2024年度　大阪府

数学　　C問題

KmKn

1.

(1) 与式 $= \dfrac{3(2x-3y)+2(x+4y)}{12}$

$= \dfrac{6x-9y+2x+8y}{12}$

$= \dfrac{8x-y}{12}$

(2) 与式 $= 1+2\sqrt{6}+6-2-5\sqrt{6}$

$= 5-3\sqrt{6}$

$-\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{4} - \dfrac{10\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$= -2-5\sqrt{6}$

(3) $A=(x-7)$ とおくと.

$(x-7)^2-4(x-7)=0$

$\Leftrightarrow A^2-4A=0$

$\Leftrightarrow A(A-4)=0$

$\therefore A=0, 4$

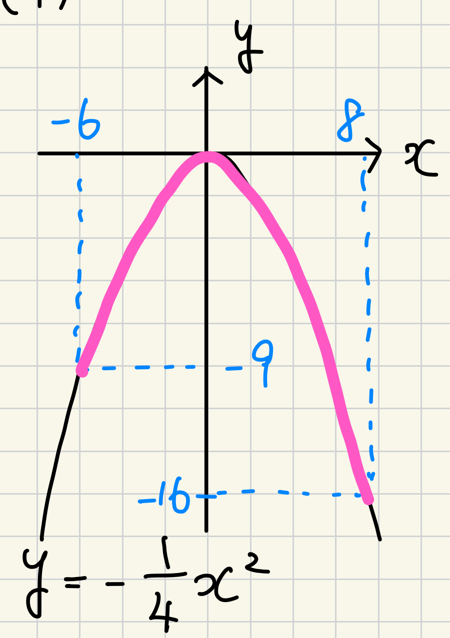
$A=x-7$ より

$x-7=0, \quad x-7=4$

よって

$x=7, 11$

(4)



$y=-\frac{1}{4}x^2$ において、$x=-6$ のとき

$$y=-\frac{1}{4}\times(-6)^2$$
$$=-9$$

y の変域が $-16 \leqq y \leqq b$ より、グラフの範囲は、左図のようになる。

よって、$-16 \leqq y \leqq 0$

また、$y=-16$ のとき

$$-16=-\frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow x^2=64 \quad \therefore x=\pm 8$$

グラフの範囲から $x>-6$ なので、$x=8$

よって、x の変域は、$-6 \leqq x \leqq 8$

以上より、$a=8$、$b=0$

(5) まず、x が自然数のときを考える。

$\frac{35}{12}x$ と $\frac{21}{20}x$ がともに自然数となる x は、

12 と 20 の最小公倍数であるから、$x=60$ である。

このとき、

$$\frac{35}{12}\times 60 = 35\times 5 = 5^2\times 7$$
$$\frac{21}{20}\times 60 = 21\times 3 = 3^2\times 7$$

であるから、共通の7で割っても自然数となる。

よって、

$$x = \frac{60}{7}$$

(6) (箱Aのカード，箱Bのカード) と書くこととする。

$(1,4) \Rightarrow a = 3+5 = 8,\ b = 6+8 = 14,$
$c = 1+4 = 5 \quad \therefore\ c < a < b$

$(1,6) \Rightarrow a = 3+5 = 8,\ b = 4+8 = 12$
$c = 1+6 = 7 \quad \therefore\ c < a < b$

$(1,8) \Rightarrow a = 3+5 = 8,\ b = 4+6 = 10$
$c = 1+8 = 9 \quad \therefore\ a < c < b$

$(3,4) \Rightarrow a = 1+5 = 6,\ b = 6+8 = 14$
$c = 3+4 = 7 \quad \therefore\ a < c < b$

$(3,6) \Rightarrow a = 1+5 = 6,\ b = 4+8 = 12$
$c = 3+6 = 9 \quad \therefore\ a < c < b$

$(3,8) \Rightarrow a = 1+5 = 6,\ b = 4+6 = 10$
$c = 3+8 = 11 \quad \therefore\ a < b < c.$

$(5,4) \Rightarrow a = 1+3 = 4,\ b = 6+8 = 14$
$c = 5+4 = 9 \quad \therefore\ a < c < b$

$(5,6) \Rightarrow a = 1+3 = 4,\ b = 4+8 = 12$
$c = 5+6 = 11 \quad \therefore\ a < c < b$

$(5,8) \Rightarrow a = 1+3 = 4,\ b = 4+6 = 10$
$c = 5+8 = 13 \quad \therefore\ a < b < c$

以上より求める確率は $\frac{5}{9}$

(7) a の百の位を x, 十の位を y, 一の位を z とする。
ただし $1 \leqq x \leqq 9$, $1 \leqq y \leqq 9$, $0 \leqq z \leqq 9$ である。
0は含まない　0は含まない

$$a = 100x + 10y + z$$

また, b は a の百の位と十の位を入れ替えたので,

$$b = 100y + 10x + z.$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{2}} = \sqrt{\frac{100x+10y+z-(100y+10x+z)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{90x-90y}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{9(10x-10y)}{2}}$$

$$= 3\sqrt{5x-5y}$$

0 ~ 8
$k = 1$
$x - y = 5$

これが自然数となるから $5x-5y=5(x-y)$ は平方数である。よって k を自然数として

$$5(x-y) = \underbrace{5 \times 5k^2}_{5^2k^2=(5k)^2}$$

$$\therefore x - y = 5k^2$$

ここで $1 \leqq x \leqq 9$, $1 \leqq y \leqq 9$ より

$x-y$ の最大値 $\Rightarrow 9-1=8$

$x-y$ の最小値 ⇒ $x=y$ のときで 0

であるから、$x-y$ のとりうる値は $0\sim 8$ である。

よって、

$$5k^2=0,1,2,3,4,5,6,7,8$$

であり、これをみたす k は、$k=1$ のみ。よって、

$$x-y=5 \quad \text{——— ①}$$

また、a の各位の和が 20 だから

$$x+y+z=20 \quad \text{——— ②}$$

① + ② より

$$2x+z=25$$

$$x=\boxed{\frac{25-z}{2}}$$

$\frac{25-z}{2}$ が自然数

⇒ $25-z$ は 2 で割り切れる

x は、$1\leqq x\leqq 9$ をみたす自然数だから、$25-z$ は偶数である。よって、z は奇数。

$$z=9 \Rightarrow \frac{25-z}{2}=\frac{25-9}{2}=8$$

$$z=7 \Rightarrow \frac{25-z}{2}=\frac{25-7}{2}=9$$

} ok

$$z=5 \Rightarrow \frac{25-z}{2}=\frac{25-5}{2}=10$$

} NG

$z=1,3$ も $x\geqq 10$ となるから不適。よって、

$$z=9,7$$

(i) $z=9$ のとき

①, ② より

$$\begin{array}{rl} x - y &= 5 \\ +)\ x + y &= 11 \\ \hline 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{array}$$

$x=8$ を ① に代入して.

$8 - y = 5$

$y = 3$

(ii) $z=7$ のとき.

①, ② より

$$\begin{array}{rl} x - y &= 5 \\ +)\ x + y &= 13 \\ \hline 2x &= 18 \\ x &= 9 \end{array}$$

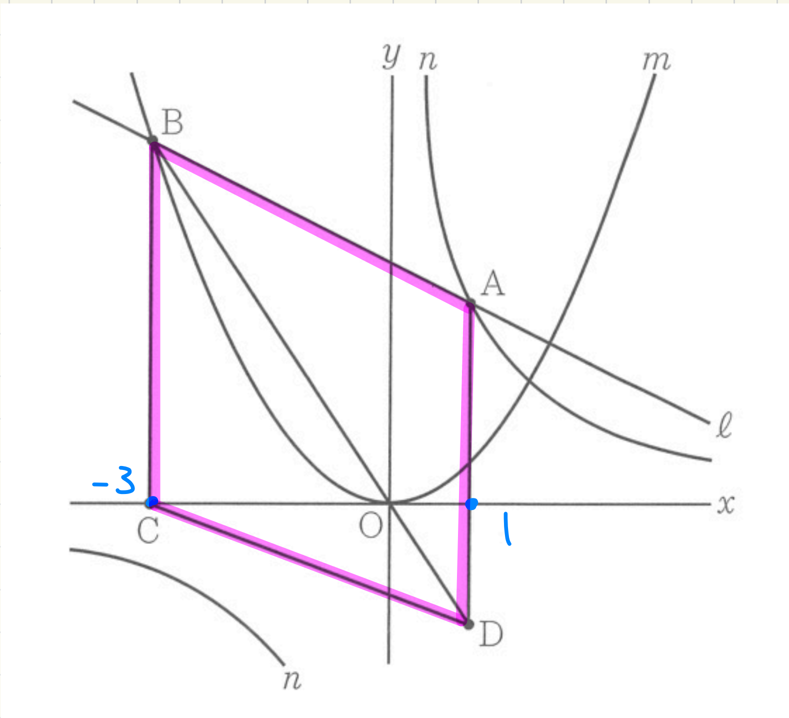
$x=9$ を ① に代入して.

$9 - y = 5$

$y = 4$

以上より. 839, 947

(8)



AD // y 軸, BC // y 軸

より AD // BC.

よって □ABCD は台形である.

A は. $n: y = \frac{b}{x}$ 上の点で

$x = 1$ なので.

$y = \frac{b}{1} = b$ ∴ $A(1, b)$

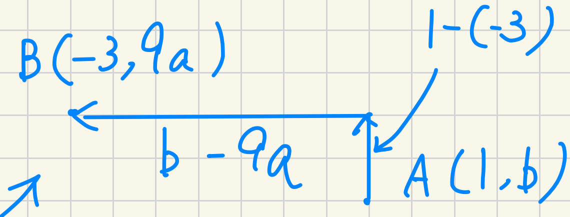
Bは $m : y = ax^2$ の点で $x = -3$ なので

$$y = a \times (-3)^2$$
$$= 9a \qquad \therefore B(-3, 9a)$$

ℓ の傾きは $-\frac{1}{2}$ で、1次関数では、傾き = 変化の割合だから

$$\text{傾き} = -\frac{1}{2} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

$$= \frac{b - 9a}{1 - (-3)}$$



$$= \frac{b - 9a}{4}$$

よって

$$-\frac{1}{2} = \frac{b - 9a}{4}$$

$$\Leftrightarrow -2 = b - 9a$$

$$\therefore 9a - b = 2 \quad \text{——} ㋐$$

また、

$$BC = 9a - 0 = 9a$$

直線BOは、$y = -3ax$ であり、Dは直線BO上の

原点とB(−3, 9a)を通る

点Dで $x=1$ だから

$$y=-3a \qquad \therefore D(1,-3a)$$

よって

$$AD = b-(-3a)$$
$$= 3a+b$$

□ABCDの面積が $17cm^2$ だから

$$\frac{1}{2}\times(\underbrace{3a+b}_{上底}+\underbrace{9a}_{下底})\times\underbrace{4}_{高さ}=17$$

$$\Leftrightarrow 2(12a+b)=17$$

$$\Leftrightarrow 24a+2b=17 \quad \text{——} ①$$

㋐, ① を連立させて

$$\begin{cases} 9a-b=-2 & \text{——} ㋐ \\ 24a+2b=17 & \text{——} ① \end{cases}$$

㋐ × 2 + ① より

$$\begin{array}{rrrr} & 18a & -2b & = 4 \\ +) & 24a & +2b & = 17 \\ \hline & 42a & & = 21 \end{array}$$

$$a=\frac{1}{2}$$

$a=\frac{1}{2}$ を ① に代入して

$$24\times\frac{1}{2}+2b=17$$

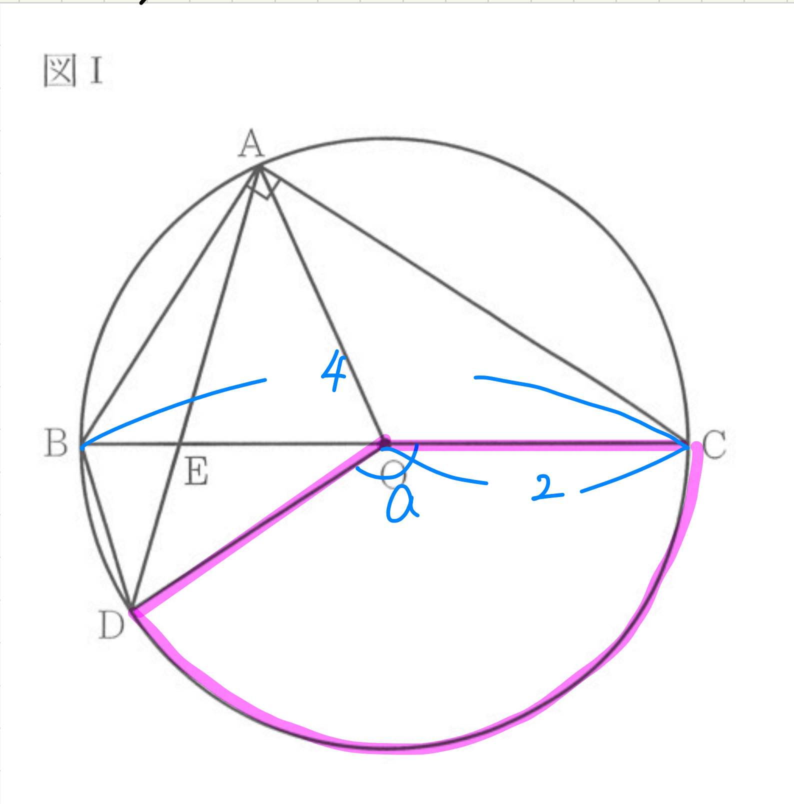
$$2b=17-12$$
$$=5$$
$$\therefore b=\frac{5}{2}$$

$a>0$, $b>0$ より問題に適する。

よって $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$

2.

(1) ①

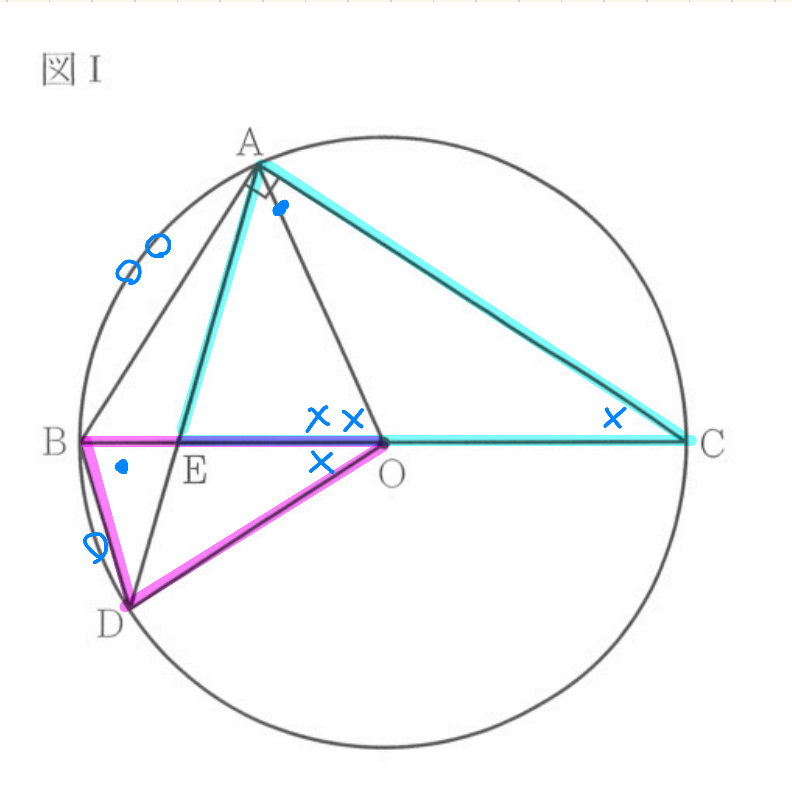


半径が 2 cm，中心角が $a°$ のおうぎ形だから面積は

$$2 \times 2 \times \pi \times \frac{a}{360}$$

$$= \frac{1}{90}\pi a \quad cm^2$$

②



△BDO と △AEC において，同じ弧に対する円周角は等しいから $\overset{\frown}{DC}$

∠DBO = ∠EAC — ㋐

$\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{BD}$ だから

∠AOB = 2∠BOD

よって

$∠BOD = \frac{1}{2}∠AOB$ — ①

1つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分だから

$\angle ACE = \frac{1}{2}\angle AOB$ ―― ⑦

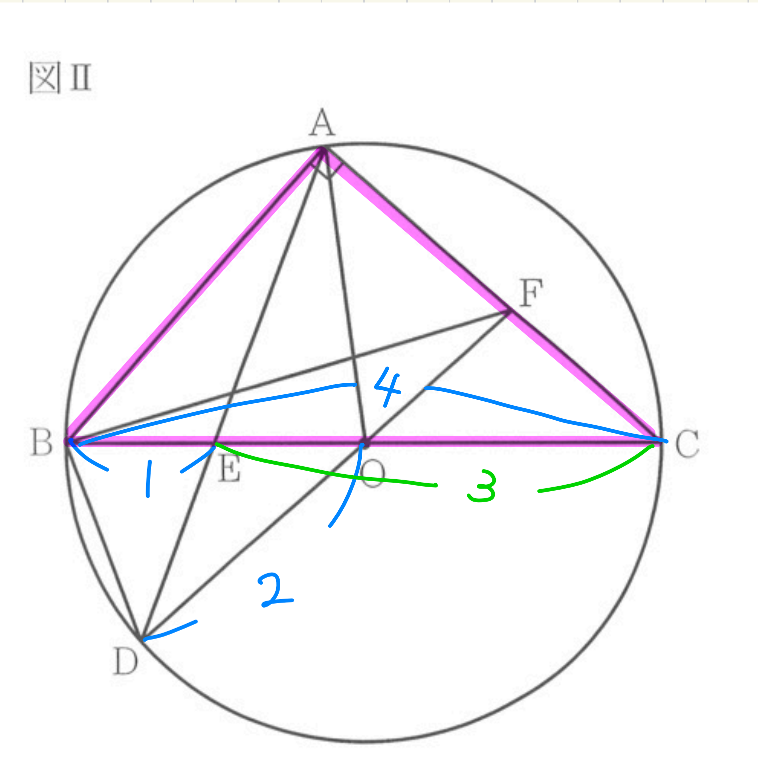
①, ⑦ より

$\angle BOD = \angle ACE$ ―― ㋓

㋐, ㋓ より 2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDO \sim \triangle AEC$ (証明終わり)

(2) ①



(1)② より $\triangle BDO \sim \triangle AEC$ だから対応する辺の比は等しい。よって

$$\underset{2}{DO} : \underset{3}{EC} = \underset{2}{BO} : AC$$

よって

$2 : 3 = 2 : AC$

$\therefore AC = 3\,cm$

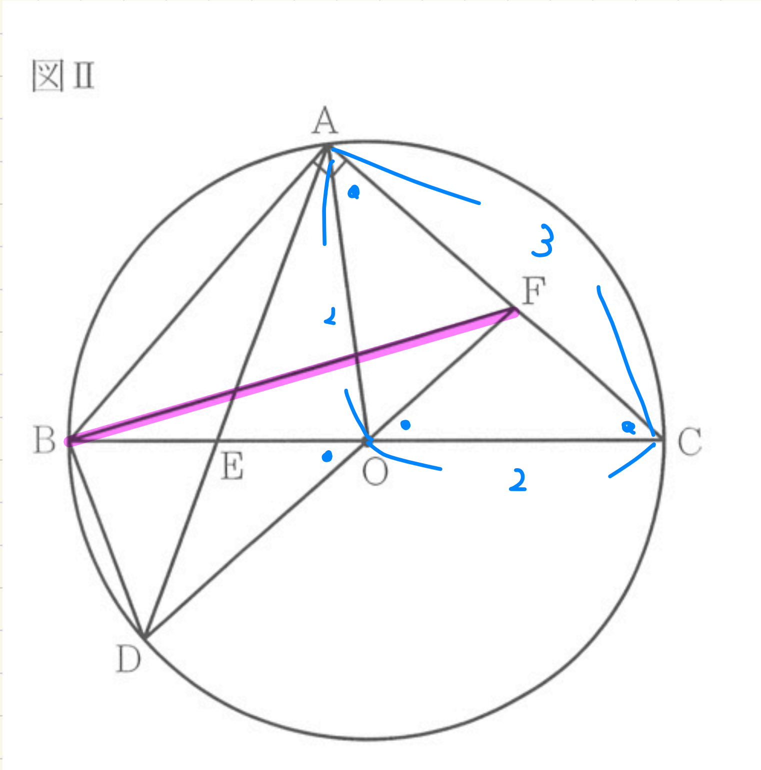
$\triangle ABC$ は $\angle BAC = 90°$ の直角三角形であり、$BC = 4\,cm$, $AC = 3\,cm$ だから三平方の定理より

$$AB = \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{16 - 9}$$

$$= \sqrt{7}\,cm$$

②



(1)②より

∠BOD ＝ ∠ACE ―㋐

対頂角は等しいから

∠BOD ＝ ∠COF ―㋑

㋐,㋑より △FCO は

二等辺三角形

また, △OAC は OA＝OC

の二等辺三角形だから

∠OCA ＝ ∠OAC ―㋒

したがって △OAC と △FCO は底角が等しい二等辺三角形だから. △OAC ∽ △FCO

対応する辺の比は等しいから

$$\underbrace{OA}_{2} : FC = \underbrace{AC}_{3} : \underbrace{CO}_{2}$$

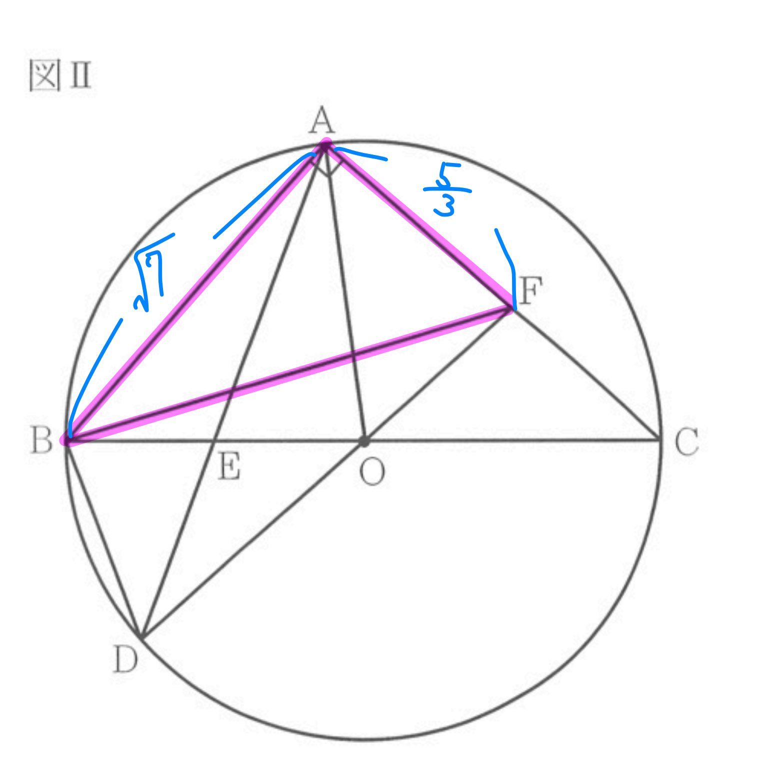
よって

$3FC = 4$ $\therefore FC = \dfrac{4}{3}$ cm

AC ＝ 3 cm より

$$AF = 3 - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{5}{3} \text{ cm}$$



よって，△ABFで三平方の定理より

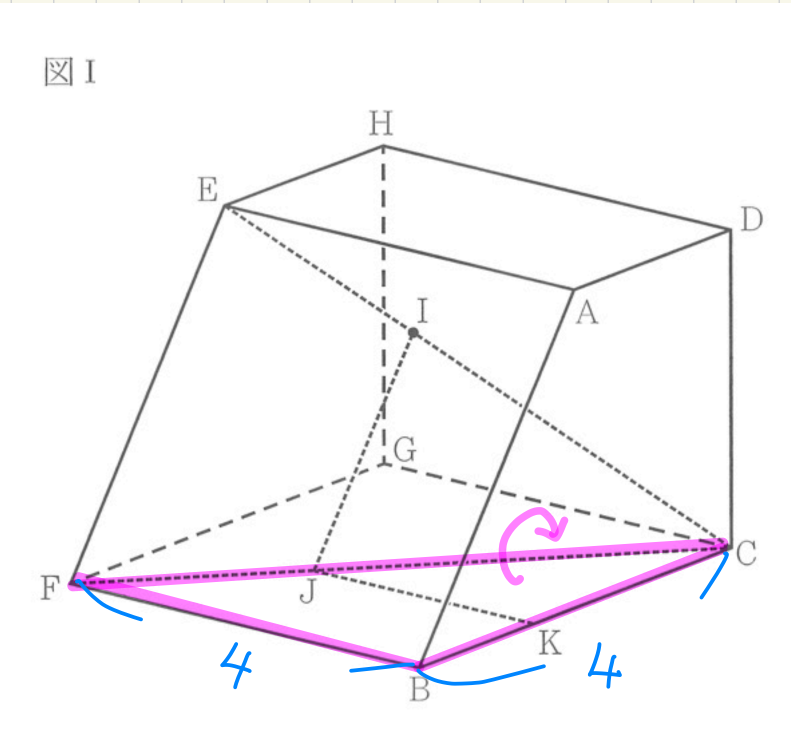
$$BF = \sqrt{\sqrt{7}^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2}$$

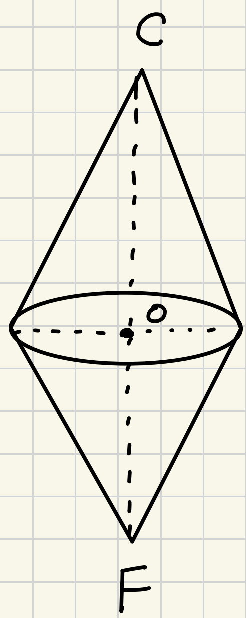
$$= \sqrt{7 + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{63}{9} + \frac{25}{9}}$$

$$= \frac{2\sqrt{22}}{3} \text{cm} = \sqrt{\frac{88}{9}}$$

3.

(1) ①

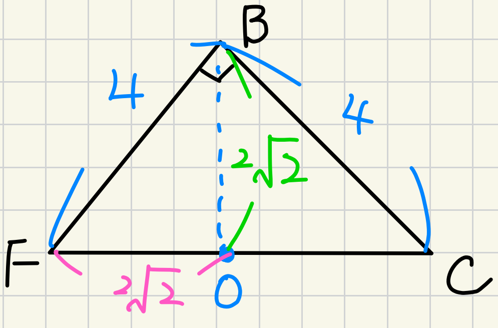




△BCFをFCを軸として回転させたときの立体は，右上の図のようになる．回転してできる円の中心をOとする．

□GFBCは正方形だから∠FBC = 90°

よって、△FBCは直角二等辺三角形である。



よって、

$$FB : BC : FC = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

$$\therefore \underbrace{FB}_{4} : FC = 1 : \sqrt{2}$$

したがって、$FC = 4\sqrt{2}$ cm

点OはFCの中点だから、$FO = 2\sqrt{2}$ cm

△BFOで三平方の定理より

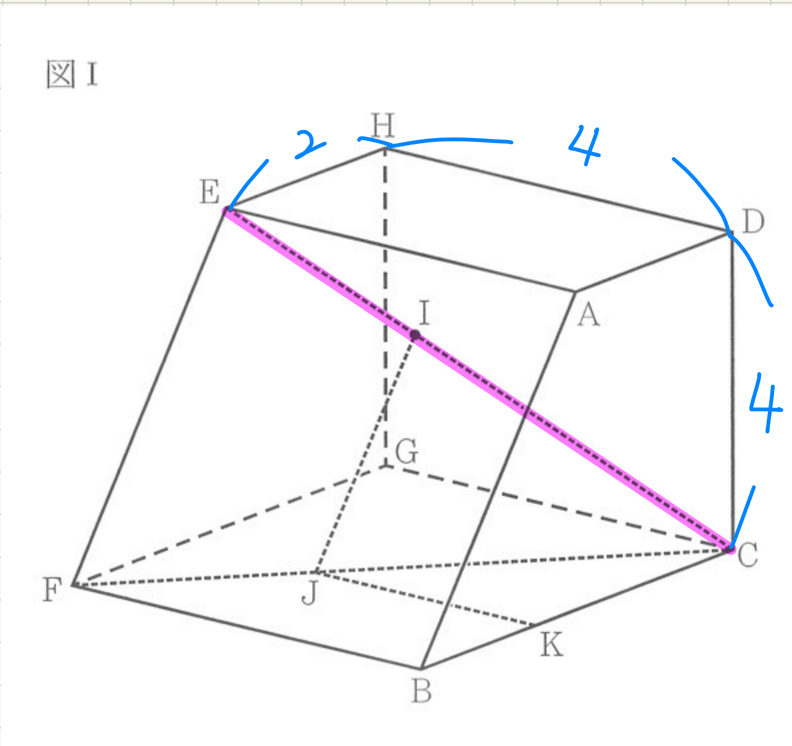
$$BO = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16-8} = \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

したがって、求める体積は

$$\underbrace{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \pi}_{\text{円Oの面積}} \times \underbrace{4\sqrt{2}}_{FC} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3}\pi \text{ cm}^3$$

②



立体の三平方の定理より

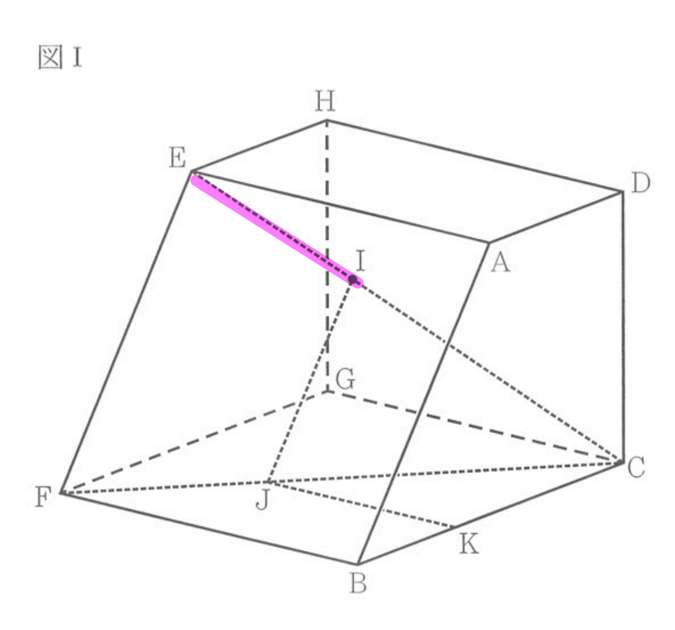
$$EC = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}$$

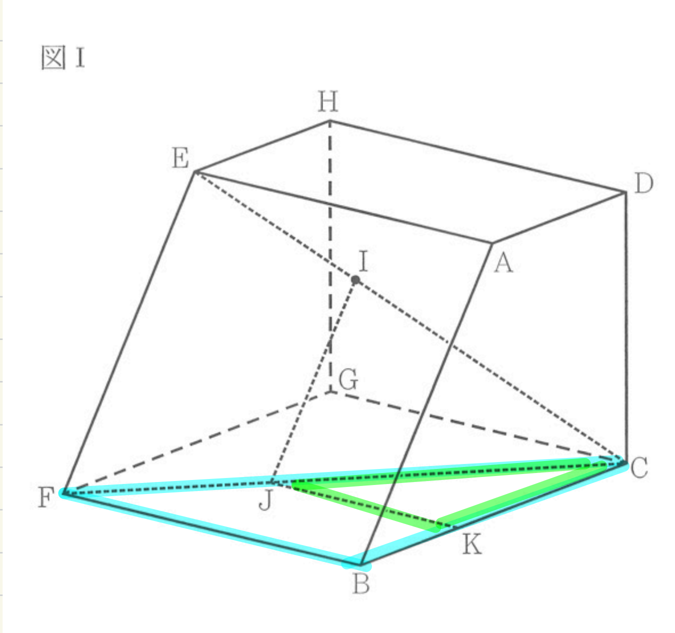
$$= \sqrt{16+16+4}$$

$$= \sqrt{36}$$

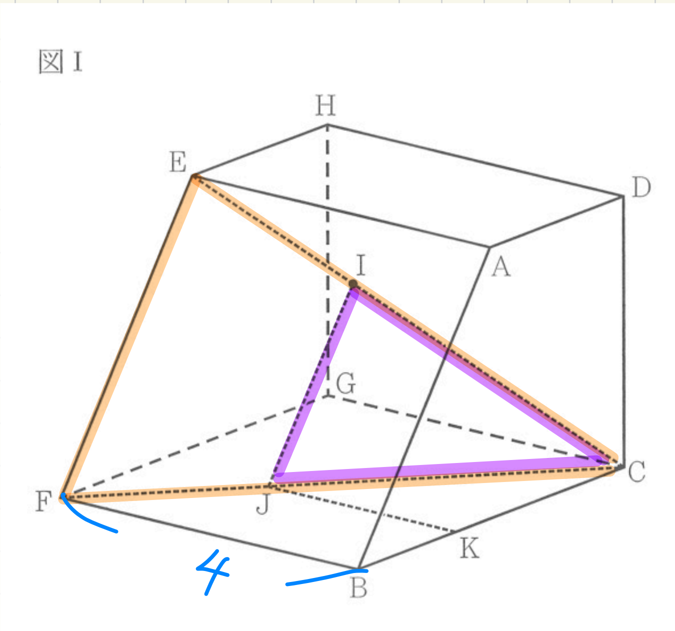
$$= 6 \text{ cm}$$

③





△CFBと△CJKにおいて、
JK∥FBより同位角が等しいから
∠CFJ＝∠CJK ―― ㋐
∠CJF＝∠CKJ ―― ㋑
㋐、㋑より2組の角がそれぞれ等しいので、
△CFB∽△CJK
よって、
FB：JK＝CF：CJ ―― ㋒



△CEFと△CIJにおいて、
IJ∥EFより同位角が等しいから
∠CEF＝∠CIJ ―― ㋓
∠CFE＝∠CJI ―― ㋔
㋓、㋔より2組の角がそれぞれ等しいので、
△CEF∽△CIJ

よって

$CE : CI = CF : CJ$ ― ㋕

㋒, ㋕より

$FB : JK = CE : CI$ ―― ㋖

ここで、$EI = x$ とおくと、$EI = JK$ より $JK = x$.

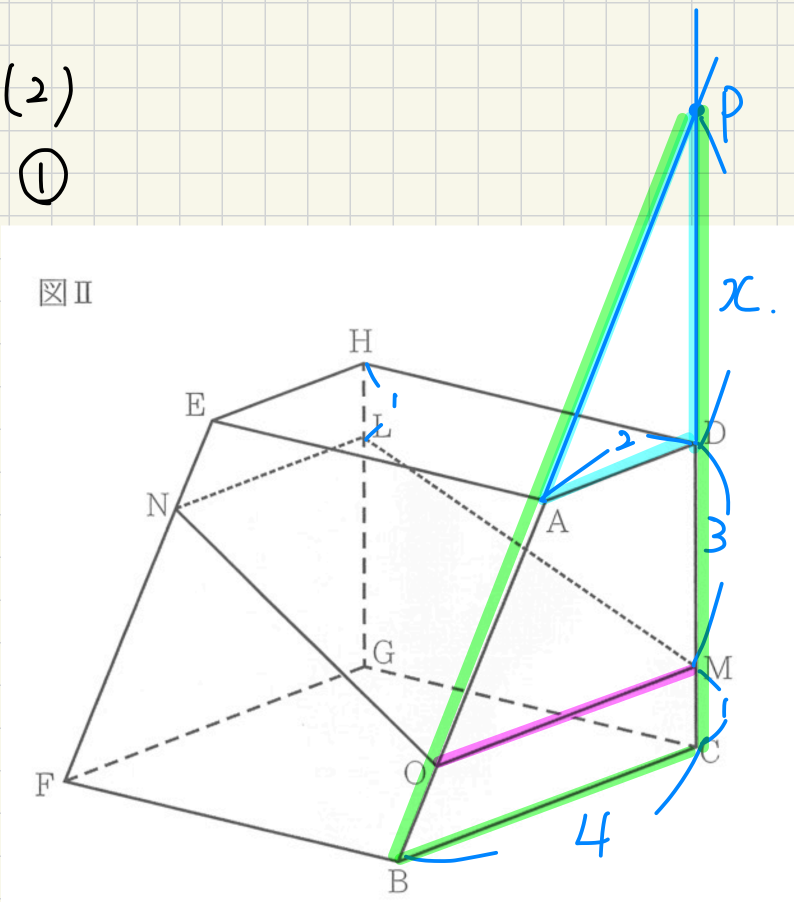
また、$CE = 6$ より $CI = 6 - x$。よって㋖より

$$4 : x = 6 : 6 - x$$
$$\Leftrightarrow 4(6 - x) = 6x$$
$$\Leftrightarrow 24 - 4x = 6x$$
$$\Leftrightarrow -10x = -24$$
$$\therefore x = \frac{12}{5}$$

よって $EI = \frac{12}{5}$ cm

(2)

①



直線ABと直線CDの交点をPとする。

また、$PD = x$ cm とする。

$\triangle PAD$ と $\triangle PBC$ において、

$AD \parallel BC$ より

$\angle PAD = \angle PBC$ ―― ㋐

$\angle PDA = \angle PCB$ ―― ㋑

㋐, ㋑ より2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle PAD \backsim \triangle PBC$

よって、

$$\underbrace{PD}_{x} : \underbrace{PC}_{x+4} = \underbrace{AD}_{2} : \underbrace{BC}_{4}$$

$\therefore\ x : x+4 = 1 : 2$

$\Leftrightarrow\ 2x = x+4$

$\therefore\ x = 4\,cm$

また、△PADと△POMにおいて、

AD // OM より同位角が等しいから

$\angle PAD = \angle POM$ — ㋒

$\angle PDA = \angle PMO$ — ㋓

㋒, ㋓ より2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PAD \backsim \triangle POM$

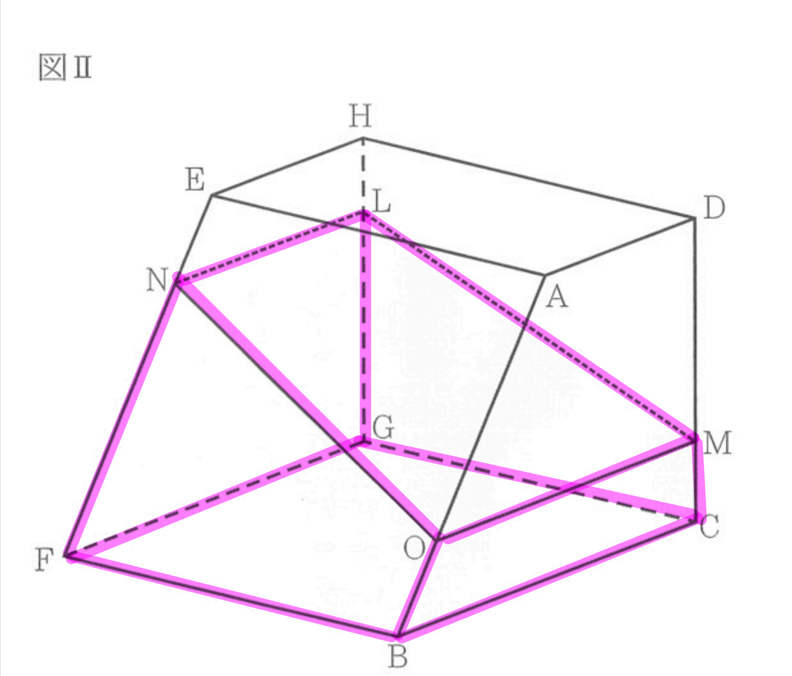
よって、

$$\underbrace{PD}_{4} : \underbrace{PM}_{7} = \underbrace{AD}_{2} : OM$$

$\therefore\ 4OM = 14$

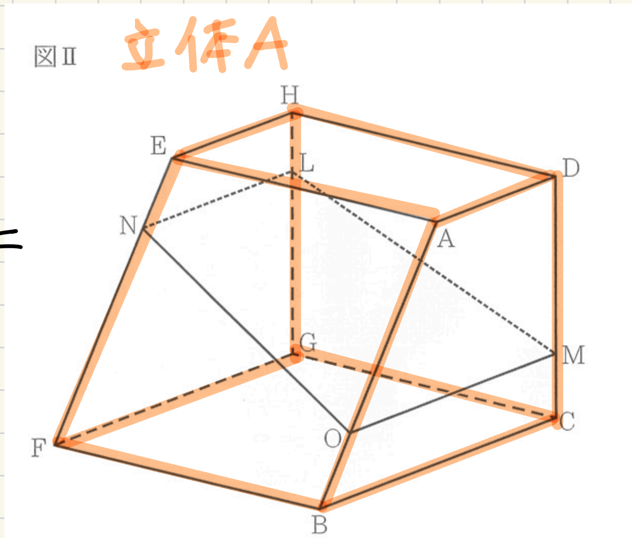
$OM = \frac{7}{2}\,cm$

③ 難問

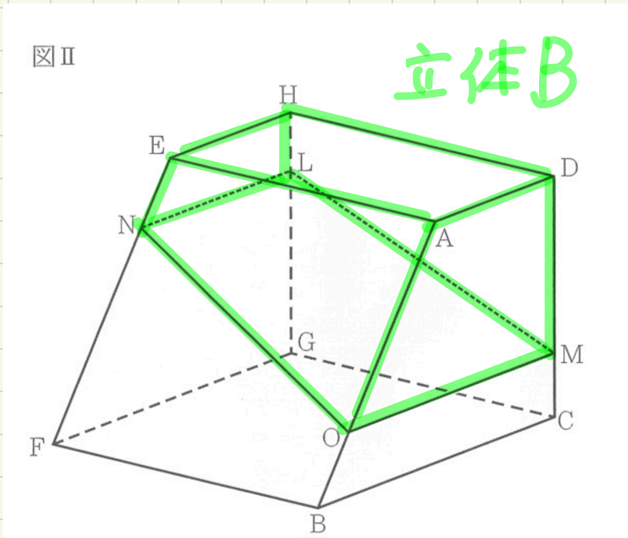


(i) 求める体積 = 立体A − 立体B

求める体積 =

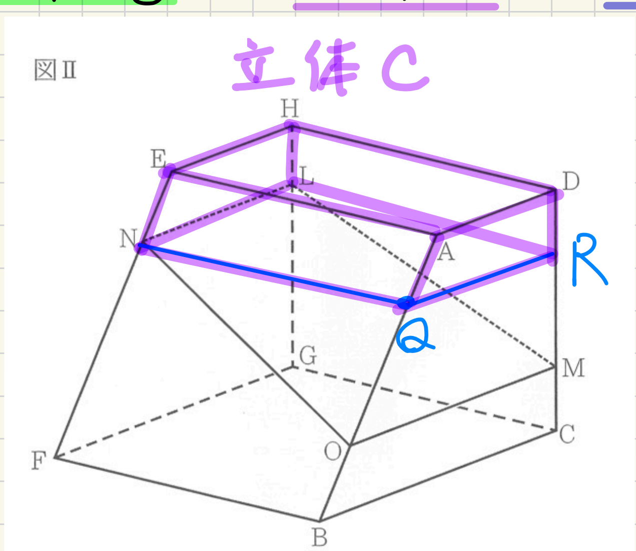


−

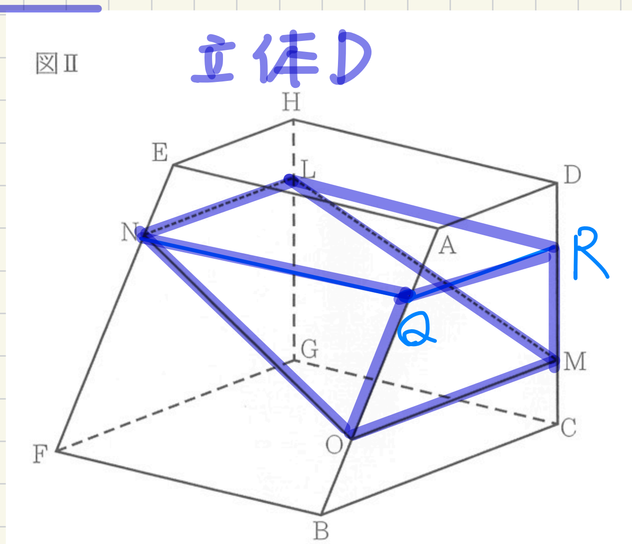


(ii) 立体B = 立体C + 立体D

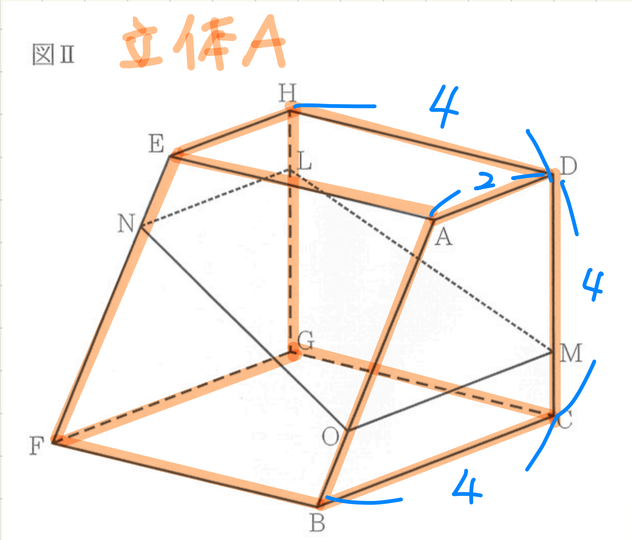
立体B =



+



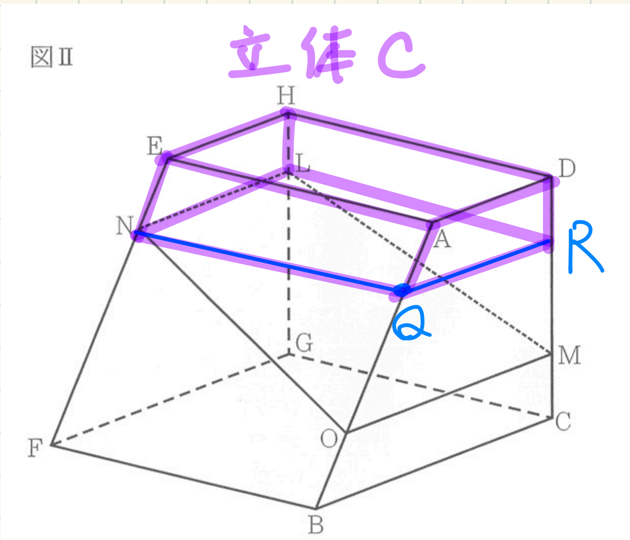
・立体Aについて.



$$\underbrace{(2+4)\times 4\times\frac{1}{2}}_{台形ABCD}\times\underbrace{4}_{高さ}$$

$$=\underline{48\ cm^3}$$

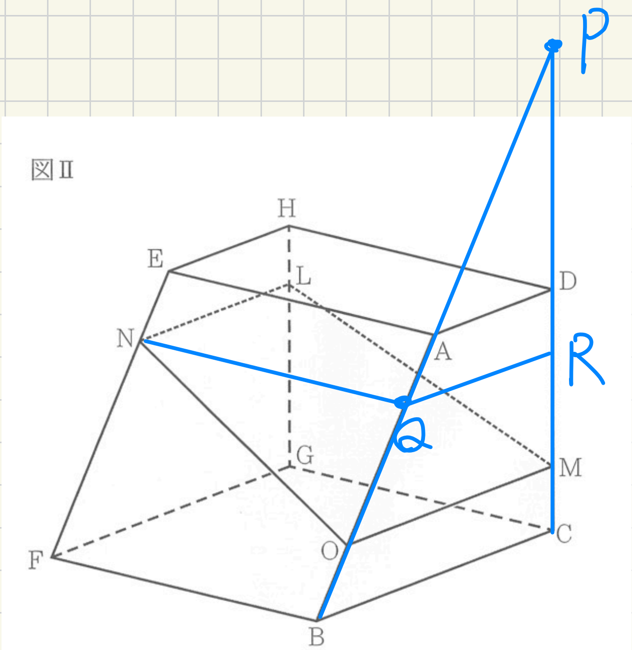
・立体Cについて.



FN=AQ, HL=DRとなるように、点Q, Rを定める

⇒QRの長さを求める

(2) ①と同様に、AB, CDの交点をPとする.



△PADと△PQRにおいて.
AD//QRより同位角が等しいから

∠PAD=∠PQR ―― ㋐
∠PDA=∠PRQ ―― ㋑

㋐, ㋑より2組の角がそれぞれ等しいから

△PAD∽△PQR.

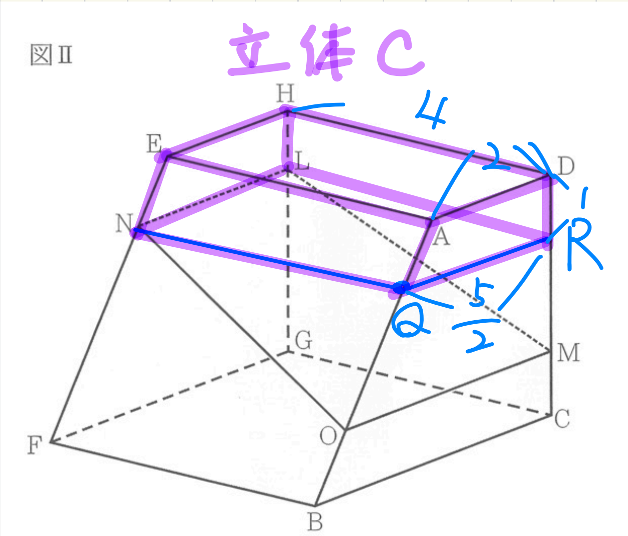
よって

$$\underbrace{PD}_{4} : \underbrace{PR}_{5} = \underbrace{AD}_{2} : QR$$

(2)①より

$$\Leftrightarrow 4QR = 10$$

$$\therefore QR = \frac{5}{2}$$

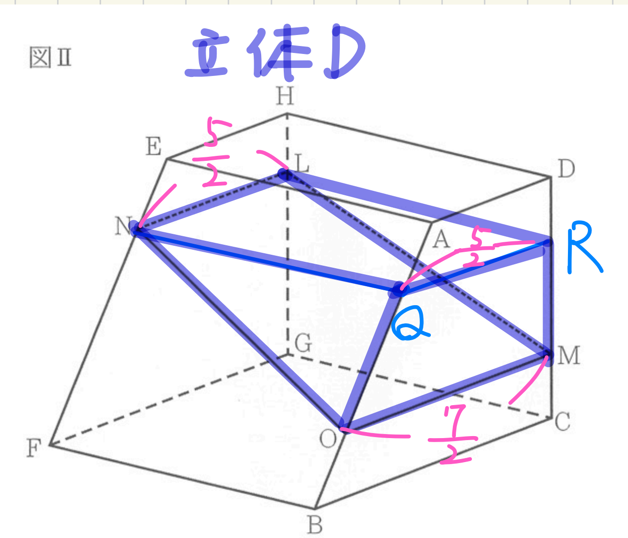


よって

$$\underbrace{\left(2+\frac{5}{2}\right)\times 1 \times \frac{1}{2}}_{台形AQRD} \times \underbrace{4}_{高さ}$$

$$= \underline{9\ cm^3}$$

・立体Dについて。



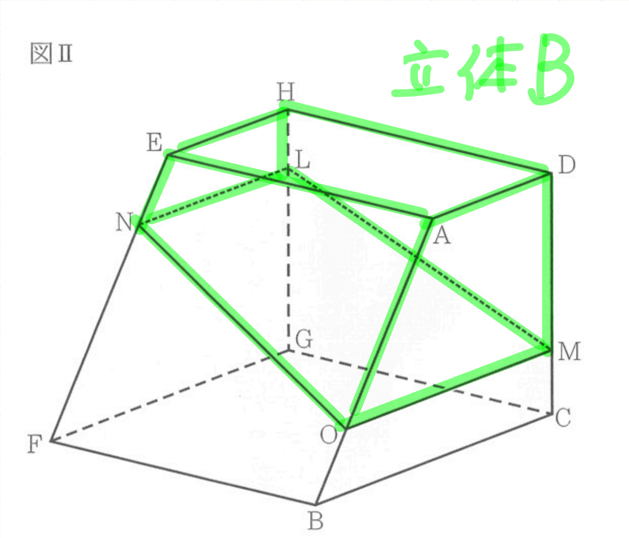
DC = 4, DR = 1, MC = 1 より
RM = 2

立体Dは断頭三角柱であるから

$$\underbrace{2\times 4\times\frac{1}{2}}_{\triangle LMR} \times \underbrace{\frac{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}{3}}_{\frac{NL+QR+OM}{3}}$$

$$= 4\times\frac{17}{2}\times\frac{1}{3} = \underline{\frac{34}{3}\ cm^3}$$

・立体Bについて



立体B = 立体C + 立体D

$$= 9 + \frac{34}{3}$$

$$= \frac{61}{3}\ \mathrm{cm}^3$$

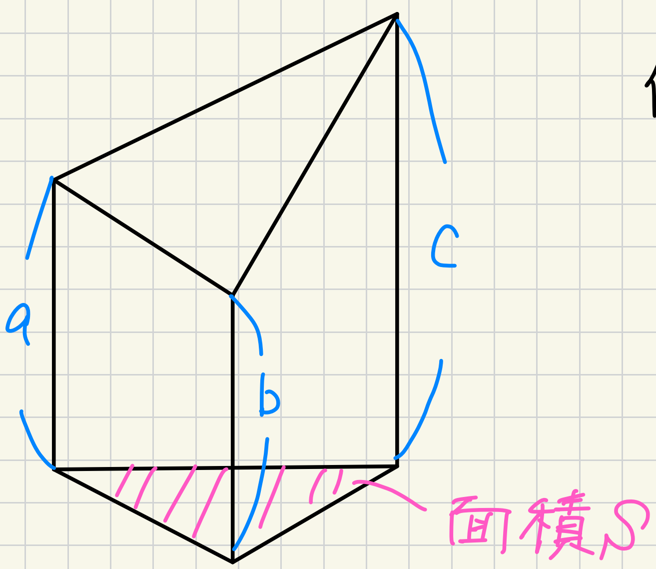
以上より、求める体積は

$$\text{立体A} - \text{立体B} = 48 - \frac{61}{3}$$

$$= \frac{144}{3} - \frac{61}{3}$$

$$= \frac{83}{3}\ \mathrm{cm}^3$$

(参考) 断頭三角柱



$$\text{体積} = S \times \frac{a+b+c}{3}$$