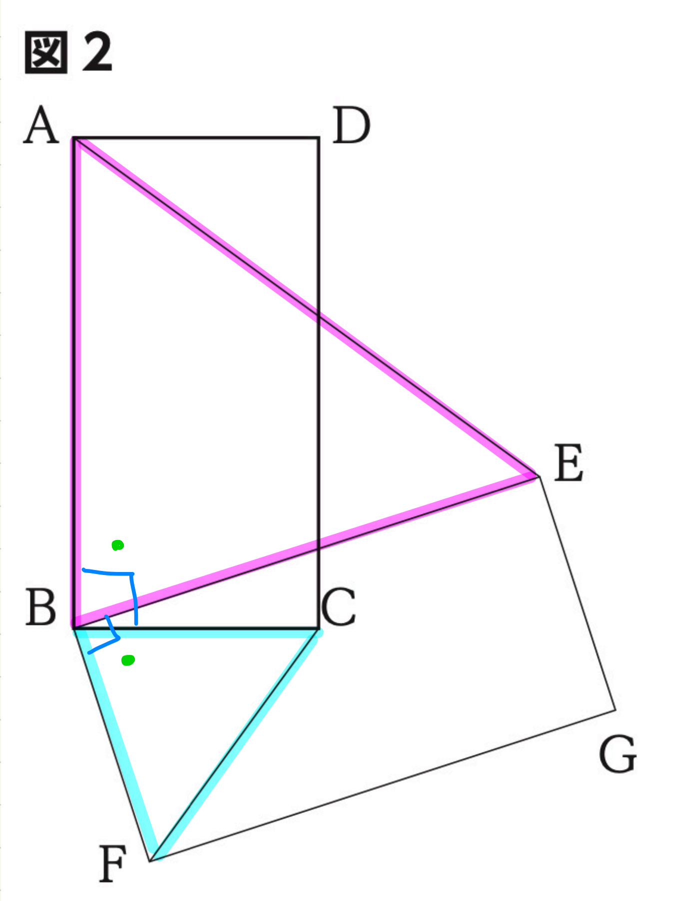
$\angle ABE = 90° - \angle CBE$
$\angle CBF = 90° - \angle CBE$
よって、$\angle ABE$ と $\angle CBF$ は、
どちらも $90° - \angle CBE$ あ

$\triangle BAE$ と $\triangle BCF$ において、
$\angle ABE = \angle CBF$ ―― ①
また、長方形ABCDを、点Bを中心に回転させた図形が
長方形EBFGなので、対応する辺は等しいから、
$BA = BE$, $BC = BF$
よって、$\triangle ABE$ と $\triangle CBF$ は2つの辺が等しいので、
それぞれ二等辺三角形である。
二等辺三角形の2つの底角い は等しいので、
$\angle BAE = \angle BEA$ ―― ②
$\angle BCF = \angle BFC$ ―― ③
三角形の内角の和が180°であることと、①、②、③から、

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(180°\text{う} - \angle ABE) &= \angle BAE \\ \frac{1}{2}(180°\text{う} - \angle CBF) &= \angle BCF \end{aligned}\right\} \text{―― ④}$$

①, ④ より ∠BAE = ∠BCF

②



△ABE と △CBF で、
長方形の1つの角は90°だから、

$\angle ABE = 90^\circ - \angle CBE$

$\angle CBF = 90^\circ - \angle CBE$

よって、

$\angle ABE = \angle CBF$ —— ①

BA = 6cm, BC = 3cm
だから、

$BA : BC = 2 : 1$

BE = 6cm, BF = 3cm だから

$BE : BF = 2 : 1$

よって、

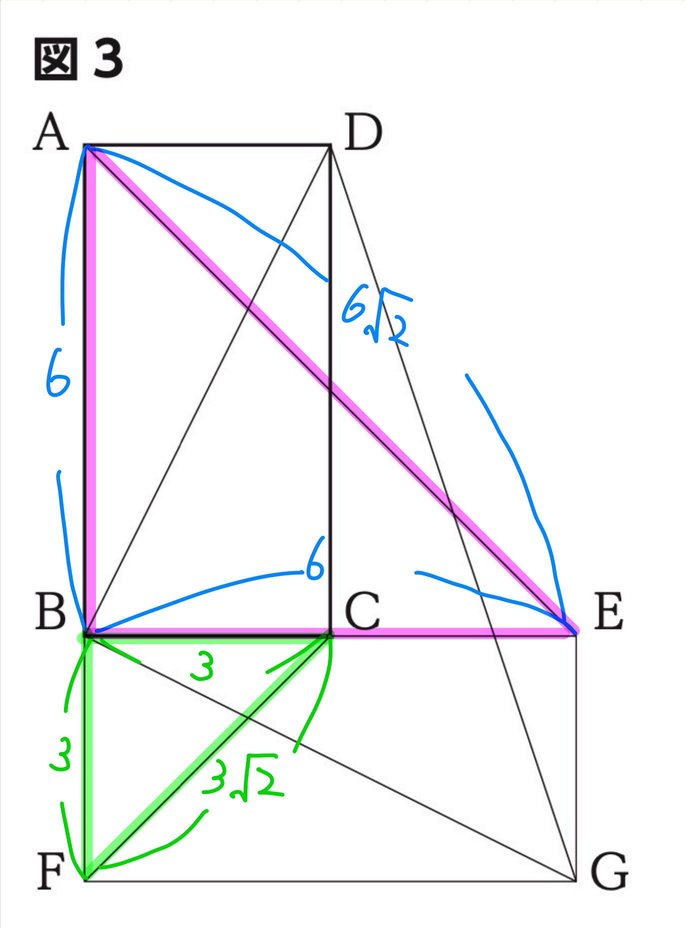
$BA : BC = BE : BF$ —— ②

①, ② より 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE \sim \triangle CBF$ (証明終わり)

(3)

㋓



$\triangle ABE$, $\triangle CBF$ は

直角二等辺三角形だから.

$AB : BE : AE = 1 : 1 : \sqrt{2}$

$CB : BF : CF = 1 : 1 : \sqrt{2}$

よって.

$\underbrace{AB}_{6} : AE = 1 : \sqrt{2}$

$\therefore AE = 6\sqrt{2}$

$\underbrace{CB}_{3} : CF = 1 : \sqrt{2}$

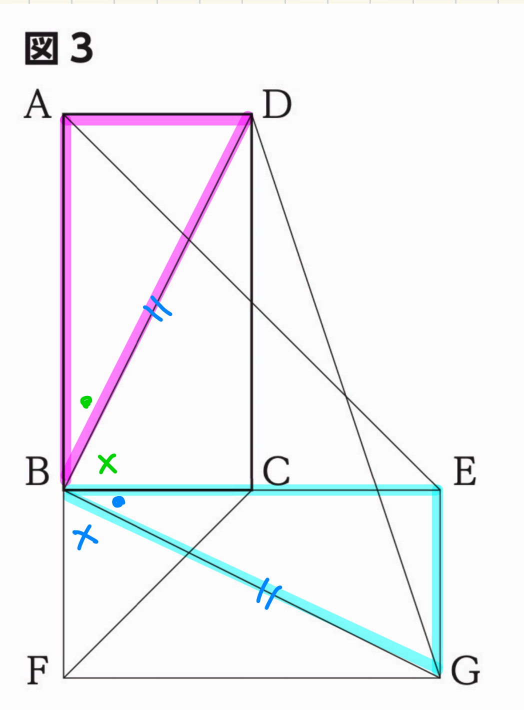
$\therefore CF = 3\sqrt{2}$.

したがって,

$CF : AE = 3\sqrt{2} : 6\sqrt{2}$

$= 1 : 2$

㋔



$\angle EBG = \bullet$, $\angle GBF = x$

とおくと. $\bullet + x = 90°$

また. $\triangle ABD \equiv \triangle EBG$だから.

$\angle ABD = \bullet$

$\angle ABC = 90°$ より

$\angle DBC = 90° - \bullet$

$= x$

よって，

$$\angle DBG = x + \bullet$$
$$= 90^\circ$$

また，BD = BG より，△DBGは直角二等辺三角形，
△ABDで三平方の定理より

$$BD = \sqrt{6^2 + 3^2}$$
$$= 3\sqrt{5}\ cm$$

$= \sqrt{36 + 9}$
$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

よって，△DBGで，BD : BG : DG = 1 : 1 : $\sqrt{2}$ より

$$\underset{3\sqrt{5}}{BD} : DG = 1 : \sqrt{2}$$

$$\therefore DG = 3\sqrt{10}\ cm$$

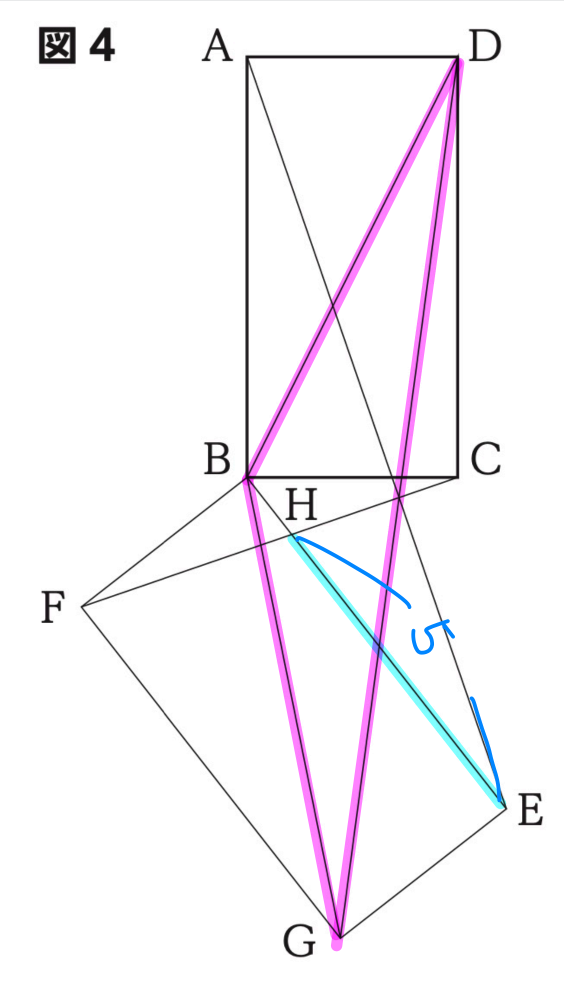
CF = $3\sqrt{2}$ cm より

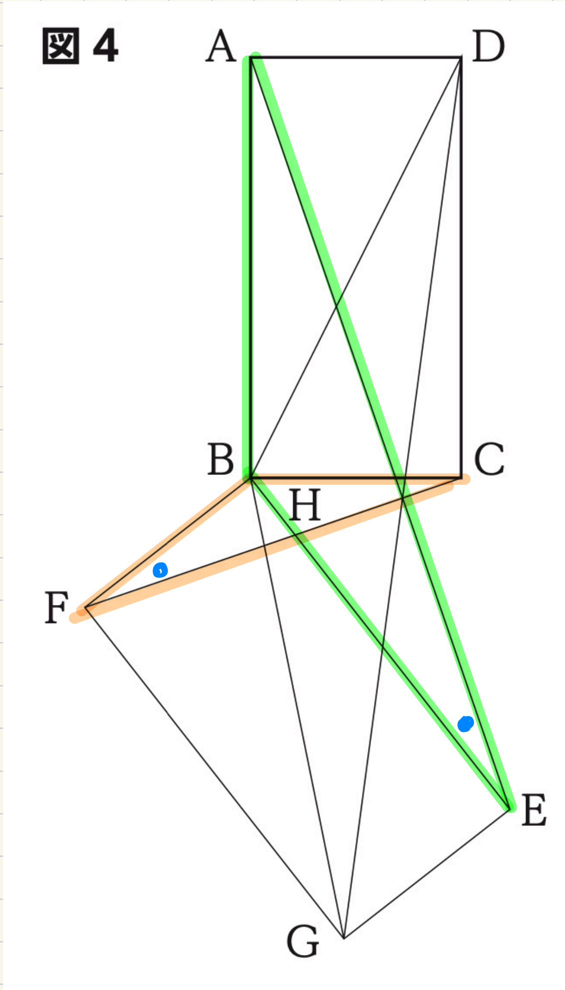
$$CF : DG = 3\sqrt{2} : 3\sqrt{10}$$
$$= \sqrt{2} : \sqrt{10}$$
$$= 1 : \sqrt{5}$$

3で割る

$\sqrt{2}$で割る．

(4)



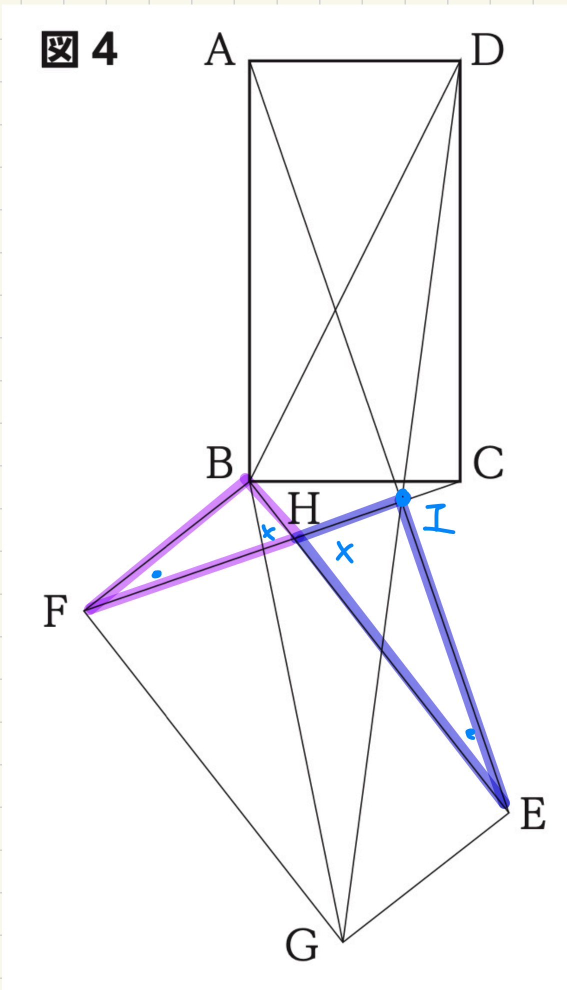


(2)より

△ABE∽△CBF

だから

∠BEA＝∠BFC ―― ①



CFとBEの交点をIとする。

△HBFと△HIEにおいて、

対頂角は等しいから

∠BHF＝∠IHF ―― ②

①,②より2組の角がそれぞれ等しいので、

△HBF∽△HIE ―― ③

対応する角は等しいから

∠HBF＝∠HIE

∠HBF＝90°（長方形の1つの角）

より ∠HIE＝90°

また，EH = 5 cm，BE = 6 cm より．BH = 1 cm．
BF = 3 cm より．△HBFで三平方の定理から．

$$HF = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{10}\ \mathrm{cm}.$$

③から対応する辺の比は等しいので．

$$\underbrace{HB}_{1} : HI = \underbrace{HF}_{\sqrt{10}} : \underbrace{HE}_{5}$$

$$\therefore \sqrt{10}\,HI = 5$$

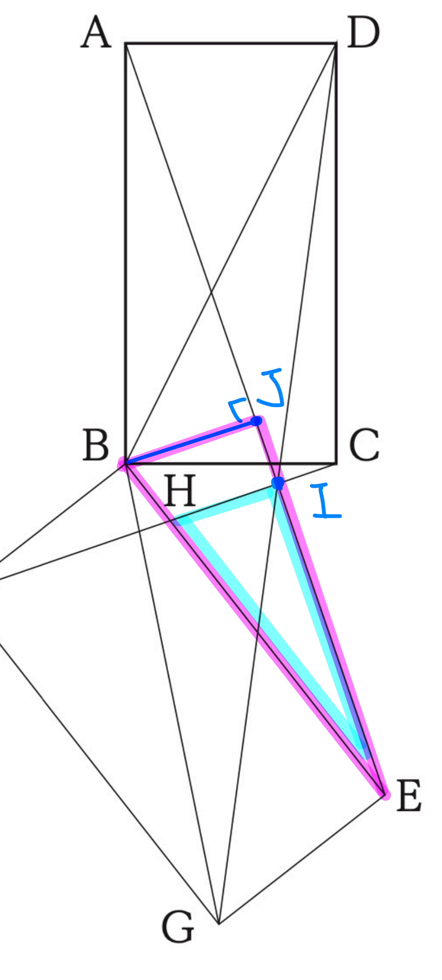
$$HI = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}\ \mathrm{cm}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}$$

図 4



点BからAEに垂線を下ろした足をJとする．

△EBJと△EHIにおいて．

∠EJB = ∠EIH = 90° —④

共通な角は等しいから

∠BEJ = ∠HEI ——⑤

④．⑤より2組の角がそれぞれ等しいので．

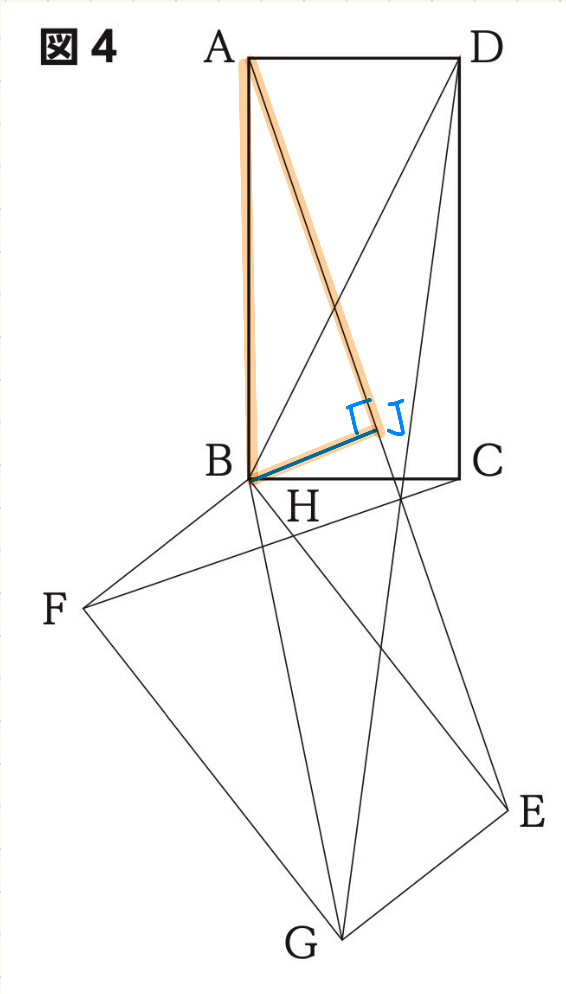
△EBJ ∽ △EHI

対応する辺の比は等しいから

$$\underset{6}{EB} : \underset{5}{EH} = BJ : \underset{\frac{\sqrt{10}}{2}}{HI}$$

$$5BJ = 3\sqrt{10}$$

$$\therefore BJ = \frac{3\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$



△ABJで三平方の定理より

$$AJ = \sqrt{6^2 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{36 - \frac{90}{25}}$$

$$= \sqrt{36 - \frac{18}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{180 - 18}{5}}$$

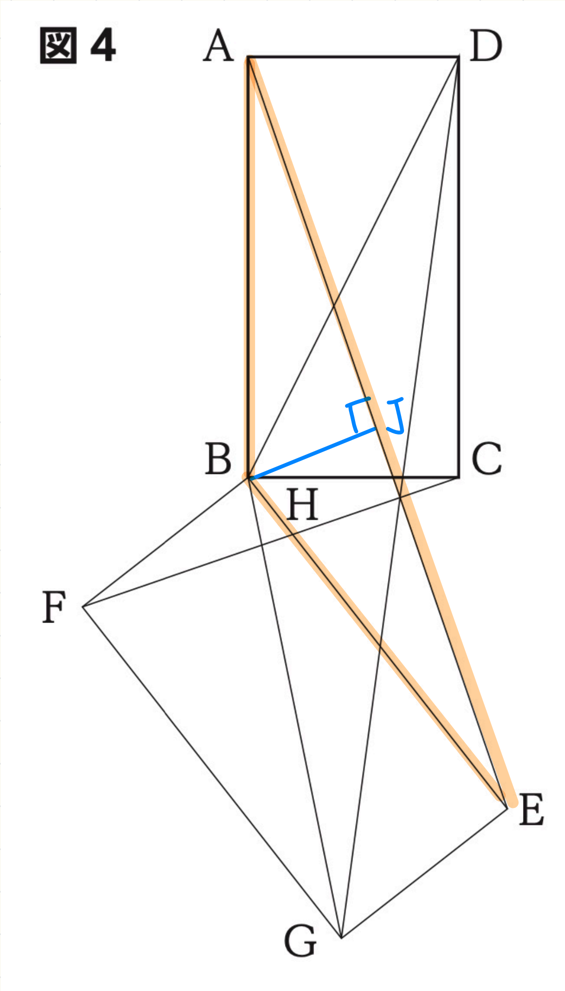
$$= \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$= \frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$



△ABEはAB＝BEの二等辺三角形で、JはBからAEに垂線を下ろした足なので、JはAEの中点である。

よって、

$$AE = 2AJ$$

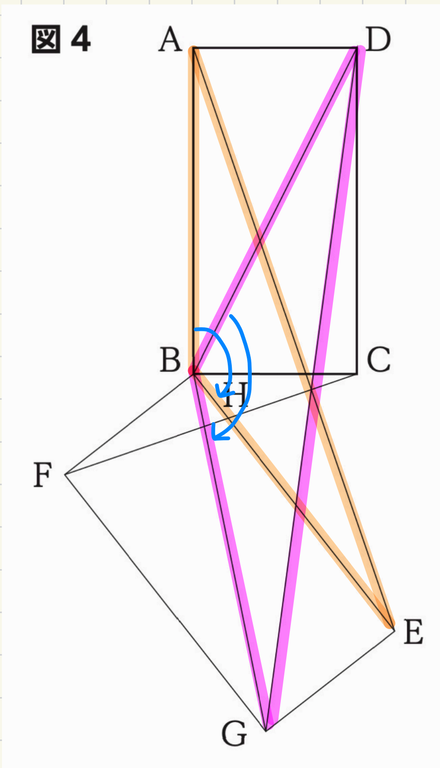
$$= 2 \times \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$= \frac{18\sqrt{10}}{5}\ \text{cm}$$

よって、△ABEの面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{18\sqrt{10}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{18 \times 3 \times 10}{2 \times 5 \times 5}$$

$$= \frac{54}{5}\ \text{cm}^2$$



△ABEと△DBGにおいて、

□EBFGは□ABCDを回転させてできたので、

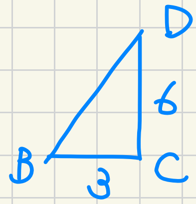
$$\underbrace{\angle ABE = \angle DBG}_{\text{回転した角度}} \quad \text{—— ⑥}$$

また、AB＝BE，DB＝BGより

$$AB : DB = BE : BG \quad \text{—— ⑦}$$

⑥,⑦より2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから.

$$\triangle ABE \sim \triangle DBG$$



$\Rightarrow DB = \sqrt{3^2+6^2}$

$= \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$

相似比は

$$AB : DB = 6 : 3\sqrt{5}$$

$$= 2 : \sqrt{5}$$

相似な三角形の面積比は、相似比の2乗に等しいので

$$\underbrace{\triangle ABE}_{\frac{54}{5}} : \triangle DBG = 2^2 : \sqrt{5}^2$$

$$= 4 : 5$$

よって

$$4 \times \triangle DBG = \frac{54}{5} \times 5$$

$$= 54$$

$$\therefore \triangle DBG = \frac{54}{4}$$

$$= \frac{27}{2}\ cm^2$$