2024年度　奈良県
数学

Kmkm

$\boxed{1}$

(1)

① 与式 $= -3+7$

$= 4$

② 与式 $= 6x-3+x-4$

$= 7x-7$

③ 与式 $= \dfrac{10xy^2 \times 2x}{5y}$

$= 4x^2y$

④ 与式 $= x^2-16-(x^2-6x+9)$

$= x^2-16-x^2+6x-9$

$= 6x-25$

(2) 解の公式より

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$$

(3) $3x+5y>500$

(4) yはxに反比例するので，$y=\dfrac{a}{x}$とおくと，

$x=-6$，$y=4$だから

$$4 = \frac{a}{-6} \qquad \therefore a = -24$$

よって，$y = -\frac{24}{x}$ に $y = 3$ を代入して

$$3 = -\frac{24}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{24}{3}$$
$$= -8$$

(5) 2つのさいころを投げるときの出る目は $6 \times 6 = 36$ 通り

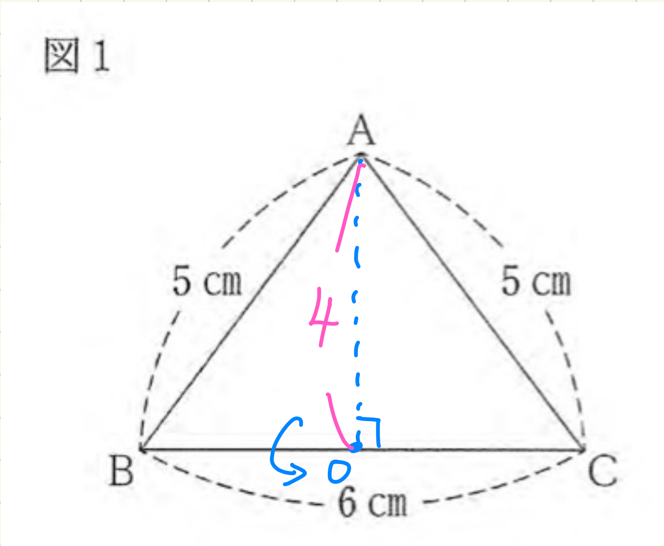
Aの出る目 > Bの出る目 となるのは

(Aの出る目，Bの出る目) = (6, 5), (6, 4), (6, 3),
(6, 2), (6, 1)
(5, 4), (5, 3), (5, 2),
(5, 1)
(4, 3), (4, 2), (4, 1)
(3, 2), (3, 1)
(2, 1)

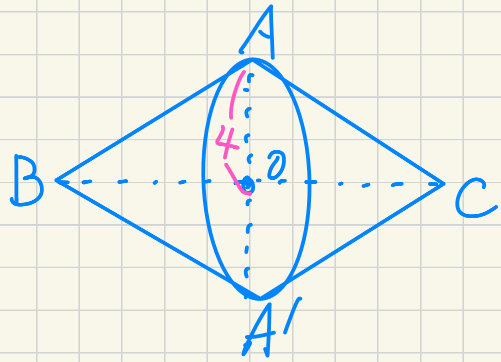
の15通り　よって求める確率は

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(6)



⇒



△ABCをBCを軸として回転させた立体は、
右上の図のようになる。
点AからBCに垂線を下ろした足をOとすると、
△ABCは二等辺三角形だから

$BO = OC$ 　 $\therefore BO = 3\,\text{cm}$

△ABOで三平方の定理より

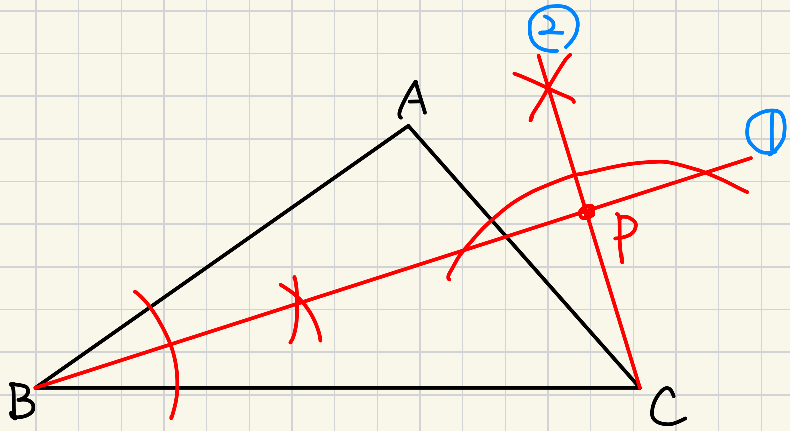
$$AO = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$= 4$$

よって、求める体積は

$$\underbrace{4}_{AO} \times \underbrace{4}_{AO} \times \pi \times \underbrace{3}_{BO} \times \frac{1}{3} \times 2 = 32\pi\ \text{cm}^3$$

(7)



① $\angle ABP = \angle CPB$ より
点Pは$\angle ABC$の二等分線上にある

② $BP \perp CP$ よりCを通り①の直線に垂直な線を描く.

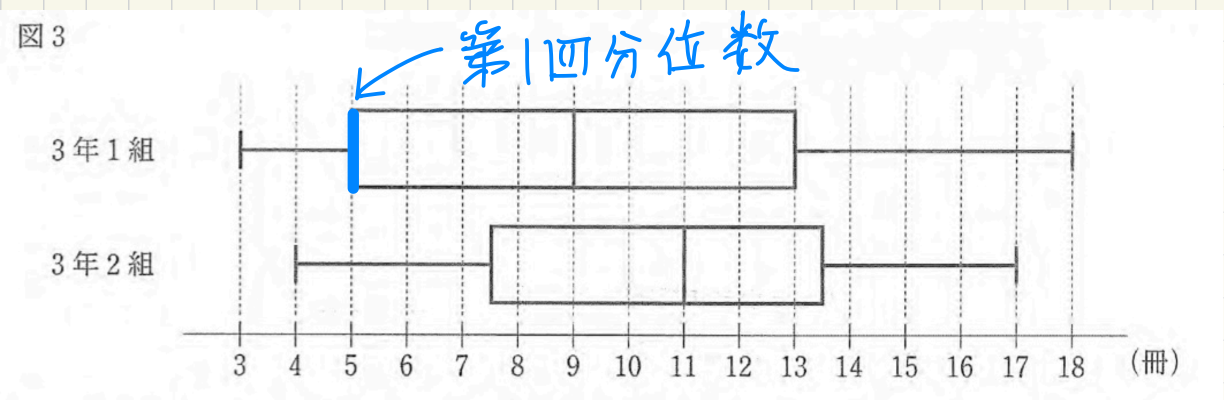
①と②の交点がPである

(8)

①

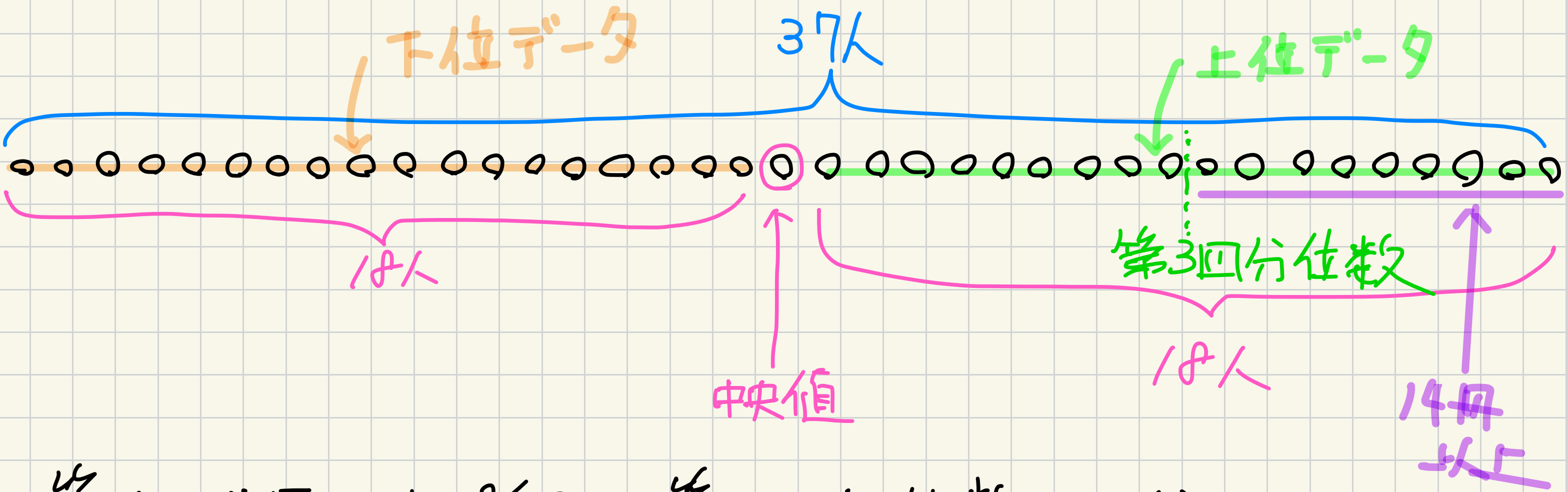
ア：範囲＝最大値－最小値
1組の範囲 $= 18 - 3 = 15$冊
2組の範囲 $= 17 - 4 = 13$冊
よって範囲は1組の方が大きいので誤り

イ：



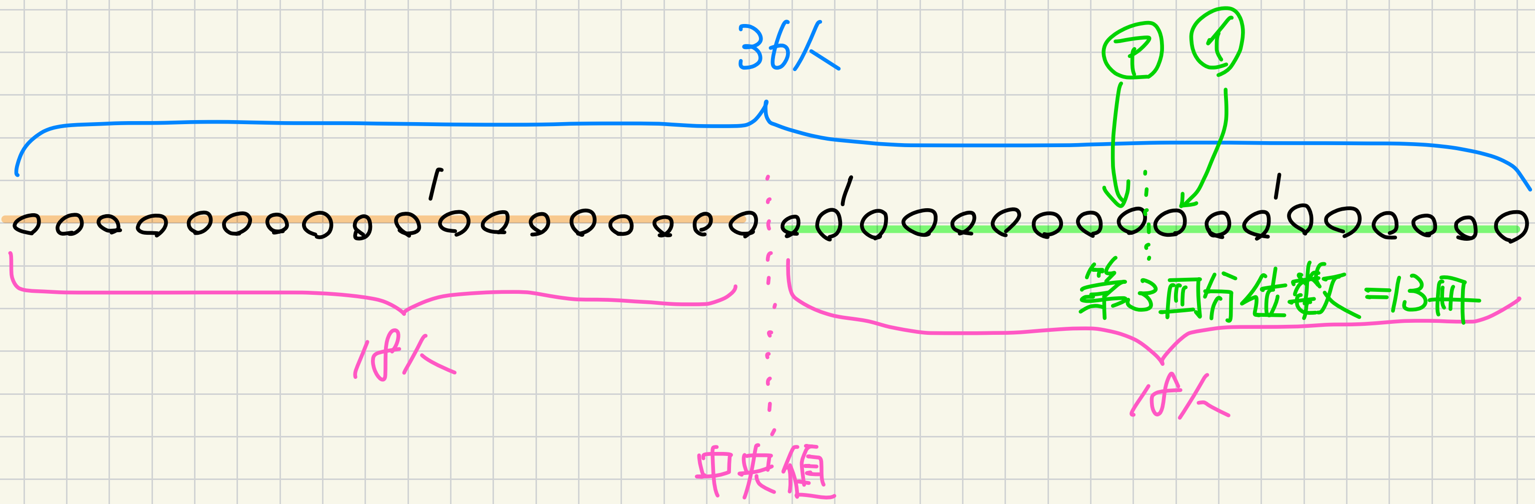
1組の第1四分位数は5冊なので正しい

ウ：2組のデータは以下の通り



箱ひげ図より 2組の第3四分位数は13冊と14冊の間だから. 上の図より 14冊読んだ生徒は9人いる.
よって正しい

エ：1組のデータは.以下の通り



1組のデータより. ㋐=12冊, ㋑=14冊のとき, 第3四分位数は

$$\frac{12+14}{2}=13\text{冊}$$

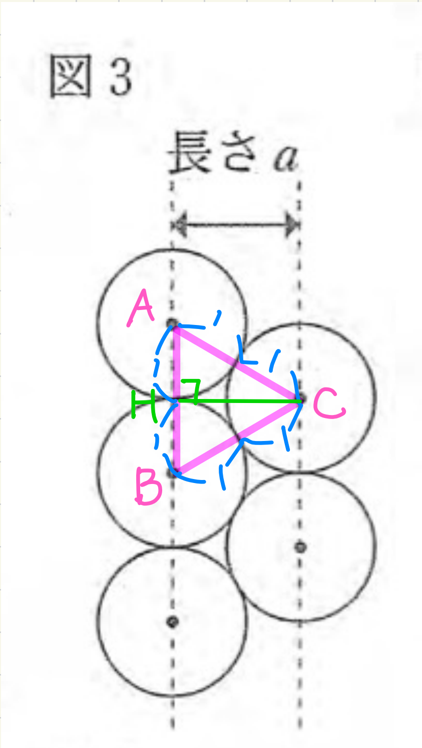
となるが、このとき13冊を読んだ生徒はいない.
よって誤り.

② 太郎さんの選び方だと、他の組や学年を無作為に選んでいない。(3年1組のデータに偏っている)。
よって、A中学校の生徒を無作為に選んでいないから。

□2

(1)

あ



左図のように△ABCを考える。
円の半径は1cmだから、
AB=2, BC=2, CA=2
となり、△ABCは正三角形である。

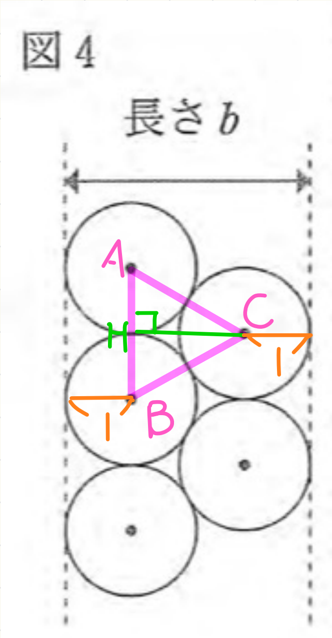
CからABに垂線を下ろした足をHとすると、
AH=BH
よりAH=1

△AHCで三平方の定理より

$$CH = \sqrt{2^2 - 1^2}$$
$$= \sqrt{4-1}$$
$$= \sqrt{3}$$

図より a = CH だから、$a = \sqrt{3}$ cm

(い)



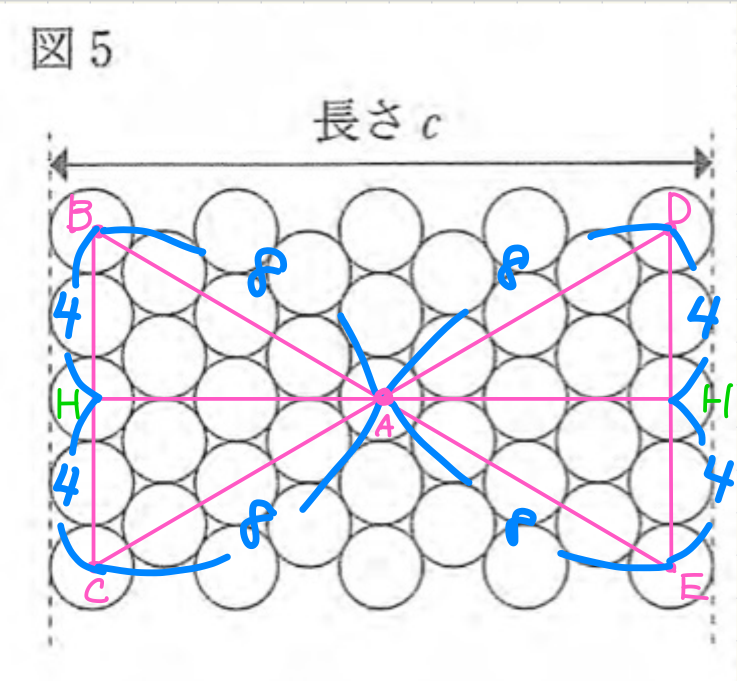
ⓐより CH $= \sqrt{3}$ cm であり、図より

$b =$ 半径 $+ \sqrt{3} +$ 半径

$= 1 + \sqrt{3} + 1$

$= 2 + \sqrt{3}$ cm

(う)



左図のように △ABC と △ADE を考える。

A から BC に垂線を下ろした足を H、

A から DE に垂線を下ろした足を H' とする。

△ABC で

AB = BC = CA = 半径 + 直径 + 直径 + 直径 + 半径

$= 1 + 2 + 2 + 2 + 1$

$= 8$ cm

同様に

AD = DE = EA = 8 cm

よって、△ABH で三平方の定理より

$$AH = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3}\ \text{cm}$$

同様に △ADH' で三平方の定理より

$$AH' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

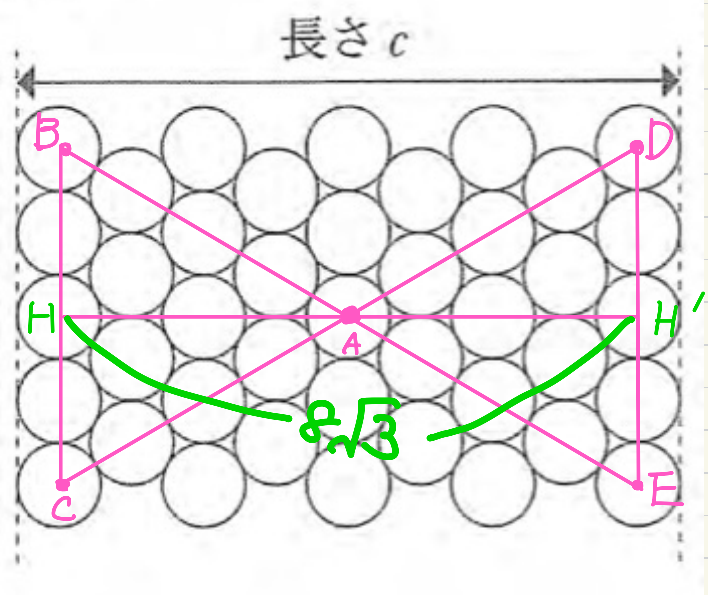
$$= 4\sqrt{3}\ \text{cm}$$

よって

$$HH' = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$= 8\sqrt{3}\ \text{cm}$$

図 5



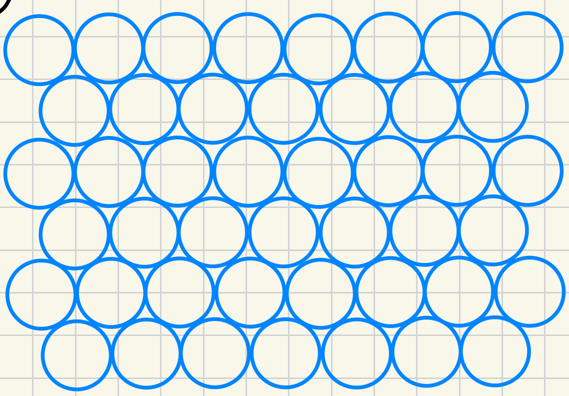
よって

$$c = 半径 + 8\sqrt{3} + 半径$$

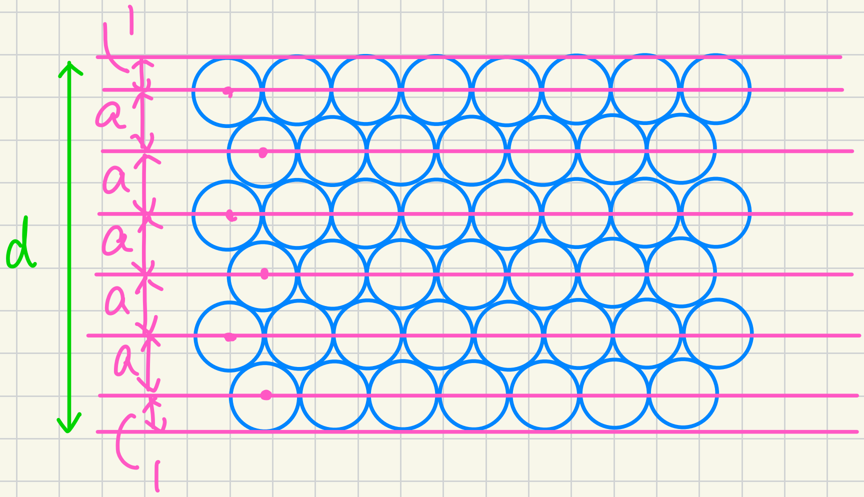
$$= 1 + 8\sqrt{3} + 1$$

$$= 2 + 8\sqrt{3}\ \text{cm}$$

②



上から横に8個、7個 …
と6列に並べたときの図は
左のようになる。



左図より

$d=1+5a+1$

$\quad=2+5a$

(1)①あ より $a=\sqrt{3}$

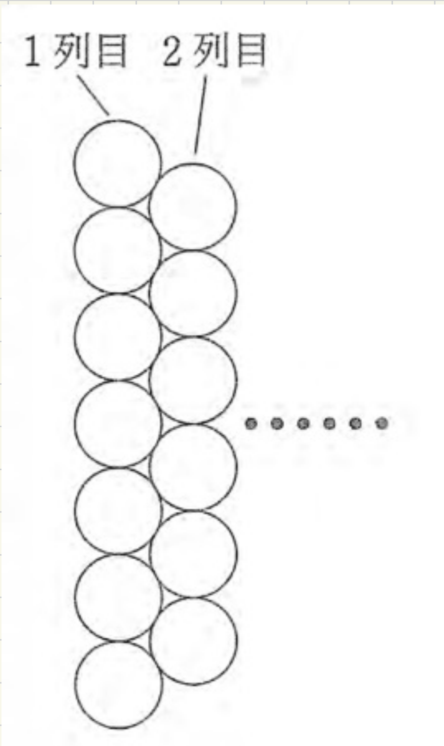
だから

$d=2+5\sqrt{3}$

よって，上から6列並べた円の上端から下端までの長さは，$2+5\sqrt{3}=2+5\times1.73$ を計算して，10.65cm となるので，AB $=10$ cm より大きい。

よって，太郎さんの考えは正しくない

(2)



1列目，3列目，5列目，… は

円の数が 7個　(奇数列)

2列目，4列目，6列目，… は

円の数が 6個　(偶数列)

(i) n が偶数のとき

$$\underset{\text{1列目}}{7}+\underset{\text{2列目}}{6}+\underset{\text{3列目}}{7}+\underset{\text{4列目}}{6}+\cdots\cdots+\underset{n-1\text{列目}}{7}+\underset{n\text{列目}}{6}$$

奇数列が $\dfrac{n}{2}$ 列，偶数列が $\dfrac{n}{2}$ 列 あるから，

円の合計は

$$7\times\frac{n}{2}+6\times\frac{n}{2}=\frac{13}{2}n \text{ 個}$$

(ii) n が奇数のとき

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & +6 & +7 & +6 & +\cdots & +6 & +7 \\ 1\text{列目} & 2\text{列目} & 3\text{列目} & 4\text{列目} & \cdots & n-1\text{列目} & n\text{列目} \end{array}$$

奇数列が $\frac{n+1}{2}$ 列，偶数列が $\frac{n+1}{2}-1=\frac{n-1}{2}$ 列

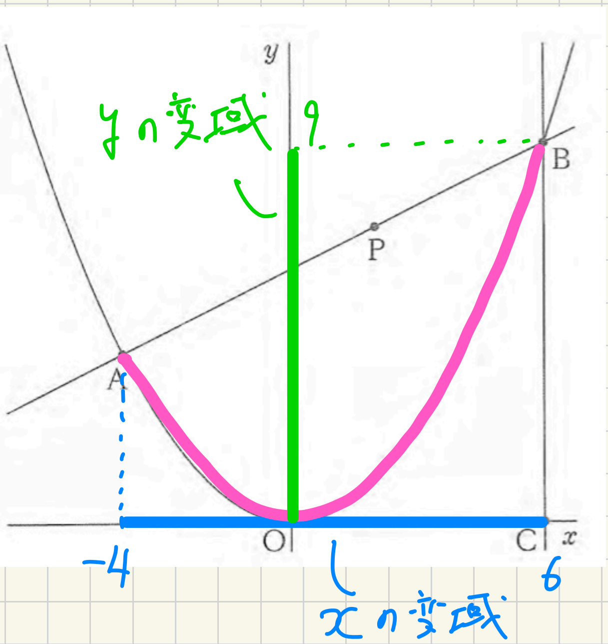
あるから，円の合計は

$$7\times\frac{n+1}{2}+6\times\frac{n-1}{2}=\frac{7n+7+6n-6}{2}$$

$$=\frac{13}{2}n+\frac{1}{2} \text{ 個}$$

$\boxed{3}$

(1)



$y=\frac{1}{4}x^2$ において，$x=6$ のとき

$$y=\frac{1}{4}\times 6^2$$

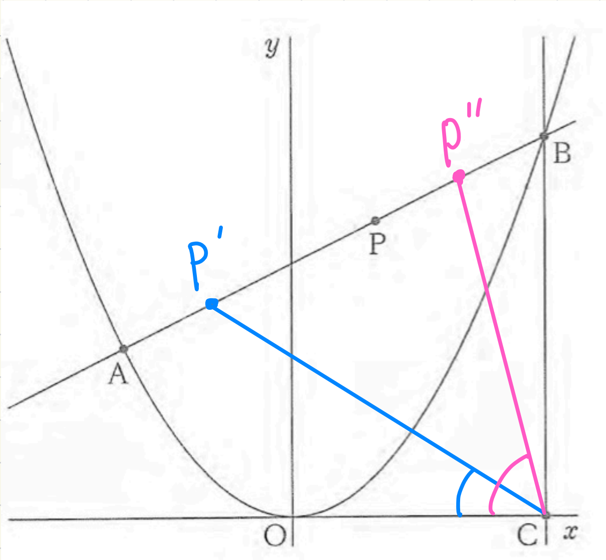
$$=\frac{1}{4}\times 36$$

$$=9$$

よって，左図より y の変域は

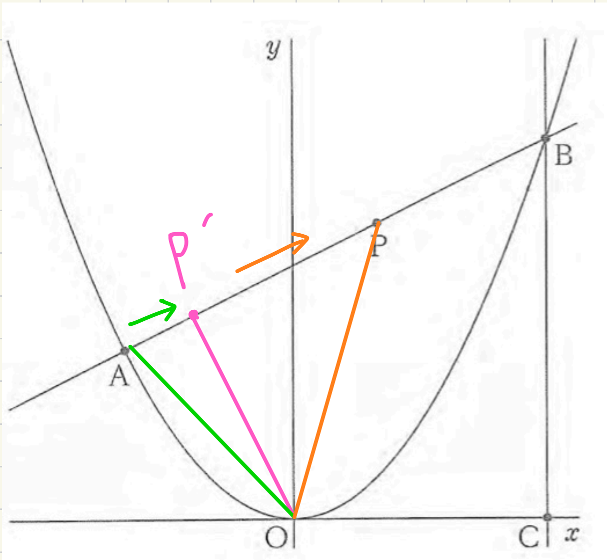
$$0\leqq y\leqq 9$$

(2) ①



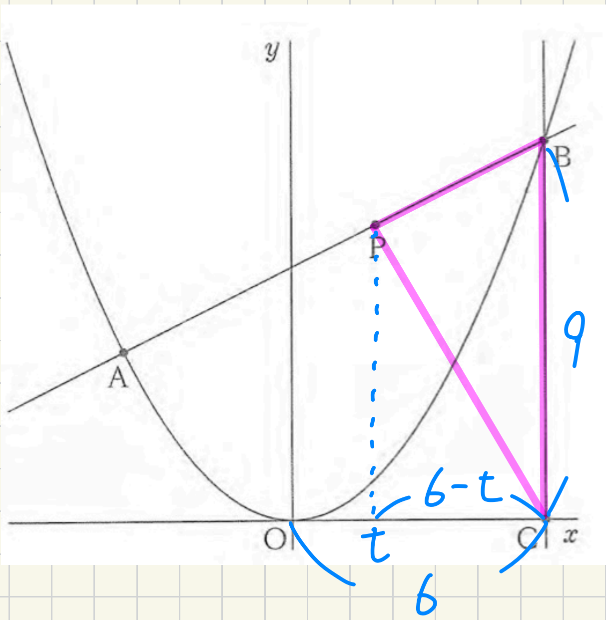
Pが A→B と動くとき,
左図より ∠OCPの大きさは
大きくなる。よって ア

②



OPの長さが最短となるのは,
AB⊥OP のときである。
このときのPをP′とすると,
A→P′までは, OPの長さが小さくなり, P′→BではOPの長さが大きくなる. よって オ

(3)



点Bの座標は(1)より B(6, 9)

点Pのx座標をtとすると,
左図より△BCPの面積は

$$\frac{1}{2}\times 9\times(6-t)$$

これが21となるので.

$$\frac{1}{2} \times 9 \times (6-t) = 21$$

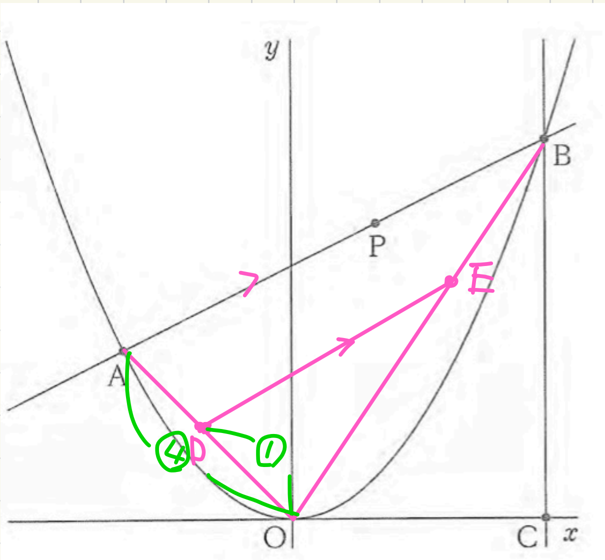
$$\Leftrightarrow 54 - 9t = 42$$

$$\Leftrightarrow -9t = -12$$

$$\therefore t = \frac{4}{3}$$

よって、点Pのx座標は $\frac{4}{3}$

(4)



△ODEと△OABにおいて、AB // DEより同位角が等しいから

∠ODE = ∠OAB —— ㋐

∠OED = ∠OBA —— ①

㋐, ①より2組の角がそれぞれ等しいので、△ODE ∽ △OAB.

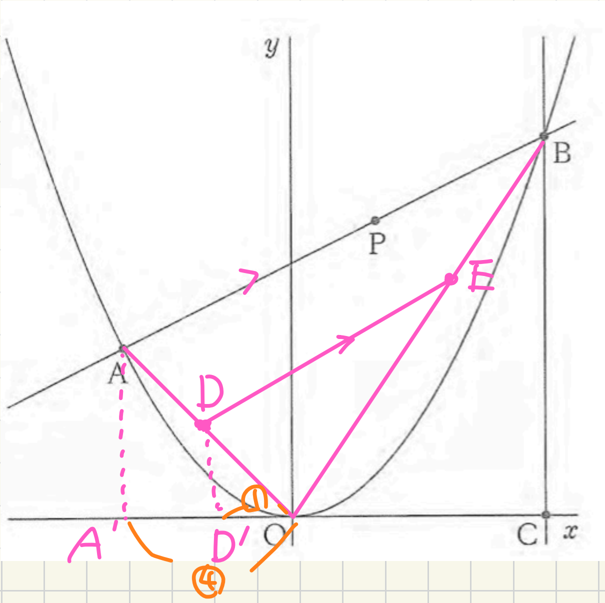
$$\triangle ODE = \frac{1}{16} \triangle OAB \text{ より}$$

△ODE : △OAB = 1 : 16 (面積比)

また相似比は OD : OA であり、相似な図形の相似比は面積比の2乗に等しいから

$$OD : OA = \sqrt{1} : \sqrt{16}$$

$$= 1 : 4$$



Dからx軸に垂線を下ろした足をD'

Aからx軸に垂線を下ろした足をA'とする。

$\triangle ODD'$と$\triangle OAA'$において、

$DD' \parallel AA'$より同位角が等しいので

$\angle ODD' = \angle OAA'$ —— ㋐

$\angle OD'D = \angle OA'A$ —— ㋓

㋐,㋓より2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ODD' \backsim \triangle OAA'$

対応する辺の比は等しいから

$OD' : OA' = \underbrace{OD : OA}_{1\ :\ 4}$

よって

$OD' : OA' = 1 : 4$

点Aのx座標は-4だから

$$OD' = -4 \times \frac{1}{4}$$

$$= -1$$

よってDのx座標は-1

点Aは$y = \frac{1}{4}x^2$上にあり、$x=-4$だから

$y = \frac{1}{4} \times (-4)^2 = 4$　　$\therefore A(-4, 4)$

直線OAの式を $y=ax$ とおくと、$A(-4,4)$ を通るから

$4=-4a \qquad \therefore a=-1$

よって直線OA：$y=-x$

点Dは直線OA：$y=-x$ 上にあり、$x=-1$ だから

$$y=-(-1)$$
$$=1 \qquad \therefore D(-1,1)$$

直線ABの式を $y=mx+n$ とおくと、$A(-4,4)$、$B(6,9)$ を通るから

$$\begin{array}{rrl} & 4 = & -4m+n \\ -) & 9 = & 6m+n \\ \hline & -5 = & -10m \end{array}$$

$$m=\frac{1}{2}$$

平行な直線の傾きは等しい

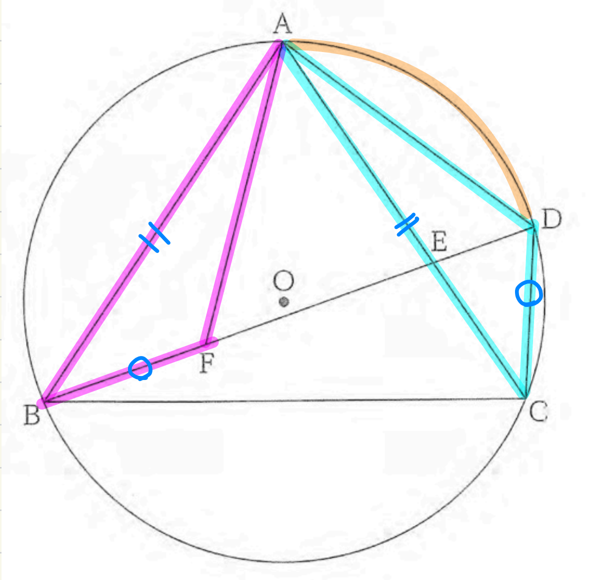
よって、直線ABの傾きは $\frac{1}{2}$ であり、AB // DE より直線DEの傾きも $\frac{1}{2}$ である。したがって、直線DEの式を $y=\frac{1}{2}x+b$ とおくと、$D(-1,1)$ を通るから

$1=\frac{1}{2}\times(-1)+b \qquad \therefore b=\frac{3}{2}$

よって、直線DEの式は $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

4

(1)



$\triangle ABF$ と $\triangle ACD$ において,
仮定から

$AB = AC$ —①

$BF = CD$ —②

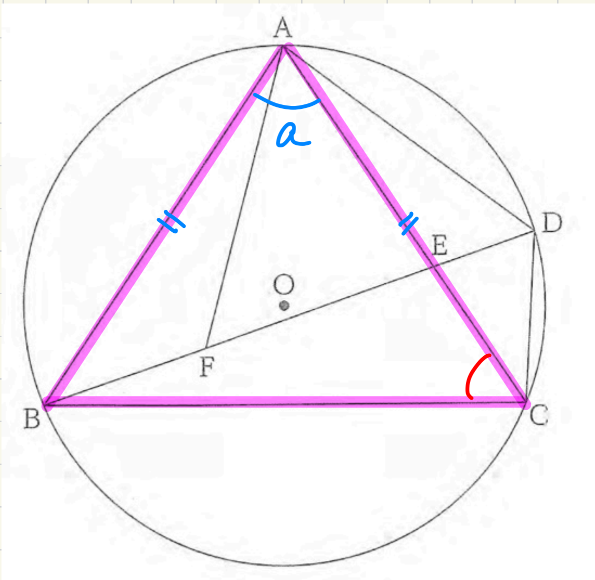
1つの弧に対する円周角は等しいから

$\angle ABF = \angle ACD$ —③

①, ②, ③より2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF \equiv \triangle ACD$ (証明終わり)

(2)



$\triangle ABC$ は, $AB = AC$ の二等辺三角形だから

$\angle ABC = \angle ACB$

$\angle ACB = x^\circ$ とすると, 三角形の内角の和は 180° だから

$a + x + x = 180^\circ$

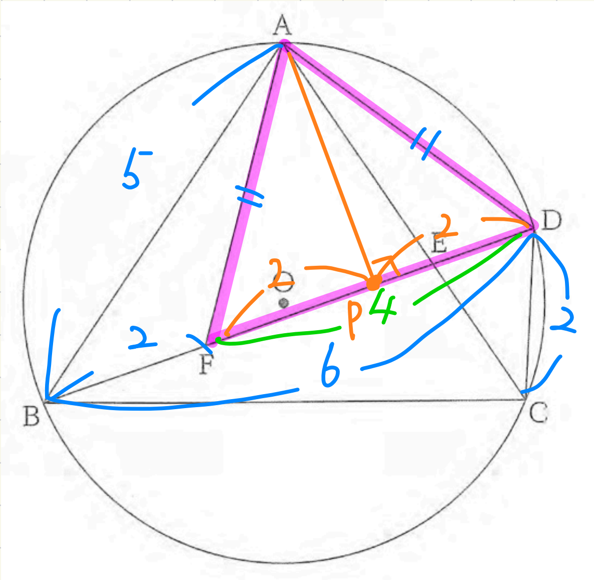
よって,

$2x = 180^\circ - a$

$\therefore x = 90^\circ - \frac{1}{2}a$

(3)

①



(1) より △ABF ≡ △ACD だから

AF = AD

よって △AFD は二等辺三角形である

また，△ABF ≡ △ADD だから

BF = CD ∴ BF = 2 cm

よって，FD = 4 cm

A から BD に垂線を下ろした足を P とする.

△AFD は二等辺三角形だから

FP = PD ∴ FP = 2 cm，PD = 2 cm

△ABP で三平方の定理より

$AP = \sqrt{5^2 - 4^2}$ $= \sqrt{25-16}$

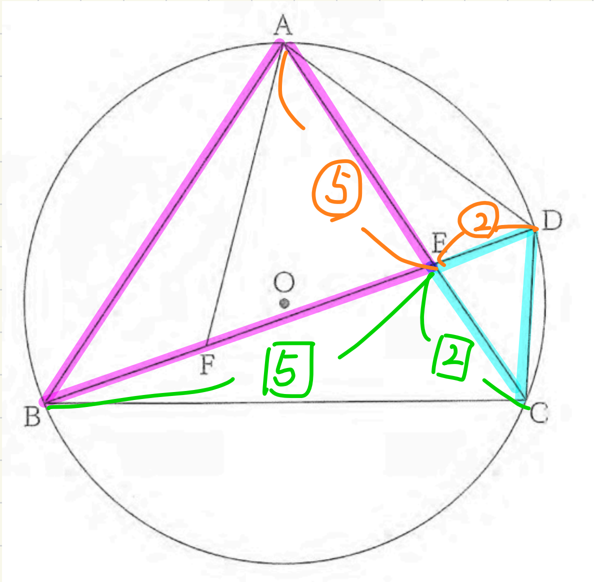
$= 3$ cm $= \sqrt{9} = 3$

△APD で三平方の定理より

$AD = \sqrt{3^2 + 2^2}$ $= \sqrt{9+4}$

$= \sqrt{13}$ cm $= \sqrt{13}$

②



△ABEと△DCEにおいて

$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいから

$\angle ABE = \angle DCE$ —㋐

$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角は等しいから

$\angle BAE = \angle CDE$ —㋑

㋐,㋑より2組の角がそれぞれ等しいので，$\triangle ABE \backsim \triangle DCE$

対応する辺の比は等しいから

$AE : DE = BE : CE = \underset{5}{AB} : \underset{2}{CD}$

よって

$AE : DE = 5 : 2$, $BE : CE = 5 : 2$

したがって，$AE = 5x$, $DE = 2x$, $BE = 5y$, $CE = 2y$ とおくと，

$5x + 2y = 5$ —㋒ ⇐ $AE + CE = AC$

$2x + 5y = 6$ —㋓ ⇐ $DE + BF = BD$

㋒×2 − ㋓×5 より

$$
\begin{array}{rr}
 & 10x + 4y = 10 \\
-) & 10x + 25y = 30 \\
\hline
 & -21y = -20
\end{array}
$$

$$y = \frac{20}{21}$$

$y = \frac{20}{21}$ を ⑦ に代入して

$$5x + 2 \times \frac{20}{21} = 5$$

$$5x = 5 - \frac{40}{21}$$

$$= \frac{65}{21}$$

$$\therefore x = \frac{65}{21} \times \frac{1}{5}$$

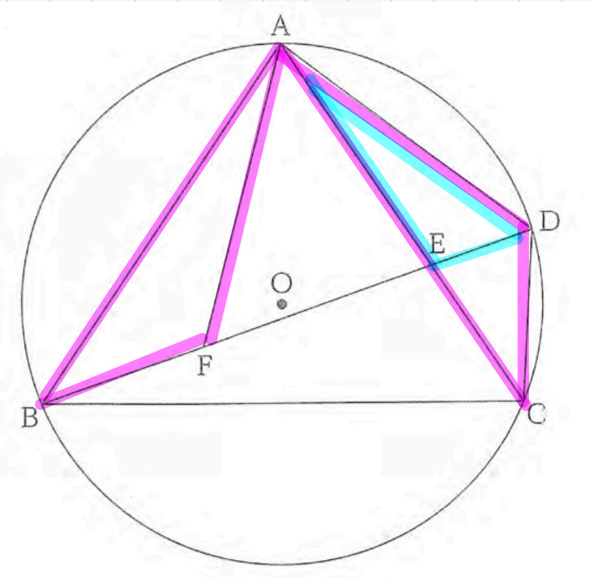
$$= \frac{13}{21}$$

よって、

$$AE = 5x$$

$$= 5 \times \frac{13}{21}$$

$$= \frac{65}{21} \text{ cm}$$



(1) より $\triangle ABF \equiv \triangle ACD$ だから

$\triangle ABF = \triangle ACD$

面積が等しい

また、$\triangle ACD$ と $\triangle AED$ において、底辺をそれぞれ AC, AE とすると高さが等しいので、面積比は底辺比と等しい。よって、

$$\triangle ACD : \triangle AED = AC : AE$$

$$= 5 : \frac{65}{21}$$

$$= 21 : 13$$

したがって、

$$13 \times \triangle ACD = 21 \times \triangle AED$$

$\Leftrightarrow \quad \triangle ACD = \frac{21}{13} \times \triangle AED$

$\triangle ABF = \triangle ACD$ だから、

$$\triangle ABF = \frac{21}{13} \times \triangle AED$$

よって、$\triangle ABF$ の面積は $\triangle AED$ の $\frac{21}{13}$ 倍