2024年度 埼玉県

数学

km km

1.

(1) 与式 $= \underline{2x}$

(2) 与式 $= -8-1$

$= \underline{-9}$

(3) 与式 $= \dfrac{6x^2y \times 12y}{4x}$

$= \underline{18xy^2}$

(4) 式を整理して

$-x = 4$

$\therefore\ \underline{x = -4}$

(5) 与式 $= 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$= \underline{3\sqrt{3}}$

(6) 与式 $= (x-9)(x+8)$

(7) $\begin{cases} 6x - y = 10 & \text{—— ①} \\ 4x + 3y = -8 & \text{—— ②} \end{cases}$

① × 3 + ② より

$$\begin{array}{rrcr} & 18x - 3y & = & 30 \\ +) & 4x + 3y & = & -8 \\ \hline & 22x & = & 22 \\ & x & = & 1 \end{array}$$

$x=1$ を①に代入して

$6 - y = 10$

$\therefore\ y = -4$

よって

$\underline{x = 1,\ y = -4}$

(8) 解の公式より

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$$

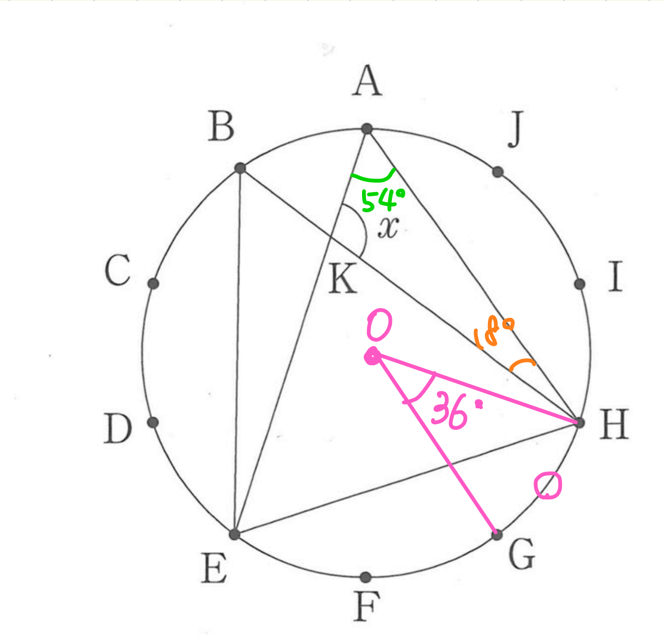
$$= \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{4}$$

(9) 求める一次関数の式を $y = ax + b$ とおくと、
傾きが 2 なので、$a = 2$　よって、$y = 2x + b$
$x = -3$, $y = -2$ なので…

$$-2 = 2 \times (-3) + b \quad \therefore b = 4$$

よって、$y = 2x + 4$

(10)



円の中心を O とする

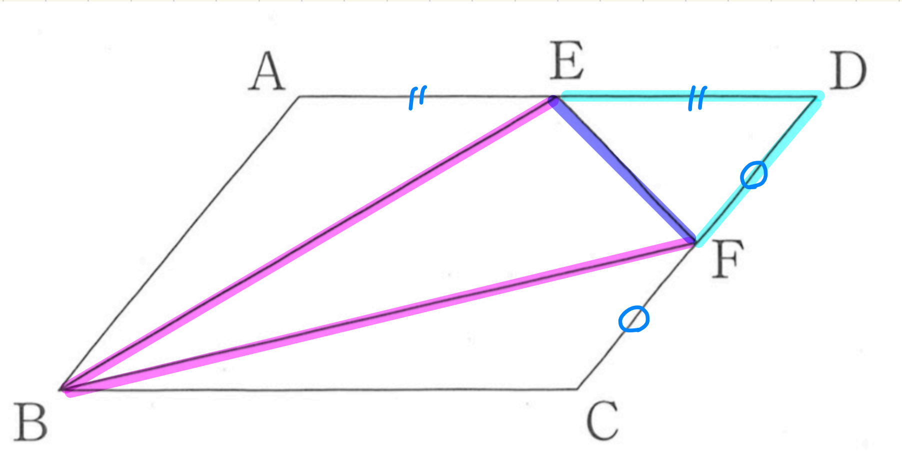
$\angle GOH = 360° \div 10$
$= 36°$

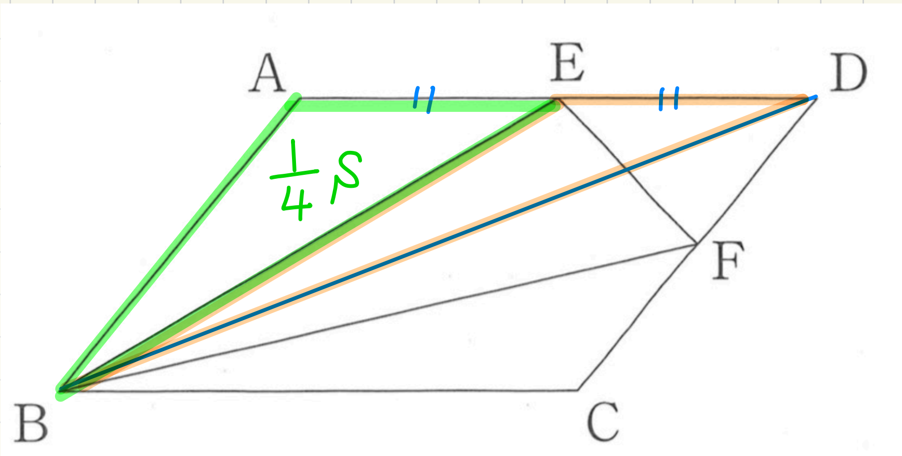
よって ○ に対する中心角は 36° で、円周角は 18°
中心角の半分

$\angle EAH$ は $\overset{\frown}{EH}$ に対する円周角で ○ 3つ分の円周角
だから、$\angle EAH = 18° \times 3 = 54°$
$\angle BHA$ は ○ 1つ分の円周角だから 18°
$\triangle AKH$ で、内角の和は 180° だから

$$\angle x = 180° - (54° + 18°) = 108°$$

(11)





□ABCDの面積をSとする。
BDに補助線を引くと、
△ABDと△CBDの面積は等しいから、

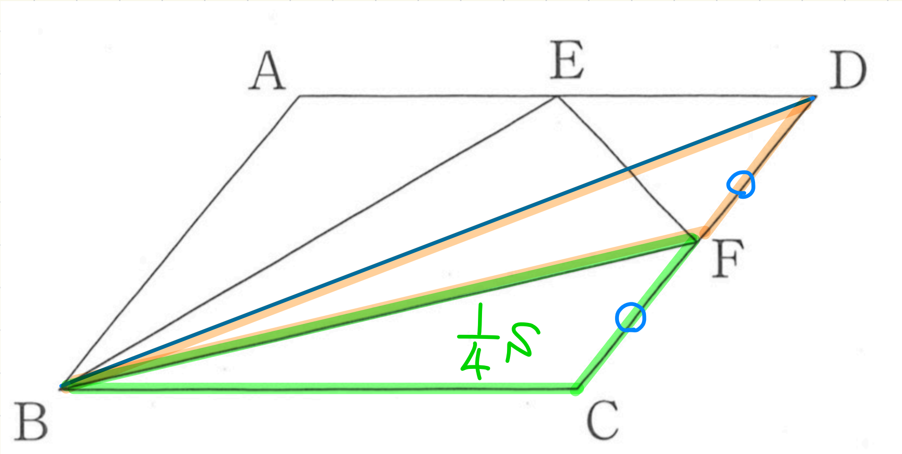
$\triangle ABD = \frac{1}{2}S$

△ABEと△EBDにおいて、底辺をそれぞれAE, EDとすると、AE=EDで、高さも等しいから面積も等しい。
よって

$\triangle ABE = \frac{1}{2} \times \triangle ABD$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}S$

$= \frac{1}{4}S$



同様に、

$\triangle BCD = \frac{1}{2}S$

$\triangle BCF$と$\triangle BFD$において、底辺をそれぞれCF, FDとすると、

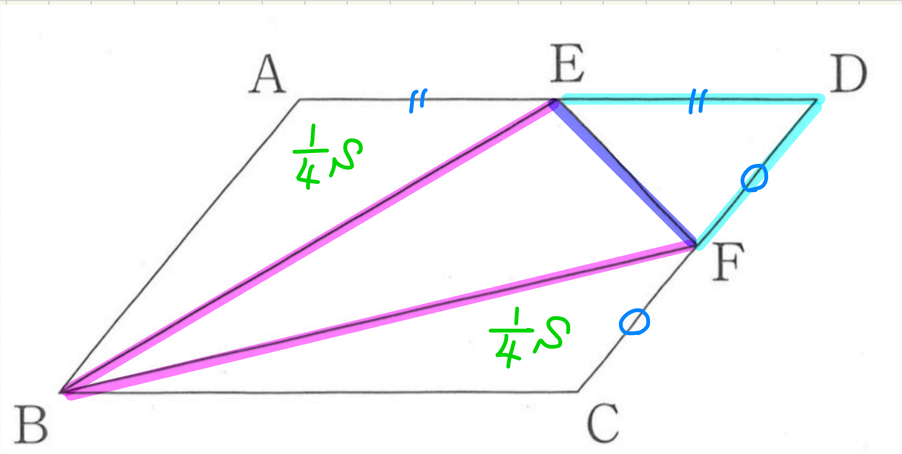
CF = FDで高さも等しいから、面積も等しい。

よって

$$\triangle BCF = \frac{1}{2} \times \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}S$$

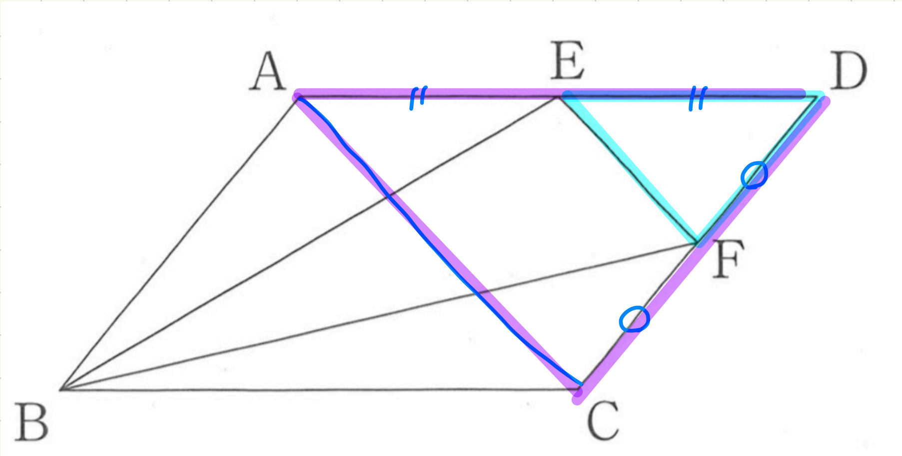
$$= \frac{1}{4}S$$



よって

$$\triangle EBF + \triangle DEF = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S$$

$$= \frac{1}{2}S \quad ——— ㋐$$



$\triangle DAC$ は▱ABCD の半分だから

$\triangle DAC = \frac{1}{2}S$

また、$\triangle DAC$ と $\triangle DEF$ において、E, F は DA, DC の中点だから、中点連結定理より $EF \parallel AC$

よって、同位角が等しいから

$\angle DAC = \angle DEF$ —— ①

$\angle DCA = \angle DFE$ —— ②

①, ② より2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle DAC \sim \triangle DEF$

相似比は DA : DE = 2 : 1 であり、面積比は相似比の2乗に等しいから

$\underbrace{\triangle DAC}_{\frac{1}{2}S} : \triangle DEF = 2^2 : 1$

$= 4 : 1$

よって

$4 \times \triangle DEF = \frac{1}{2}S$

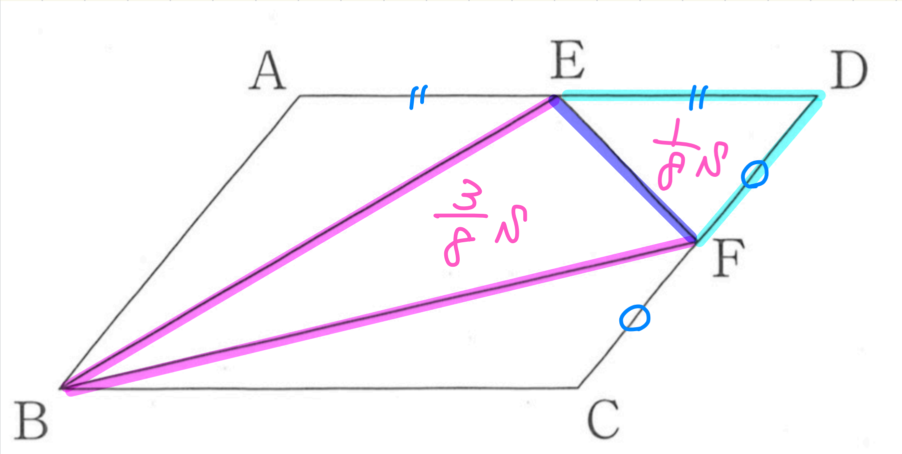
$\triangle DEF = \frac{1}{8}S$

㋐より

$\triangle EBF + \underbrace{\triangle DEF}_{\frac{1}{8}S} = \frac{1}{2}S$

だから

$$\triangle EBF = \frac{1}{2}S - \frac{1}{8}S$$
$$= \frac{3}{8}S$$



よって、△EBFは
△DEFの3倍

(12)

ア：20人のデータの中央値は、データを小さい順に
並べたときの10番目と11番目の平均値

借りた本の冊数(冊)	度数(人)	累積度数
以上　未満		
0 〜 4	2	2
4 〜 8	3	5
8 〜 12	4	9
12 〜 16	8	17 …10番目〜17番目のデータ
16 〜 20	3	20
合計	20	

よって、10番目、11番目が含まれる階級は、12〜16冊
なので、中央値の階級も12〜16冊。よって誤り。

イ：8〜12冊の相対度数は

$$\frac{4}{20}=0.2$$

よって誤り

ウ：最頻値は、8人が借りた冊数の12〜16冊

よって誤り

エ：12〜16冊の累積度数は17人だから

累積相対度数は

$$\frac{17}{20}=0.85$$

よって正しい

(13) 2つのさいころを投げたときの出る目は、$6\times6=$

36通り

さいころの最大の目は6なので、$10x+y$の最大値

は66である

→ $10x+y$ に $x=6$, $y=6$ を代入して $60+6=66$

また、さいころの最小の目は1なので、$10x+y$の

最小値は11である

→ $10x+y$ に $x=1$, $y=1$ を代入して $10+1=11$

11〜66で7の倍数となるのは、

14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63

である。

・$10x+y=14 \Rightarrow (x,y)=(1,4)$ 1通り

・$10x+y=21 \Rightarrow (x,y)=(2,1)$ 1通り

・$10x+y=28 \Rightarrow$ これを満たすx,yは存在しない！

・$10x+y=35 \Rightarrow (x,y)=(3,5)$ 1通り

・$10x+y=42 \Rightarrow (x,y)=(4,2)$ 1通り

・$10x+y=49 \Rightarrow$ これを満たすx,yは存在しない

・$10x+y=56 \Rightarrow (x,y)=(5,6)$ 1通り

・$10x+y=63 \Rightarrow (x,y)=(6,3)$ 1通り

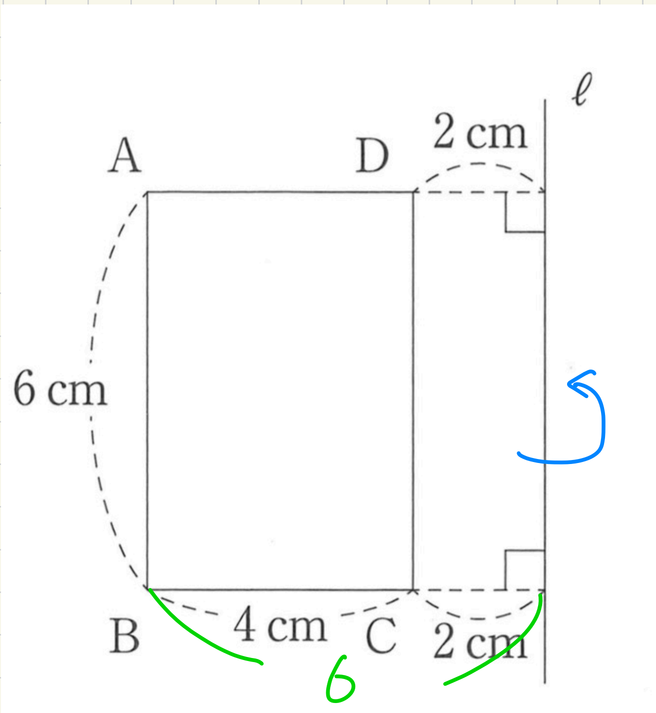
以上より、$10x+y$が7の倍数となるのは、

$1+1+1+1+1+1=6$通り

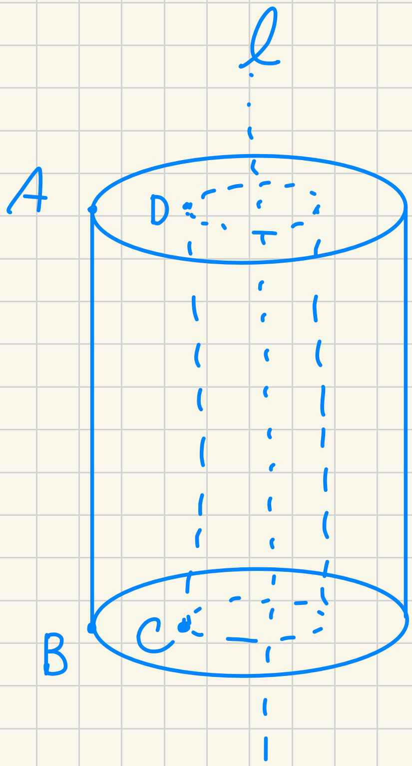
よって、求める確率は

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

(14)



$\Rightarrow$



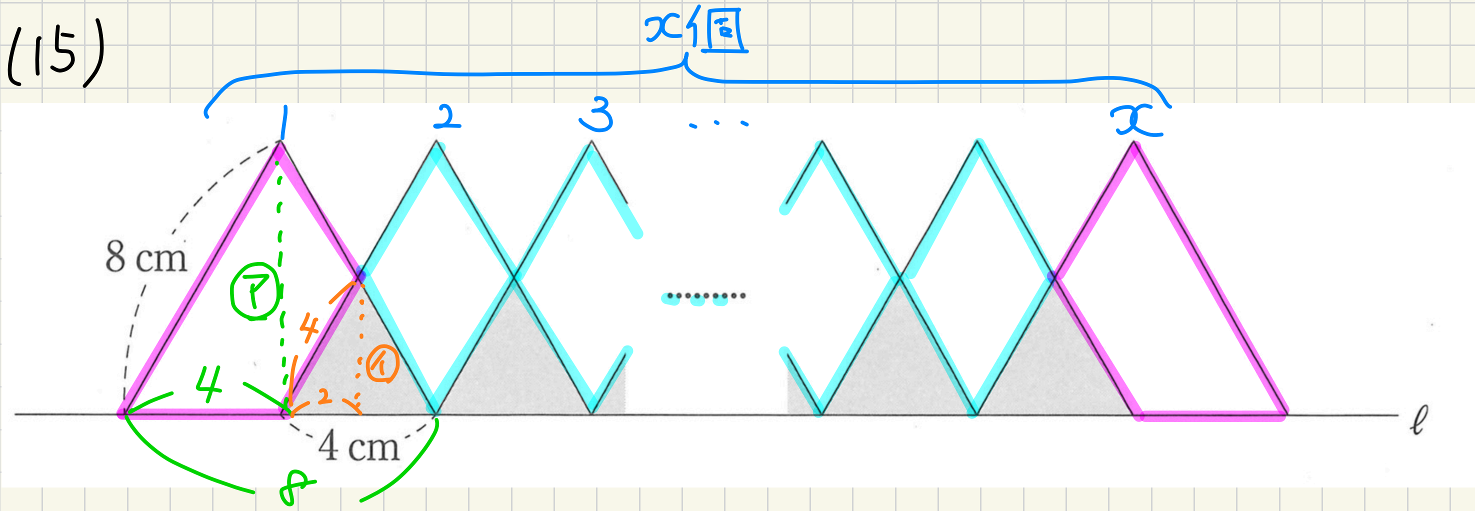
求める体積は

$6\times6\times\pi\times6-2\times2\times\pi\times6$

$=216\pi-24\pi$

$=192\pi\ \text{cm}^3$

(15)



ピンクの台形は2個　青色のひし形は $x-2$ 個ある。

・ピンクの台形1つあたりの面積

ア は三平方の定理より

$ア=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}$

イ は三平方の定理より

$イ=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}$

よって、ピンクの台形1つあたりの面積は

$\underbrace{\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{3}}_{\text{一辺が8cmの正三角形}}-\underbrace{\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}}_{\text{一辺が4cmの正三角形}}=16\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=12\sqrt{3}$

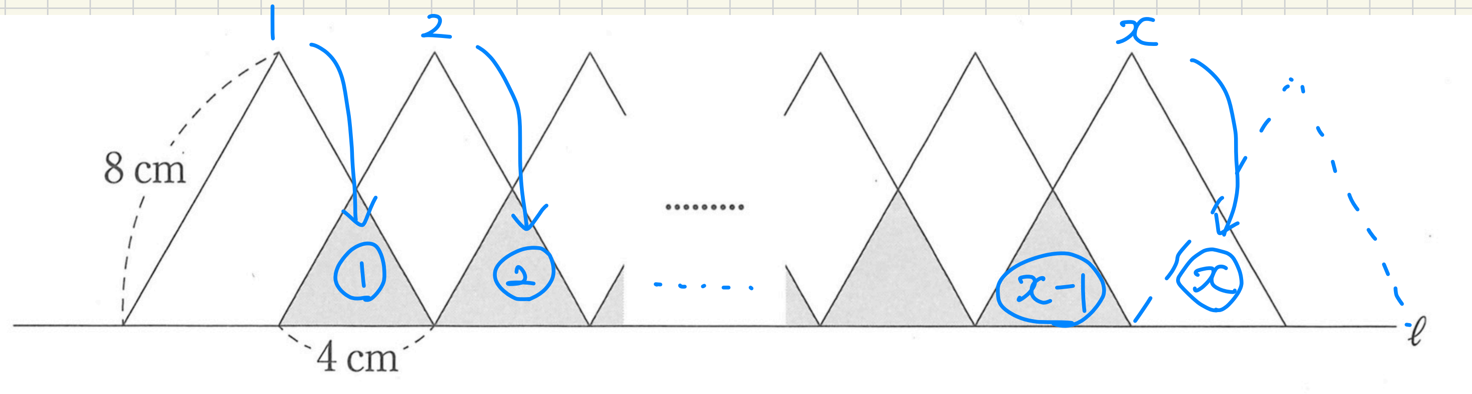
・青色のひし形 1つあたりの面積

ピンクの台形から、一辺が4cmの正三角形を引けば良いから

$$12\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$
$$= 8\sqrt{3}$$

よって、かげが重ならない面積は、

$$12\sqrt{3} \times 2 + 8\sqrt{3}(x-2)$$
$$= 24\sqrt{3} + 8\sqrt{3}x - 16\sqrt{3}$$
$$= 8\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$$



かげが重なる部分(一辺が4cmの正三角形)は

$x-1$ 個あるから、面積の合計は

$$\left\{\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3}\right\} \times (x-1) = 4\sqrt{3}(x-1)$$

かげが重なる部分と重ならない部分が 2:5 なので、

$$4\sqrt{3}(x-1) : (8\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}) = 2:5$$

式を整理して、

$$4x-4 : 8x+8 = 2:5$$

$$\Leftrightarrow\ x-1 : 2x+2 = 2:5$$

$$\Leftrightarrow\ 5(x-1)=2(2x+2)$$

$$\Leftrightarrow\ 5x-5=4x+4$$

$$\therefore\ x=9$$

(16)

第1四分位数：データを小さい順に並べたときの25%目の値

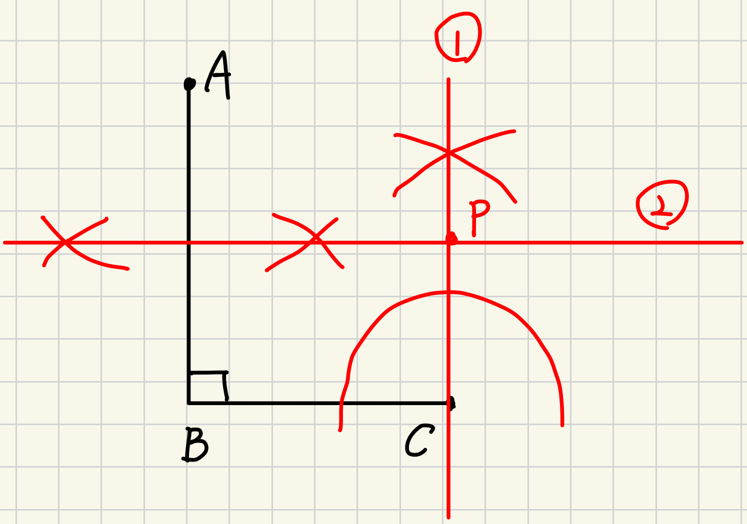
第3四分位数：データを小さい順に並べたときの75%目の値

期間①より期間②の方が第1四分位数，第3四分位数がともに基準日に近い.

⇒ データの75%目までは期間②の方が基準日に近いので，全体として期間②の方が開花が早くなっている.

2.

(1)

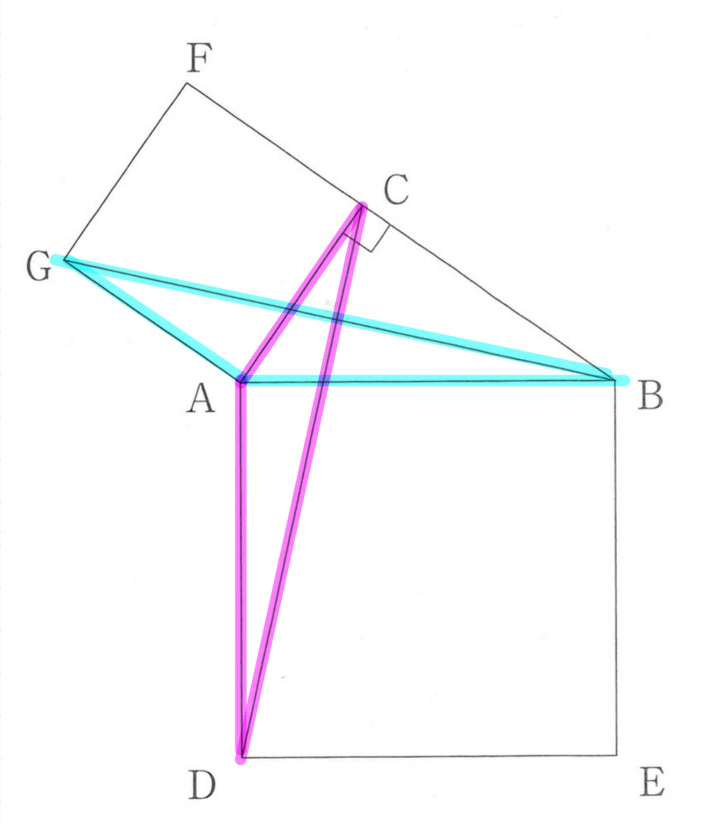


① BCの垂直二等分線

② ABの垂直二等分線

①と②の交点がP.

(2)



△ACDと△AGBにおいて、
仮定から

$AC = AG$ ——①

$AD = AB$ ——②

また、

$\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD$

$= \angle CAB + 90°$

$\angle GAB = \angle GAC + \angle CAB$

$= 90° + \angle CAB$

よって、

$\angle CAD = \angle GAB$ ——③

①、②、③から2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

△ACD ≡ △AGB (証明終わり)

3.

(1)

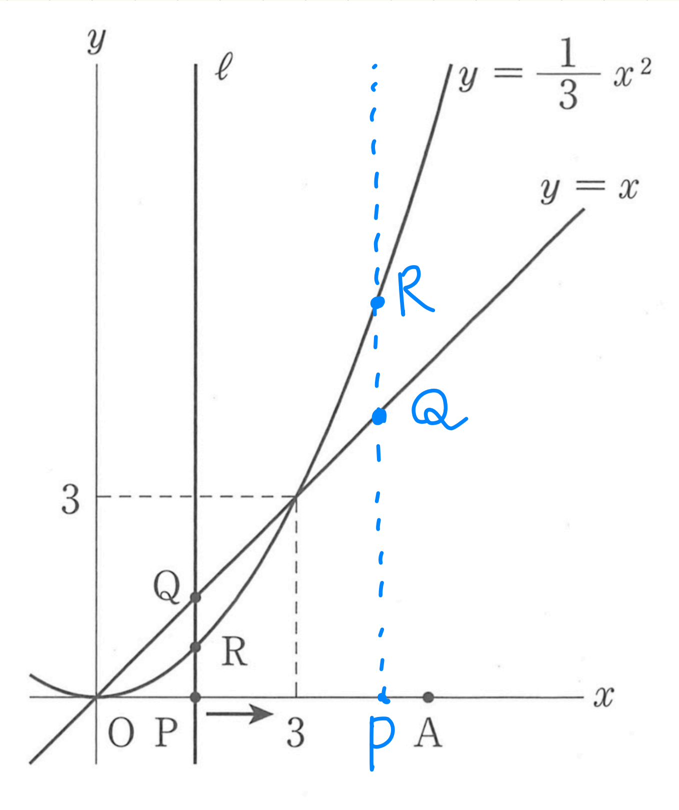
ア. 点Qは $y = x$ 上にあり、$x = t$ なので、

$y = t$

イ. 点Rは $y = \frac{1}{3}x^2$ 上にあり、$x = t$ なので、

$y = \frac{1}{3}t^2$

(2)



$3<t\leqq5$ のとき，P, Q, Rの位置は，左図のようになる。

点Rのy座標が，点Qのy座標より大きくなるから，

$$PQ<PR$$

となり，$PQ:PR=4:3$ は満たさない。

(3)

0 < t < 3 のとき

$$PQ:RQ=4:1 \iff PQ:PR=4:3$$

(2) より $Q(t,t)$, $R\left(t,\frac{1}{3}t^2\right)$ だから

$$PQ=t-0=t$$

$$RQ=\frac{1}{3}t^2-0=\frac{1}{3}t^2$$

よって，

$$t:\frac{1}{3}t^2=4:3$$

$$\iff \frac{4}{3}t^2=3t$$

$$\iff 4t^2=9t$$

$\Leftrightarrow \ 4t^2 - 9t = 0$

$\Leftrightarrow \ t(4t-9) = 0$

$\therefore \ t = 0, \dfrac{9}{4}$

$0 < t < 3$ より $t = \dfrac{9}{4}$

$3 < t \leqq 5$ のとき.

(2) より Q (t, t), R $\left(t, \dfrac{1}{3}t^2\right)$ だから.

$PQ = t - 0 = t$

$RQ = \dfrac{1}{3}t^2 - t$

よって.

$t : \dfrac{1}{3}t^2 - t = 4 : 1$

$\Leftrightarrow \ \dfrac{4}{3}t^2 - 4t = t$

$\Leftrightarrow \ \dfrac{4}{3}t^2 - 5t = 0$

$\Leftrightarrow \ 4t^2 - 15t = 0$

$\Leftrightarrow \ t(4t - 15) = 0$

$\therefore \ t = 0, \dfrac{15}{4}$

$3 < t \leqq 5$ より $t = \dfrac{15}{4}$

以上より $t = \dfrac{9}{4}, \dfrac{15}{4}$

4.

(1) AE と水面の交点を J とする。

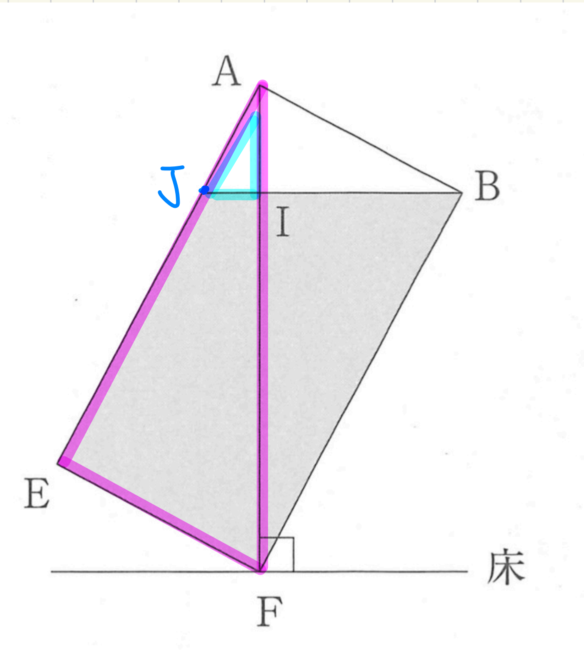


図 2

$\triangle AEF$ と $\triangle AIJ$ において、

$\angle AEF = \angle AIJ = 90°$ ― ①

共通な角は等しいから

$\angle EAF = \angle IAJ$ ― ②

①、②より 2組の角がそれぞれ等しいから、$\triangle AEF \backsim \triangle AIJ$

対応する角は等しいから

$\angle AFE = \angle AJI$ ― ③

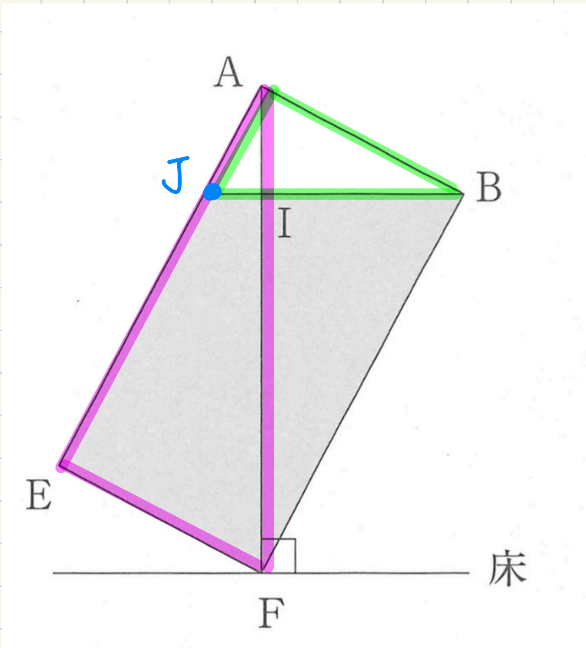


図 2

$\triangle AEF$ と $\triangle BAJ$ において、

$\angle AEF = \angle BAJ = 90°$ ― ④

③より

$\angle AFE = \angle BJA$ ― ⑤

④、⑤より 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle AEF \backsim \triangle BAJ$

対応する辺の比は等しいから

$\underbrace{EF}_{6} : AJ = \underbrace{AE}_{12} : \underbrace{BA}_{6}$

よって、

$6 : AJ = 2 : 1$

$2AJ = 6$　　　$\therefore AJ = 3\ cm$

したがって、

$EJ = 12 - 3$

$= 9\ cm$

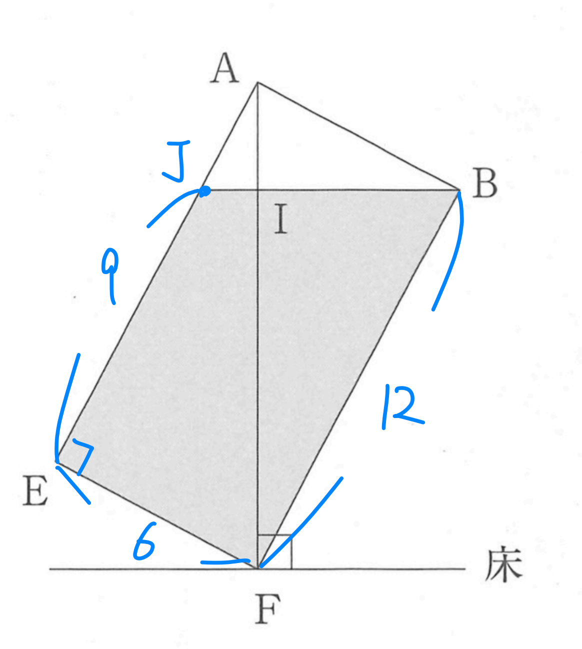


図 2

よって、求める体積は

$$\underbrace{\frac{(9+12)\times 6}{2}}_{\square JEFB} \times \underbrace{6}_{高さ=AD}$$

$= 21 \times 3 \times 6$

$= 63 \times 6$

$= 378\ cm^3$

(2)

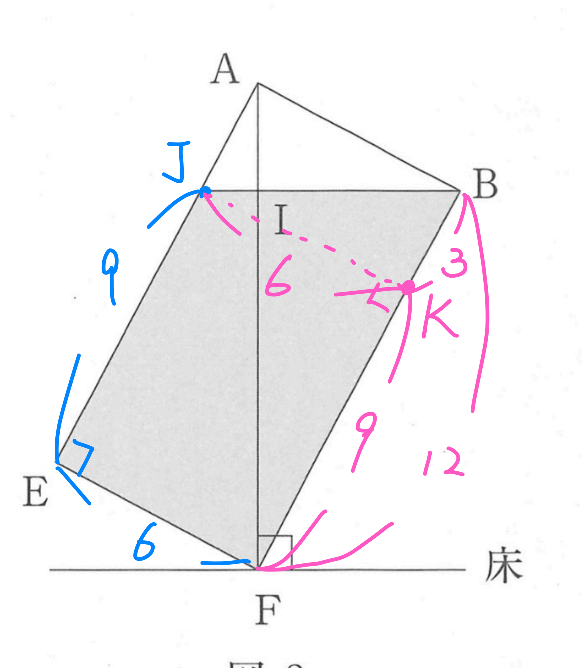


図 2

左図のようにJからBFに垂線を下ろした足をKとする。

$KF = JE$ より $KF = 9\ cm$

$BK = BF - KF$

$= 12 - 9$

$= 3\ cm$

$IK = EF$ より、$IK = 6\ cm$

△BJKで 三平方の定理より

$$BJ = \sqrt{3^2+6^2} \quad = \sqrt{9+36}$$

$$= 3\sqrt{5}\ cm. \quad = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

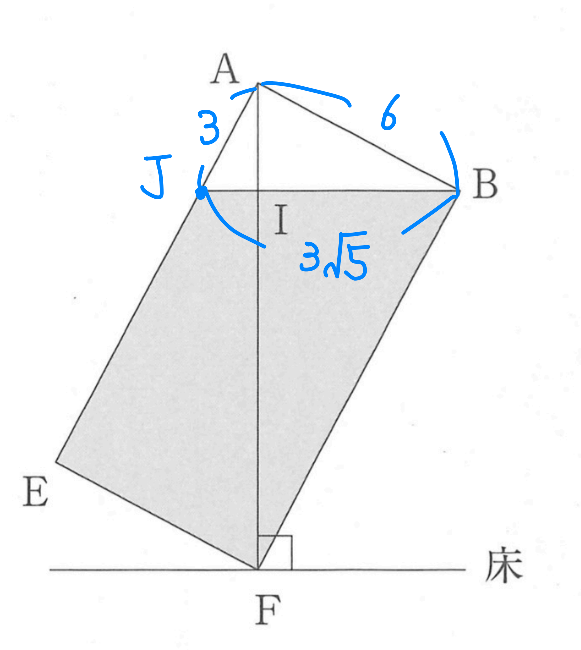


図 2

△AJBの面積は、AJを底辺、ABを高さとすると、

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9\ cm^2 \quad \text{— ①}$$

また、△AJBの面積を、JBが底辺、AIが高さとすると、

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times AI = \frac{3\sqrt{5}}{2} AI \quad \text{— ②}$$

① = ② だから

$$9 = \frac{3\sqrt{5}}{2} AI$$

$$\therefore AI = 9 \times \frac{2}{3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}} \qquad \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

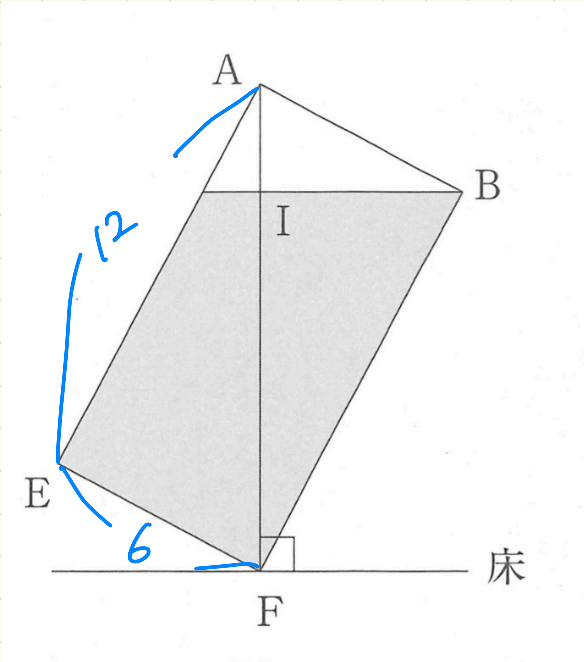


図 2

また、△AEFで三平方の定理より

$$AF = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$= 6\sqrt{5}\ \text{cm}$$

以上より

$$FI = AF - AI$$

$$= 6\sqrt{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{30\sqrt{5} - 6\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{24\sqrt{5}}{5}\ \text{cm}$$