2024年度　茨城県
数学

kmkm

1.

(1)

① 与式 $= \underline{-6}$

② 与式 $= -3x - 6y + x - 3y$

$= \underline{-2x - 9y}$

③ 与式 $= \dfrac{3a^2b \times 4b}{6ab}$

$= \underline{2ab}$

④ 与式 $= \sqrt{12} + \sqrt{18}$

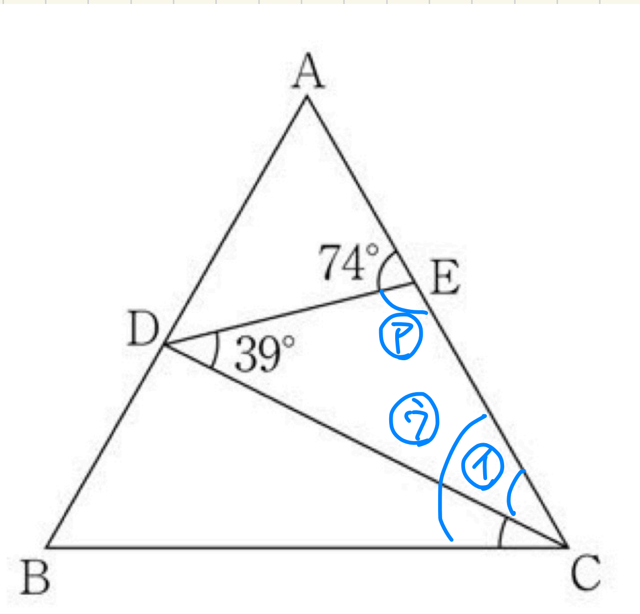
$= \underline{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$

(2) $x^2 + 7x - 8 = \underline{(x-1)(x+8)}$

エ

2.

(1)



図

ア $= 180° - 74° = 106°$

△EDCにおいて，内角の和は180°より

イ $= 180° - 39° - 106°$

$= 35°$

△ABCは正三角形より

ウ $= 60°$

よって，

$\angle BCD = 60° - 35° = \underline{25°}$

イ

(2)

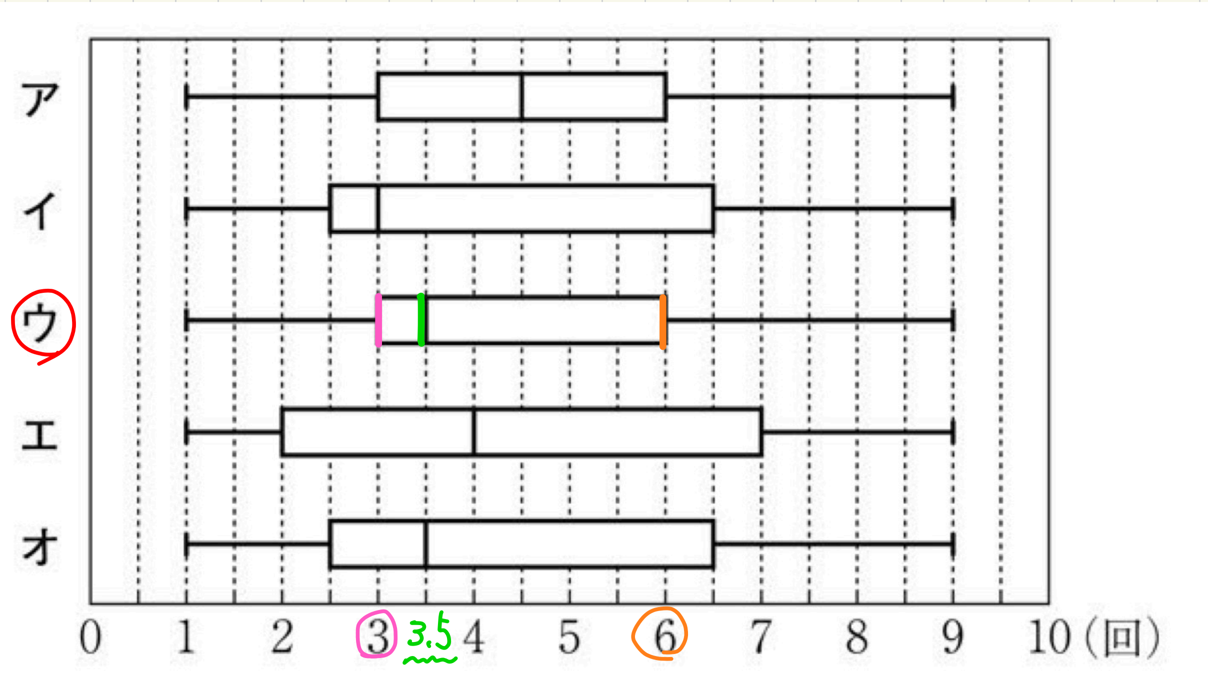
表

1	2	3	3	3	4	5	6	7	9	(単位　回)

下位データ　　上位データ

第1四分位数　　第3四分位数

中央値 $= \frac{3+4}{2} = 3.5$

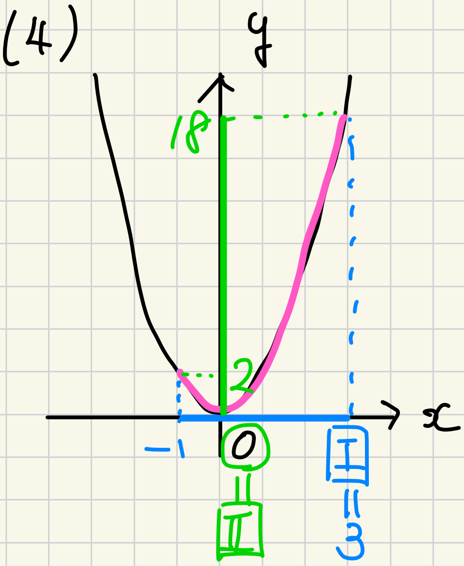


ウ

(3)

$\underbrace{2x}_{\text{大人}} + \underbrace{3y}_{\text{子供}} \underbrace{-500}_{\text{割引}} < 4000$　　よって ア

(4)



グラフより、$\boxed{エ}$ は0より大きい

$y=2x^2$ において $y=18$ のとき

$18=2x^2$

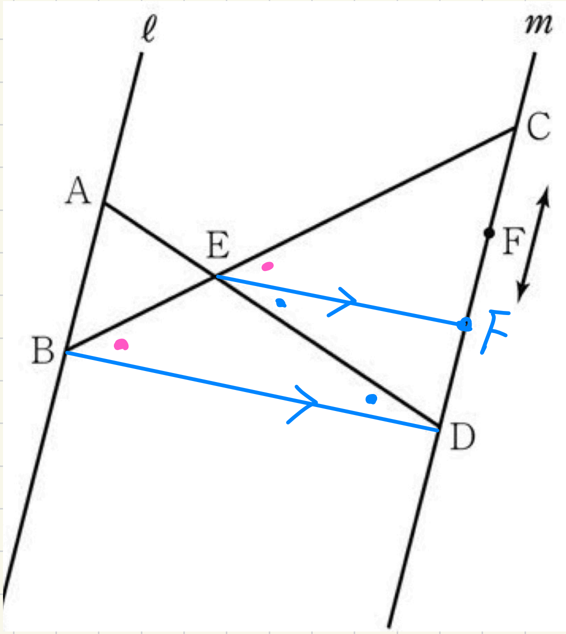
$\therefore x=\pm 3$　　$x>0$ より $x=3$　$\boxed{エ}$

また、グラフより $\boxed{オ}=0$

よって エ

3.

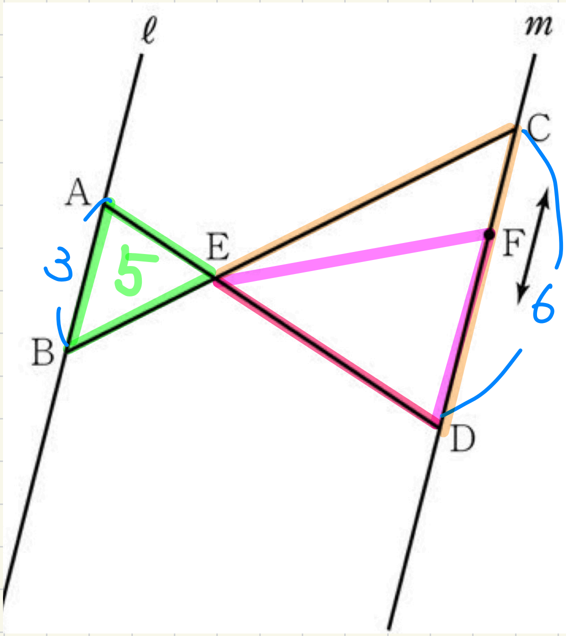
(1)



EF // BD より
同位角が等しいので
$\angle EBD = \angle CEF$ ア

錯角が等しいので
$\angle BDE = \angle FED$ オ

(2)



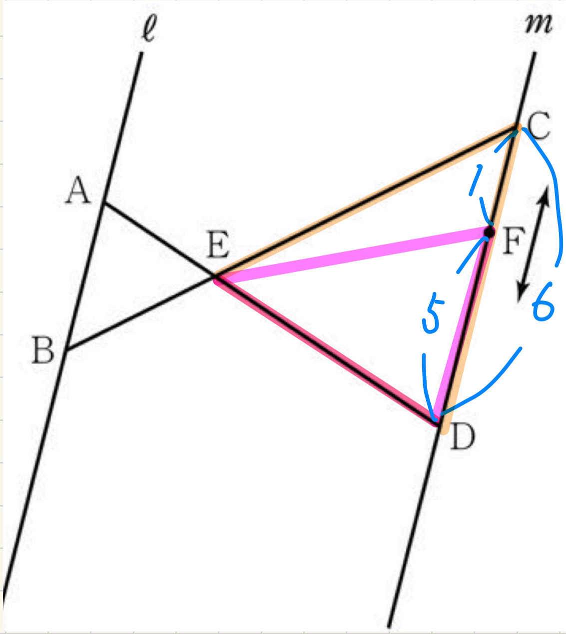
$\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ において
ℓ // m より錯角が等しいので
$\angle ABE = \angle DCE$ ― ①
$\angle BAE = \angle CDE$ ― ②
①, ② より 2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle ABE \backsim \triangle DCE$

相似比は
$AB : DC = 3 : 6$
$= 1 : 2$
であり、相似な図形の面積比は、相似比の2乗に等しいから
$\triangle ABE : \triangle DCE = 1^2 : 2^2$
5

$= 1:4$

よって

$\triangle DCE = 20\ cm^2$



$\triangle DCE$ と $\triangle DFE$ において、
底辺を DC, DF とすると、
高さが等しいので面積比
は底辺比と等しい。よって
$\triangle DCE : \triangle DFE = 6 : 5$
20

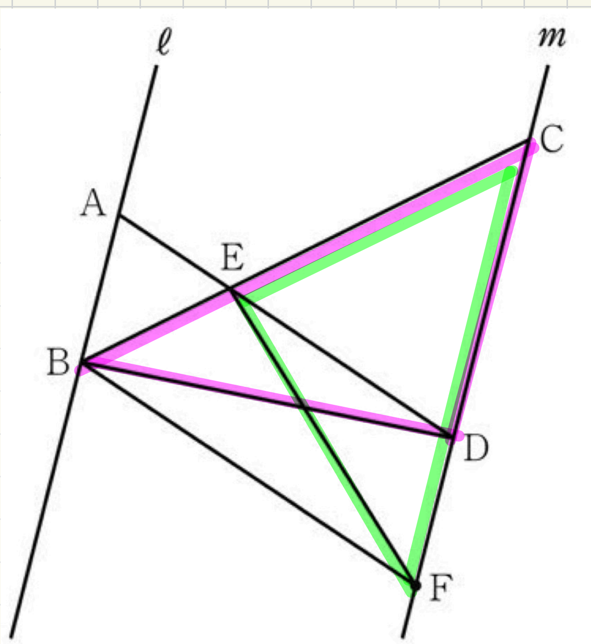
したがって

$6 \times \triangle DFE = 100$

$\triangle DFE = \dfrac{100}{6}$

$= \dfrac{50}{3}\ cm^2$

(3)



$\triangle DCB$ と $\triangle ECF$ において、
仮定から

$CD = CE = 6cm$ ── ①

共通な角だから

$\angle DCB = \angle ECF$ ウ ── ②

△CBFにおいて、ED//BFなので

CE : CB = CD : CF

さらに①より CD = CE だから

CB = CF ―― ③

等しい

CE : CB = CD : CF

等しい

①、②、③から2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

△DCB ≡ △ECF (証明終わり)

4.

(1) 赤のカードを1つ選ぶ方法は6通り

白のカードを1つ選ぶ方法は6通り

よって、赤のカードを1つ、白のカードを1つ選ぶ方法は $6 \times 6 = 36$通り

$a+b$ が3の倍数となるのは

$(a, b) = (1, 8), (1, 11), (2, 7), (2, 10),$
$(3, 9), (3, 12), (4, 8), (4, 11),$
$(5, 7), (5, 10), (6, 9), (6, 12)$

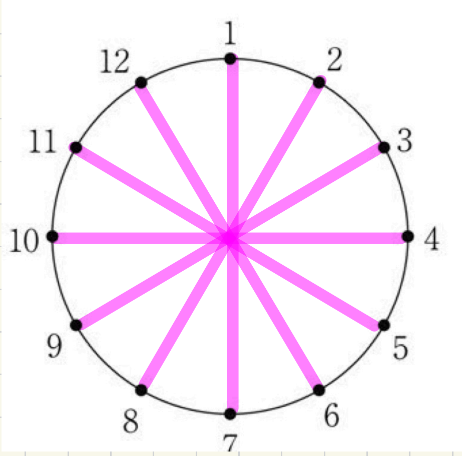
の12通り。よって求める確率は

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

イ

(2)

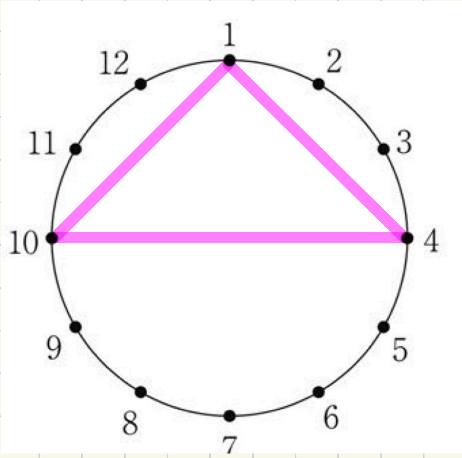
①



円の直径となるのは，左図のように6通り。よって，求める確率は

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

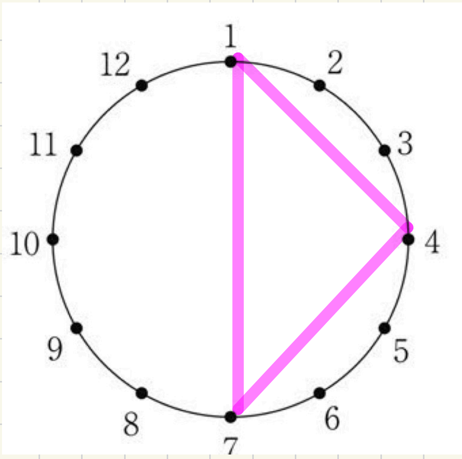
②



まず，頂点1が90°となる直角三角形は，1を除く2点を結んだ直線が直径になるときで，

$(a,b)=(2,8),(3,9),(4,10),$
$(5,11),(6,12)$

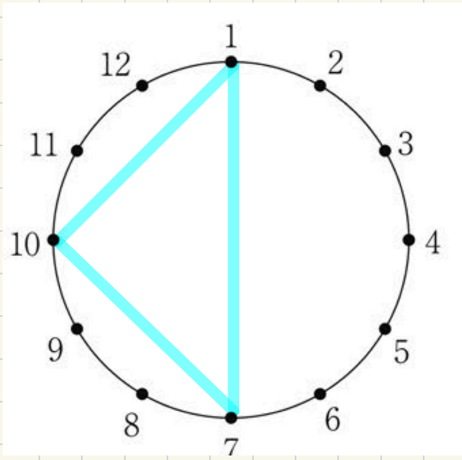
の5通り。



次に，1，7を直径とするとき，頂点2，3，4，5，6は90°になるので，

$(a,b)=(2,7),(3,7),(4,7),$
$(5,7),(6,7)$

の5通り



左図の場合でも直角三角形となるが，7以上が必要であり，

7：青のカード

8，9，10，11，12：青のカード

となり不適。

よって、頂点1の点とコマを置いた2つの点が直角三角形となるのは

$$5+5=10 \text{通り}$$

ゆえに、求める確率は

$$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

5.

(1)

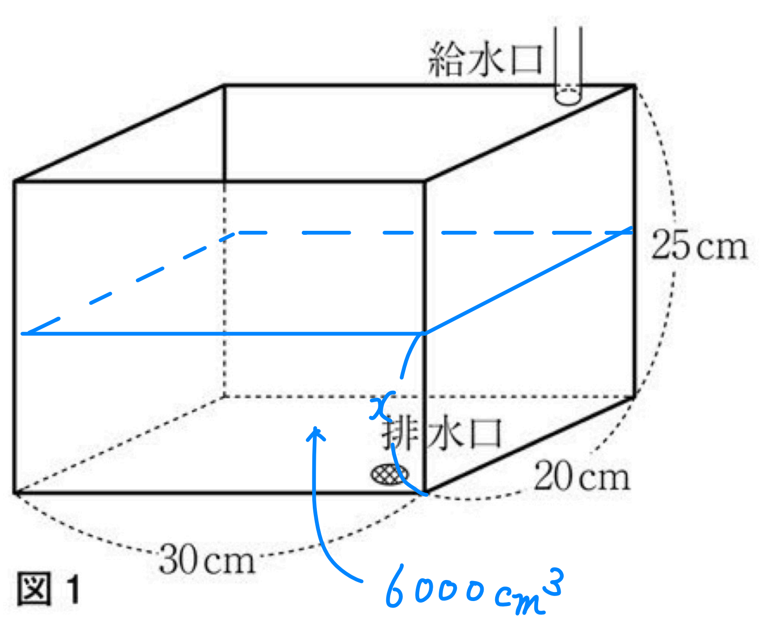


図 1

1秒間に100cm^{3}の水が入るから、60秒では、

$100\times60=6000$ cm^3

の水が入る。

このときの水そうの高さをx cmとすると、

$30\times20\times x=6000$.

よって

$$600x=6000$$

$$\therefore x=10$$

したがって、水そうの底面から水面までの高さは10cm

(2)

①

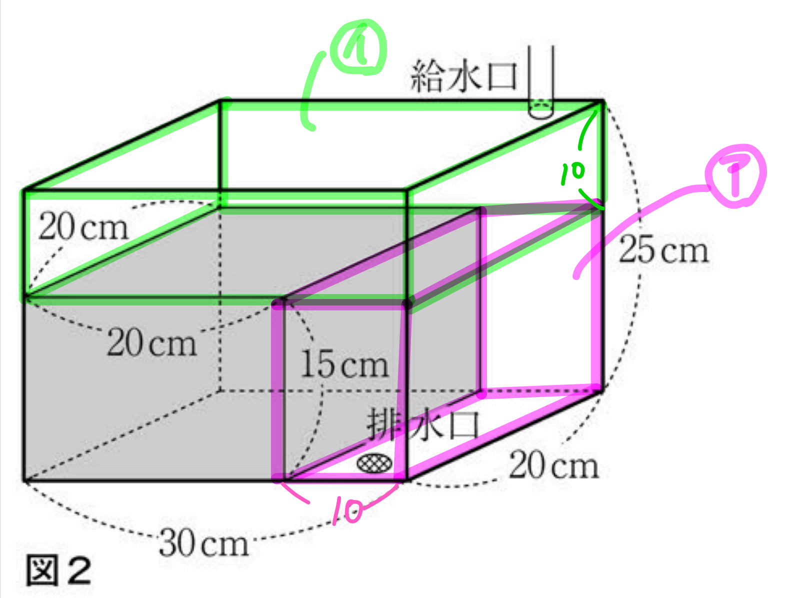


図2

水の入り方は、左図のように
㋐ → ㋑ の順となる.

㋐の体積

$10 \times 20 \times 15 = 3000\ cm^3$

㋑の体積

$30 \times 20 \times 10 = 6000\ cm^3$

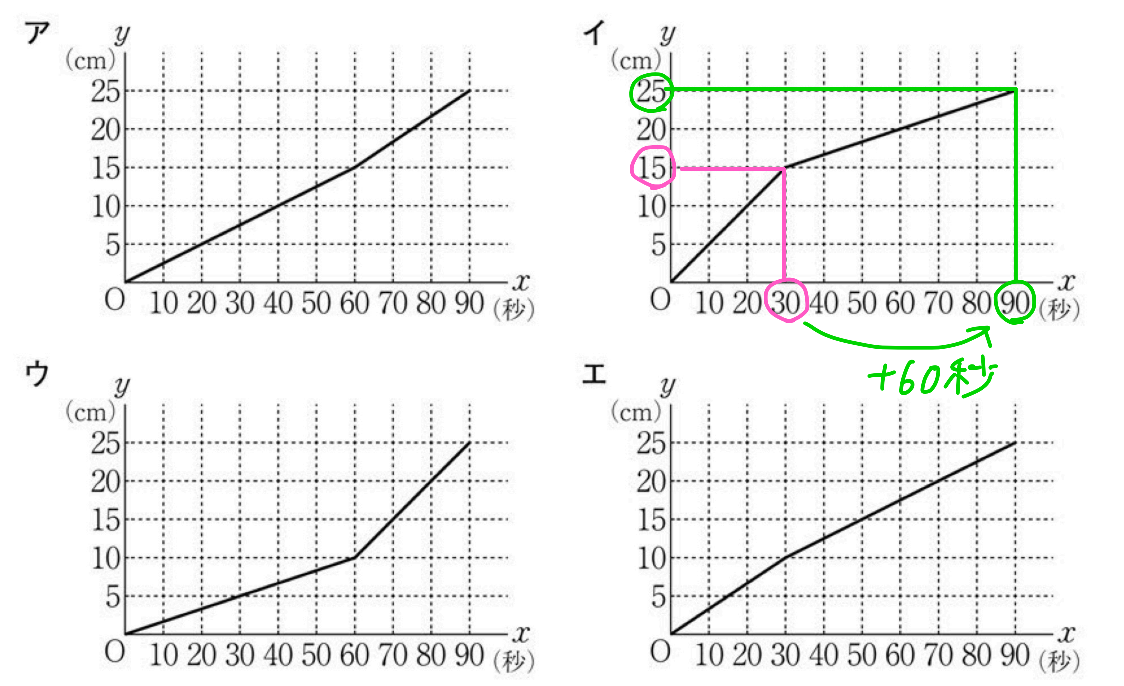
水は1秒間に $100\ cm^3$ ずつ入るから.

・㋐が満水になる時間 $= 3000 \div 100 = 30$ 秒

⇒ 30秒で 15 cm の高さ

・㋑が満水になる時間 $= 6000 \div 100 = 60$ 秒

⇒ ㋐が満水になってから60秒後に、高さ25 cm



よって、イ

②

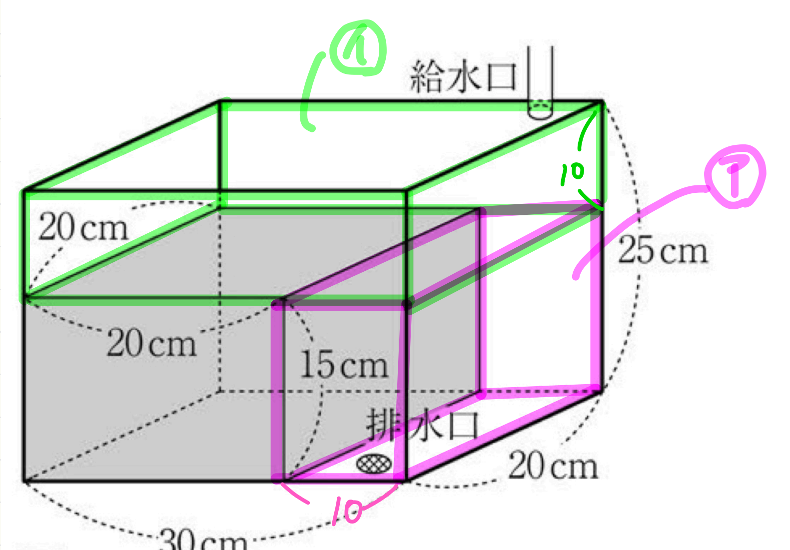


図2

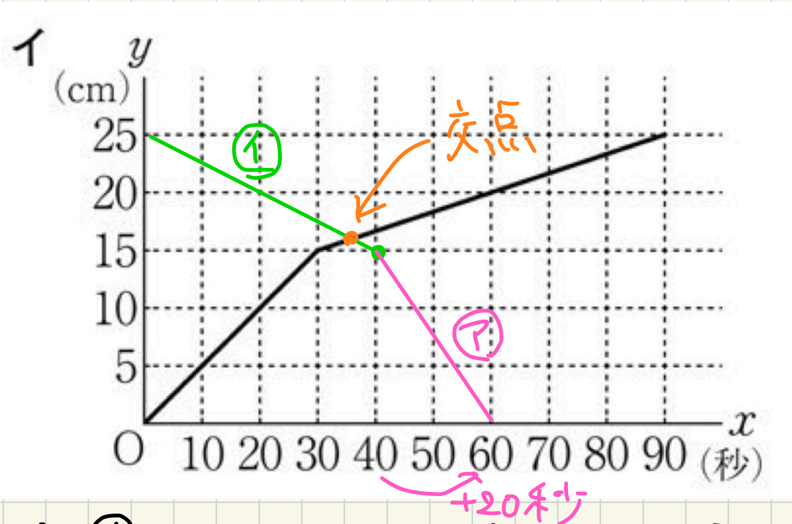
水の無くなる順は
① → ㋐ となる.

また, 水は1秒間で
$150cm^3$ ずつ少なくなる.

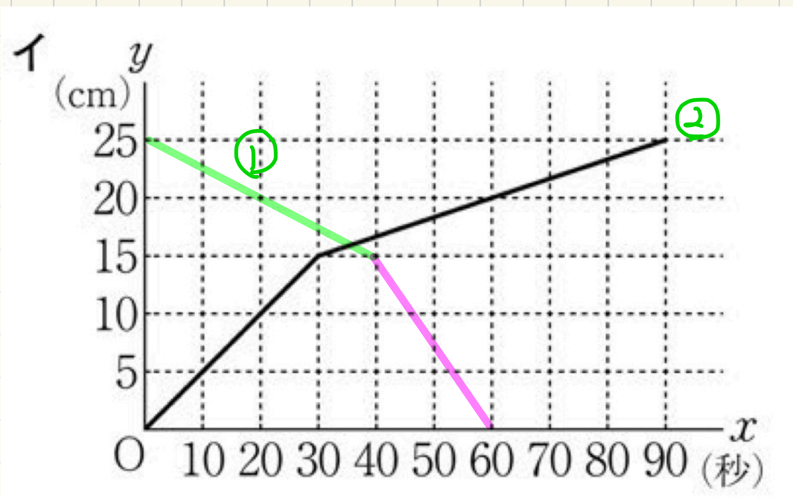
・①の水がなくなるのは,
$6000 \div 150 = 40$秒
①の体積

⇒40秒で水面の高さが
$25 - 10 = 15$cm となる.

・㋐の水がなくなるのは,
$3000 \div 150 = 20$秒
㋐の体積



⇒①の水がなくなってから20秒後に水面の高さが0cmになる.
これより, 水が減少するときのグラフは左上のようになる.



①のグラフを $y = ax + b$ とおくと, $(0, 25)$, $(40, 15)$ を通るから

$$\begin{cases} 25 = 0 + b & \text{——— あ} \\ 15 = 40a + b & \text{——— い} \end{cases}$$

あ より $b=25$. これを い に代入して

$$15=40a+25$$

$$\therefore a=-\frac{1}{4}$$

よって. ① : $y=-\frac{1}{4}x+25$

② のグラフを $y=mx+n$ とおくと, $(30, 15)$, $(90, 25)$ を通るから

$$15=30a+b \quad \text{— う}$$

$$-)\ 25=90a+b \quad \text{— え}$$

$$-10=-60a$$

$$a=\frac{1}{6}$$

$a=\frac{1}{6}$ を う に代入して

$$15=30\times\frac{1}{6}+b \qquad \therefore b=10$$

よって. ② : $y=\frac{1}{6}x+10$

求める交点は. ①, ② を連立方程式として解けば良い. ① を ② に代入して

$$-\frac{1}{4}x+25=\frac{1}{6}x+10 \qquad \times 12$$

$$\Leftrightarrow -3x+300=2x+120$$

$$\Leftrightarrow -5x=-180$$

$$\therefore x=36$$

$x=36$ を①に代入して.

$$y=-\frac{1}{4}\times 36+25$$

$$=16$$

よって. $(x,y)=(36,16)$

6.

(1)

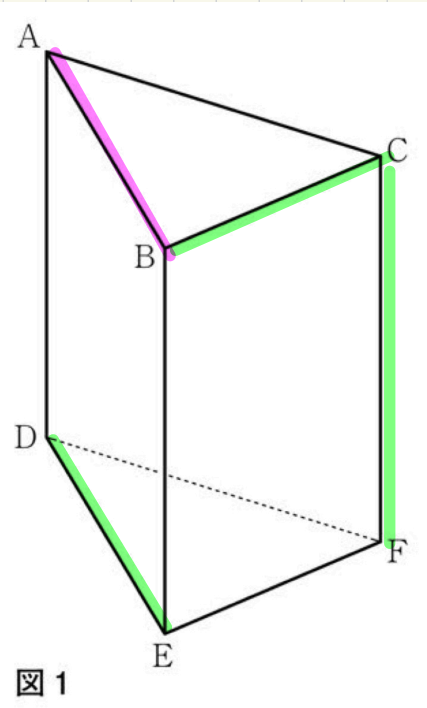


図1

① ABと交わるので ×

② ABと交わらず、平行でもないので ○

③ ABと平行なので ×

よって オ

(2)

①

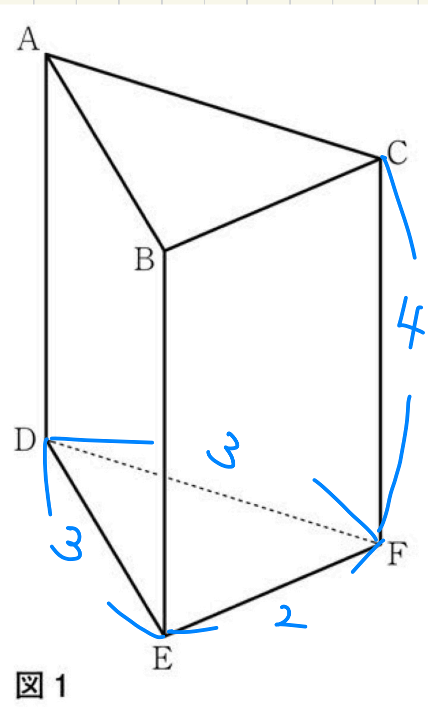
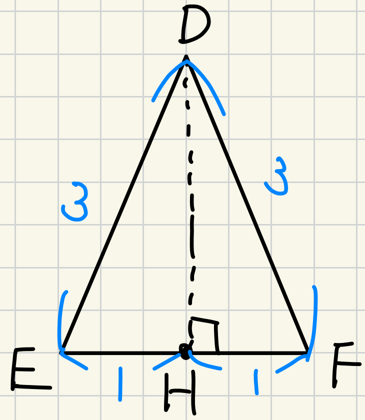


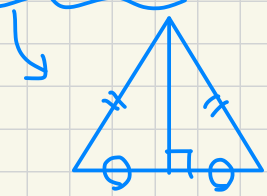
図1



DからEFに垂線を下ろした足をHとする.

△DEFは二等辺三角形だから

EH=HF



△DEHで三平方の定理より

$$DH = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

$$= \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

よって、求める表面積は

$$\underbrace{\left\{\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2}\right\} \times 2}_{\triangle ABCと\triangle DEF} + \underbrace{3 \times 4}_{\square ADEBと\square ADFC} \times 2 + \underbrace{2 \times 4}_{\square BEFC}$$

$$= 4\sqrt{2} + 24 + 8$$

$$= 32 + 4\sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

② 求める体積＝三角錐PDEF − 三角錐RDEF

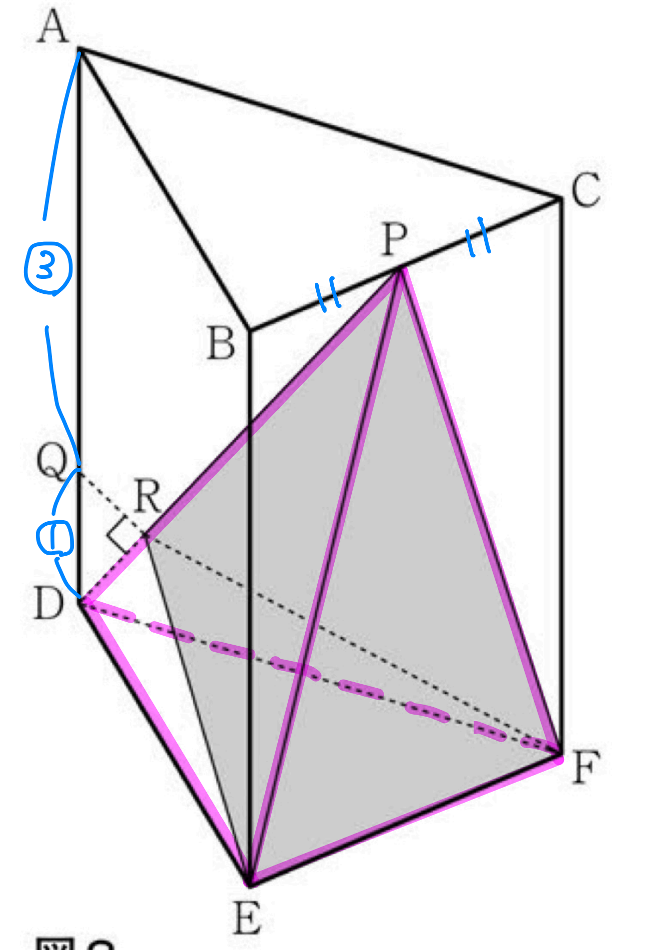


図2

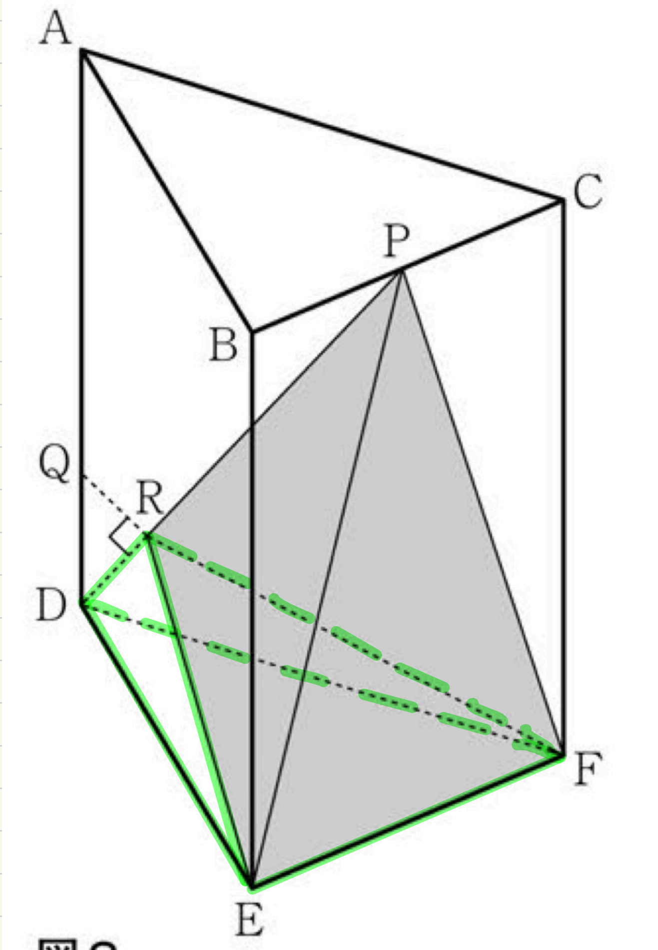


図2

・三角錐PDEFの体積

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2}}_{\triangle DEF} \times \underbrace{4}_{\text{高さ}} \times \frac{1}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\ \mathrm{cm}^3$$

・三角錐RDEFの体積

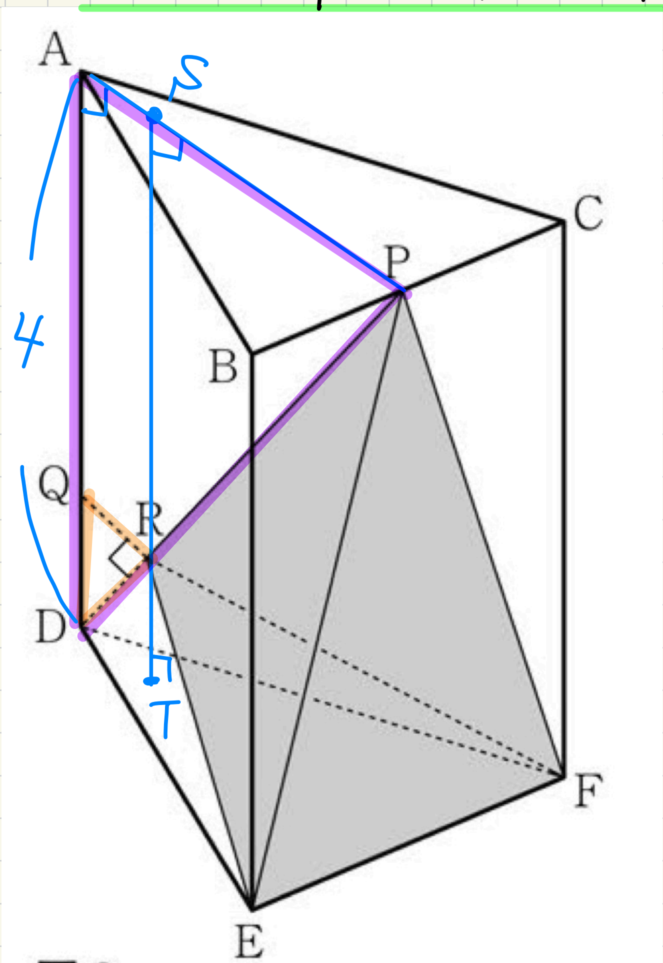


図2

左図のようにRから△ABCに垂線を下ろした足をS,
Rから△DEFに垂線を下ろした足をTとする

三角錐RDEFの体積

$= \triangle DEF \times RT \times \frac{1}{3}$

よって、RTの長さを求める。

△DQRと△DPAにおいて、
仮定より

$\angle DRQ = 90°$ ―― ㋐

$\triangle ABC \perp AD$ より $AP \perp AD$。よって

$\angle DAP = 90°$ ―― ㋑

㋐,㋑より

$\angle DRQ = \angle DAP$ ―― ㋒

共通な角は等しいから

$\angle QDR = \angle PDA$ ―― ㋓

⑦, ㊀ より2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle DQR \sim \triangle DPA$
対応する辺の比は等しいから
$DQ : DP = DR : DA$

ここで、

$$DQ = 4\,cm \times \frac{1}{1+3} = 1\,cm$$

$$DP = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2}$$ ……$\triangle ADP$で三平方の定理 $AD = 4$, $AP = 2\sqrt{2}$

$$= \sqrt{16+8}$$

$$= 2\sqrt{6}\,cm$$

$$DA = 4\,cm$$

より

$$DQ : DP = DR : DA$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 : 2\sqrt{6} = DR : 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{6}\,DR = 4$$

$$DR = \frac{4}{2\sqrt{6}}$$ $= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}\,cm$$

また、$DP = 2\sqrt{6}\,cm$ より

$$PR = 2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{6\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{3}\,cm$$

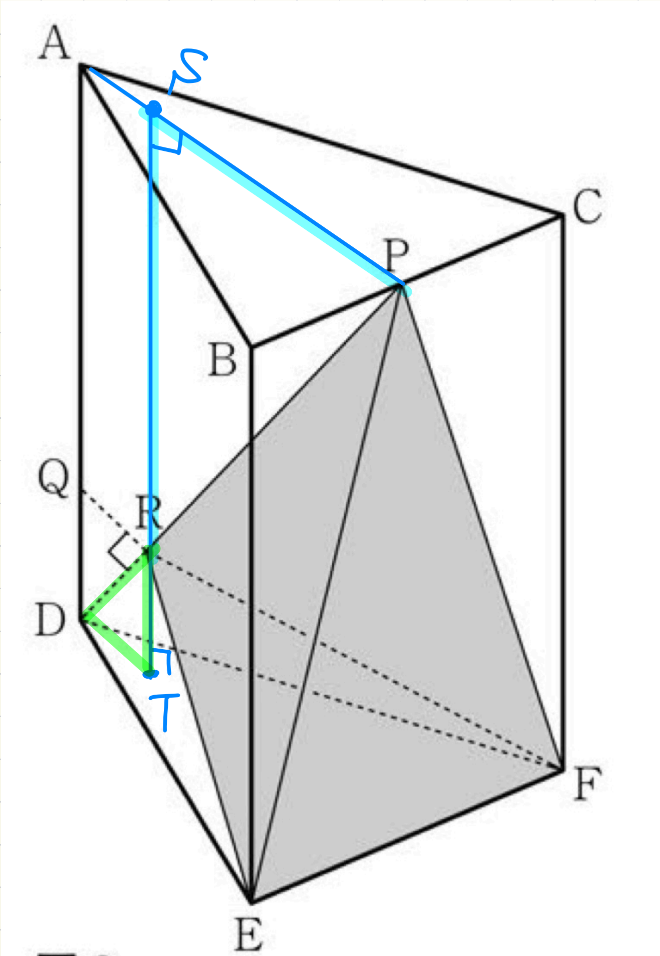


図2

△RDTと△RPSにおいて、

$\angle RTD = \angle RSP = 90°$ ―㋔

対頂角は等しいから

$\angle DRT = \angle PRS$ ―㋕

㋔,㋕より2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle RDT \backsim \triangle RPS$

対応する辺の比は等しいから

$RT : RS = \underbrace{RD}_{\frac{\sqrt{6}}{3}} : \underbrace{RP}_{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$

よって

$RT : RS = 1 : 5$

$TS = DA = 4\,cm$ より

$\underbrace{RT} = 4 \times \frac{1}{1+5}$

$= 4 \times \frac{1}{6}$

$= \underbrace{\frac{2}{3}}\,cm$

以上より三角錐RDEFの体積は

$\underbrace{\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2}}_{\triangle DEF} \times \underbrace{\frac{2}{3}}_{RT} \times \frac{1}{3} = \underbrace{\frac{4\sqrt{2}}{9}}\,cm^3$

したがって、求める体積は、

$$\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{24\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{9}$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{9} \text{ cm}^3$$