2024年度　宮城県

数学

kmkm

第一問

1. 与式 $= -14$

2. 与式 $= \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3}$

$= \dfrac{5}{3}$

3. 与式 $= 6a^2b \div 2ab - 4ab^2 \div 2ab$

$= 3a - 2b$

4. $2(a+7b) - 8b = 2a + 14b - 8b$

$= 2a + 6b$

$a = -5,\ b = \dfrac{1}{6}$ より

$2a + 6b = 2 \times (-5) + 6 \times \dfrac{1}{6}$

$= -10 + 1$

$= -9$

5. 与式 $= (x-3)(x-7)$

6. y は x に反比例するから、$y = \dfrac{a}{x}$ とおくと、

$x = -2,\ y = 9$ だから

$9 = \dfrac{a}{-2}$　　$\therefore a = -18$

よって、

$$y = -\frac{18}{x}$$

7. $\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7}$.

よって、$\sqrt{10}$、$\sqrt{7}$、3 の大小を比較する。それぞれ2乗すると、

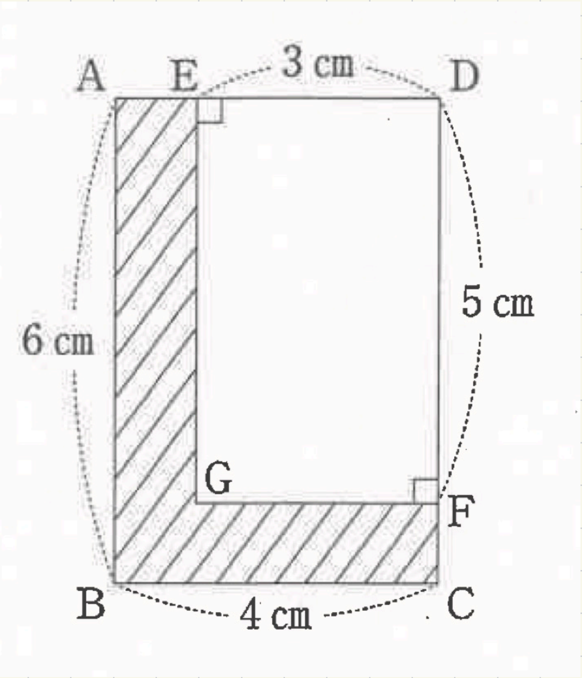
$$\sqrt{10}^2 = 10$$
$$\sqrt{7}^2 = 7$$
$$3^2 = 9$$

であり、$7 < 9 < 10$ だから、$\sqrt{7} < 3 < \sqrt{10}$。よって、

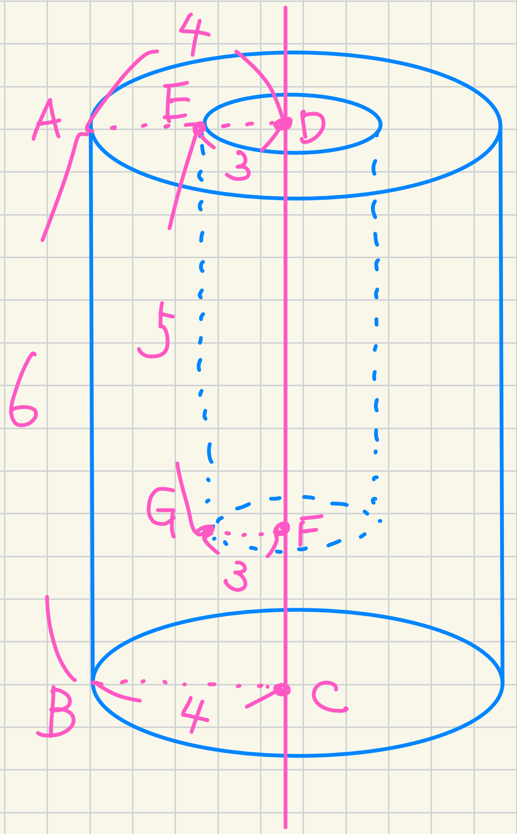
$$\frac{7}{\sqrt{7}} < 3 < \sqrt{10}$$

エ

8.



⇒



□ABCD を DC を軸として1回転させたときの体積は.

$$4 \times 4 \times \pi \times 6 = 96\pi \text{ cm}^3$$

□EGFD を DC を軸として1回転させたときの体積は

$$3 \times 3 \times \pi \times 5 = 45\pi \text{ cm}^3$$

よって、求める体積は

$$96\pi - 45\pi = 51\pi \text{ cm}^3$$

第二問

1. さいころを2回投げたときの出る目は.全部で
$6 \times 6 = 36$通り

(1) $a+b=6$ となるのは
$(a,b) = (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$
の5通り。よって求める確率は

$$\frac{5}{36}$$

(2) $\frac{b+1}{a}$ が整数となるのは. $b+1$ が a の倍数
となるときである.

・$a=1$ のとき

$$\frac{b+1}{a} = \frac{b+1}{1}$$

すなわち. $b+1$ が 1 の倍数となれば良く,
$b=1, 2, 3, 4, 5, 6$ $(b=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ の 6通り

・$a=2$ のとき

$$\frac{b+1}{a}=\frac{b+1}{2}$$

すなわち. $b+1$ が 2の倍数となれば良く.
$b+1=2, 4, 6$ $(b=1, 3, 5)$ の 3通り

・$a=3$ のとき

$$\frac{b+1}{a}=\frac{b+1}{3}$$

すなわち. $b+1$ が 3 の倍数となれば良く.
$b+1=3, 6$ $(b=2, 5)$ の 2通り

・$a=4$ のとき

$$\frac{b+1}{a}=\frac{b+1}{4}$$

すなわち. $b+1$ が 4 の倍数となれば良く.
$b+1=4$ $(b=3)$ の 1通り

・$a=5$ のとき

$$\frac{b+1}{a}=\frac{b+1}{5}$$

すなわち. $b+1$ が 5 の倍数となれば良く.
$b+1=5$ $(b=4)$ の 1通り

・$a=6$のとき

$$\frac{b+1}{a}=\frac{b+1}{6}$$

すなわち、$b+1$が6の倍数となれば良く、

$b+1=6$ $(b=5)$ の1通り

以上より、$\frac{b+1}{a}$が整数となるのは、

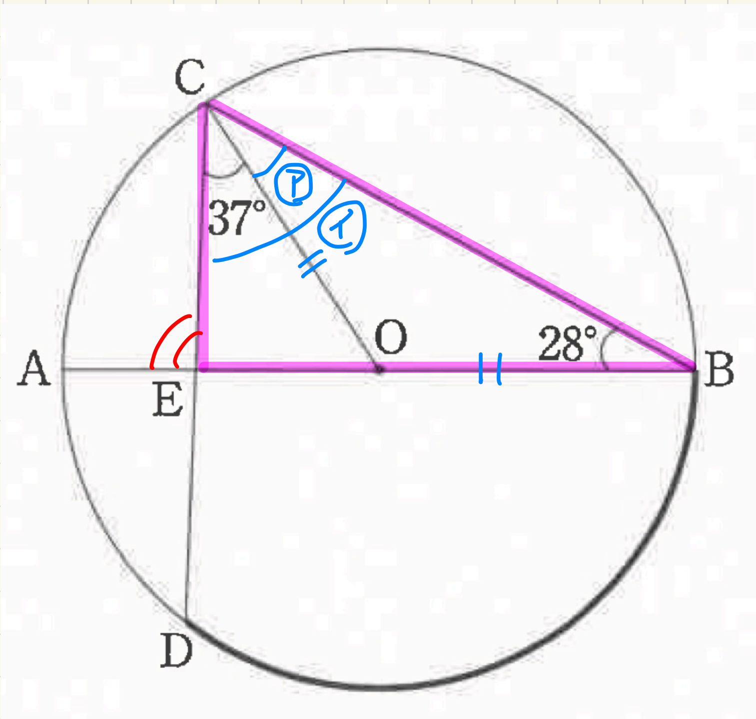
$6+3+2+1+1+1=14$通り

したがって、求める確率は

$$\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$$

2.

(1)



△OBCにおいて、OB, OCは円の半径だから、

$OB=OC$

よって、△OBCは二等辺三角形で、底角が等しいから

ア $=\angle OBC$

$=28°$

よって

イ $=37°+28°=65°$

△BCEで内角の和は180°だから、

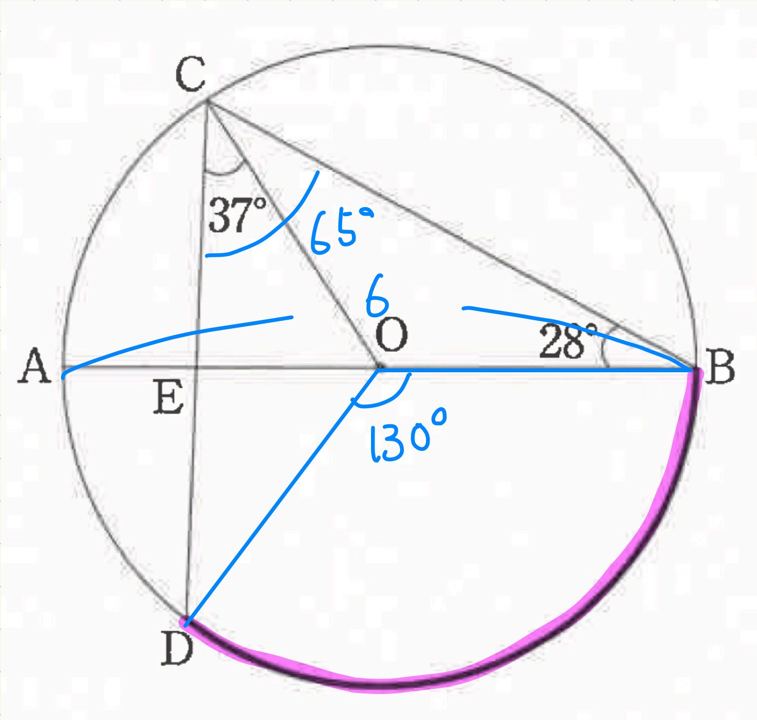
$\angle CEB=180°-(28°+65°)$

$=87°$

よって

$$\angle AEC = 180^\circ - \angle CEB$$
$$= 180^\circ - 87^\circ$$
$$= 93^\circ$$

(2)



$\overset{\frown}{DB}$ に対して, $\angle DCB$ は円周角, $\angle DOB$ は中心角だから,

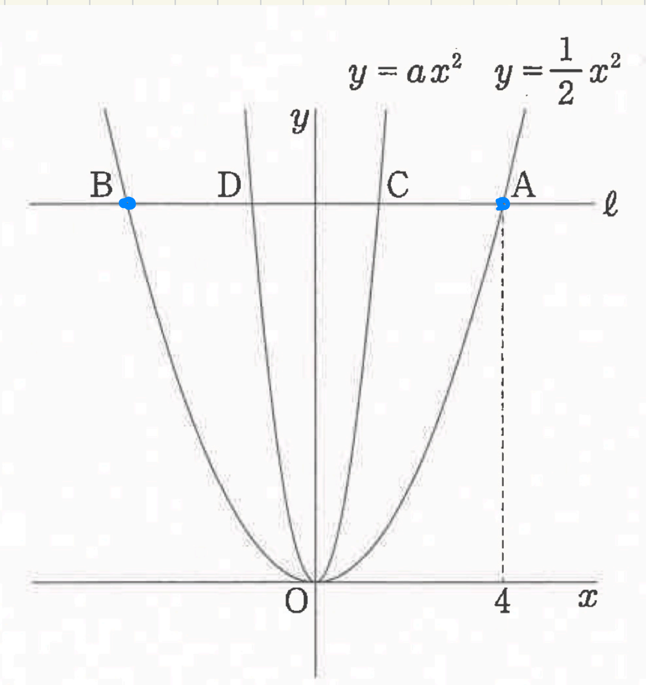
$$\angle DOB = 2 \times \angle DCB$$
$$= 2 \times 65^\circ$$
$$= 130^\circ$$

よって,

$$\overset{\frown}{DB} = 6 \times \pi \times \frac{130}{360}$$
$$= \frac{13}{6}\pi \text{ cm}$$

3.

(1)

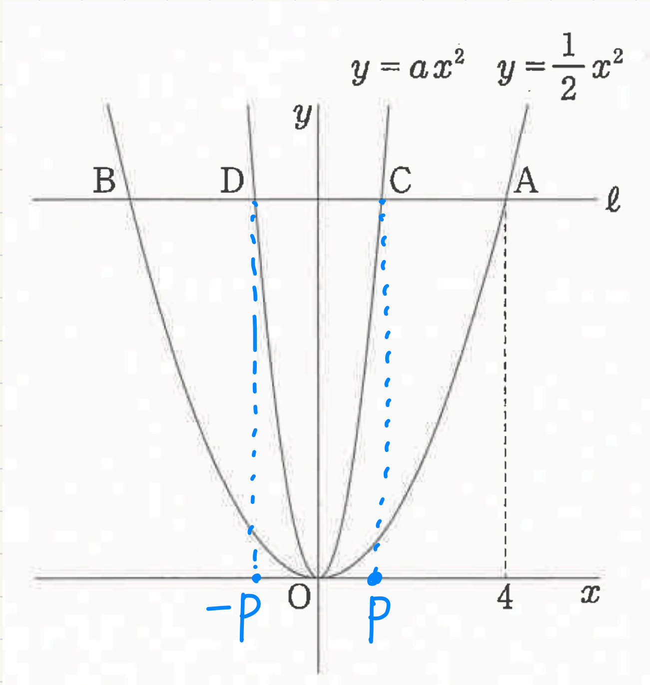


点Aと点Bは y 軸について対称だから, 点Bの x 座標は -4.

点Bは $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあり $x = -4$ だから,

$$y = \frac{1}{2} \times (-4)^2$$
$$= 8 \qquad \therefore B(-4, 8)$$

(2)



(1)より直線ℓは
$y=8$

点Cのx座標をpとすると、
点Cと点Dはy軸について対称だから点Dのx座標は$-p$. よって
$DC = p-(-p) = 2p$

また、$AC = 4-p$ であり、$DC = AC$ より

$$2p = 4-p$$

$$\Leftrightarrow \quad 3p = 4 \qquad \therefore\ p = \frac{4}{3}$$ ⇐ 点Cのx座標

したがって、点Cは$y=ax^2$上にあり、$x=\frac{4}{3}$、$y=8$
だから

$$8 = a \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

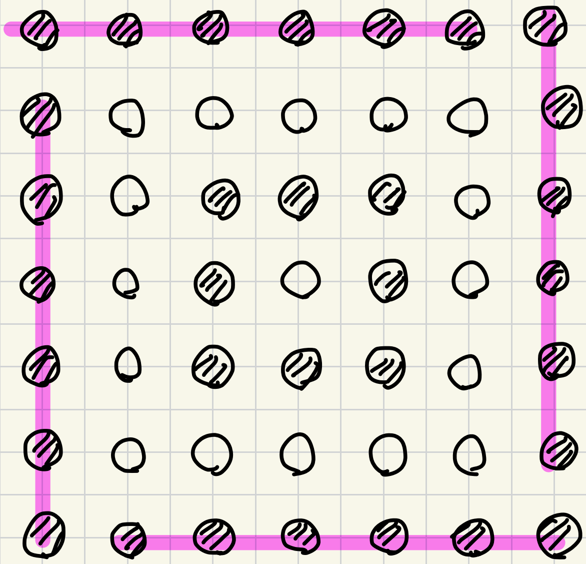
$$\Leftrightarrow \frac{16}{9}a = 8$$

$$\therefore\ a = 8 \times \frac{9}{16}$$

$$= \frac{9}{2}$$

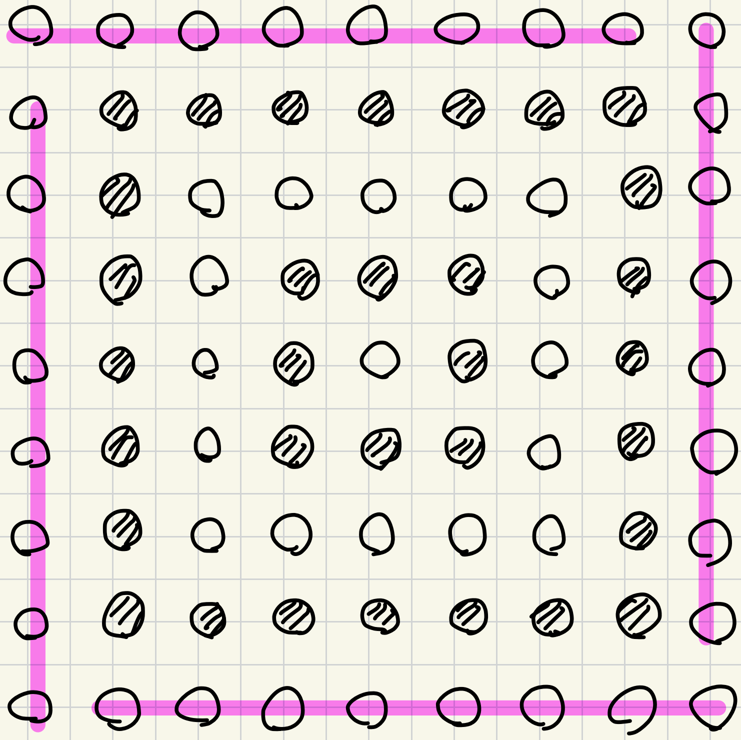
4.

(1) 3回目の操作



⇒ 新たに置く碁石は
6 × 4 = 24個

4回目の操作



⇒ 新たに置く碁石は
8 × 4 = 32個

(2)(ア)

	1回目	2回目	3回目	4回目
新たに置く碁石	×2 8 ‖ 2 × 4	×2 16 ‖ 4 × 4	×2 24 ‖ 6 × 4	×2 32 ‖ 8 × 4

よって、n回目に新たに置く碁石は

$$2\times n\times 4=8n$$

これが88個なので

$$8n=88$$

$$\therefore n=11$$

よって11回目の操作

(イ) 奇数回目の操作 ⇒ 新たに置く碁石は黒
偶数回目の操作 ⇒ 新たに置く碁石は白

11は奇数なので、11回目の操作で置く碁石は黒である。また、11回目までに黒を置くのは

1, 3, 5, 7, 9, 11 回目の操作

2×4　6×4　10×4　14×4　18×4　22×4

よって、黒の碁石の合計は

$$8+24+40+56+72+88=288\text{個}$$

第三問

1.(1) 最も最小値が小さいのはC組なので
記録が速かった生徒がいるのはC組

(2) すべての組の中央値が340秒より小さく
各組において、340秒以内の記録であった生徒が少なくとも20人ずついることが分かるから。

2.

(1) P〜Q：900m を毎分200mで走る.

⇒ P から Q にかかる時間は

$900 \div 200 = 4.5$分

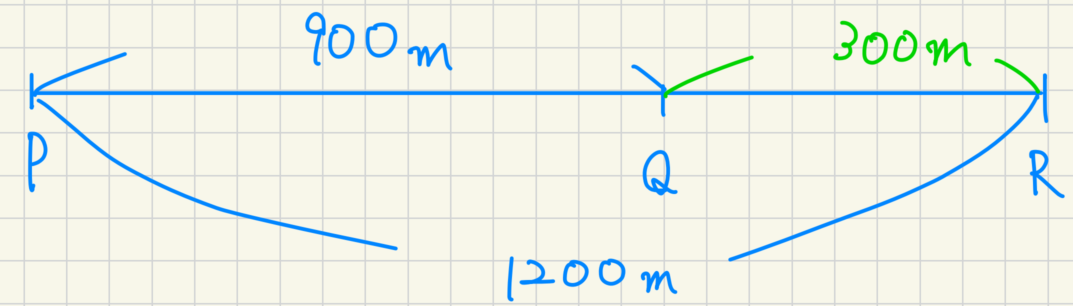
Q〜R：P〜R が 1200m, P〜Q が 900m なので.

Q〜R は $1200 - 900 = 300$m

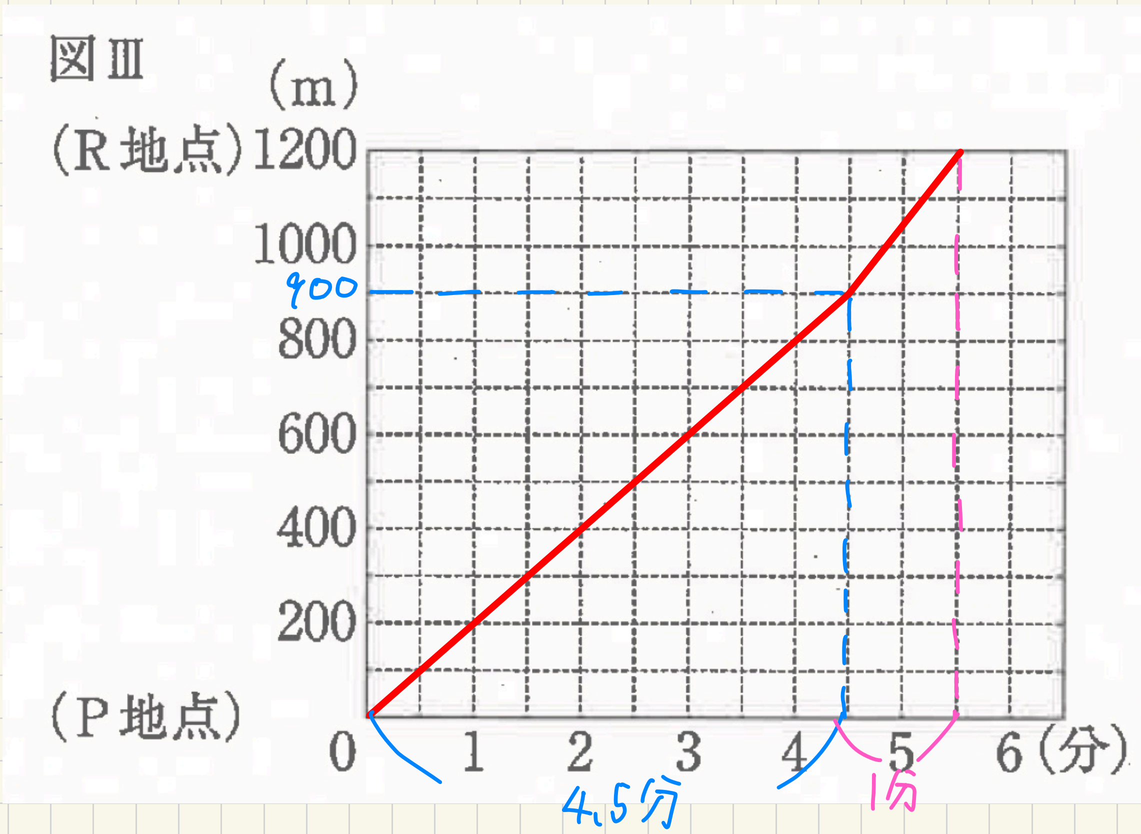
これを毎分300mで走る

⇒ Q から R にかかる時間は

$300 \div 300 = 1$分



よって, グラフは以下の通り



(2)

(ア) (1)より洋平さんがR地点についたのは、5分30秒である。明さんがP地点についたのは、洋平さんがR地点についた30秒後なので、

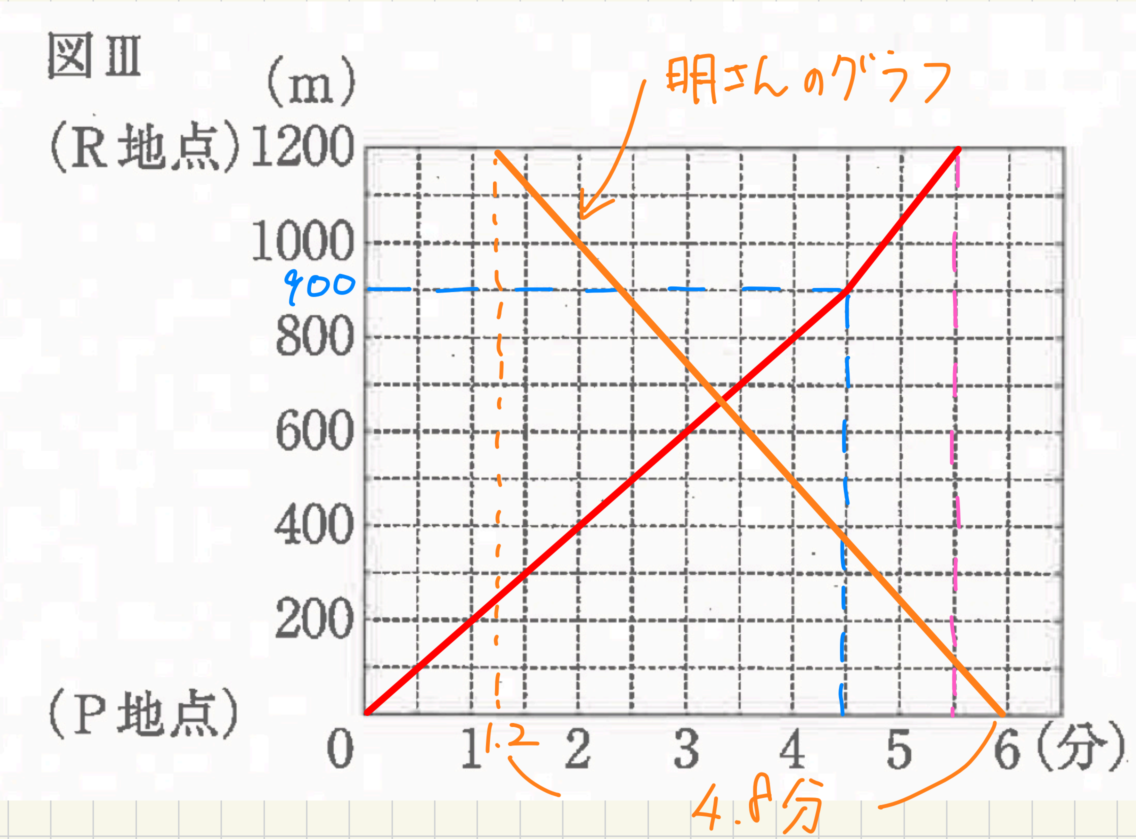
5分30秒 + 30秒 = 6分

また明さんはR〜P：1200m を分速250mで走るから、走る時間は

1200 ÷ 250 = 4.8分

したがって、明さんがR地点を出発したのは、洋平さんがP地点を出発した1.2分後である。

6 − 4.8 = 1.2



グラフから、2人がすれ違うのは、$0 < x < 4.5$ の範囲である。

・洋平さんのグラフ
$0 < x < 4.5$ において，グラフは原点を通るから
$y = ax$ とおくと，$(4.5, 900)$ を通るので
$$900 = 4.5a$$
$$\therefore a = 200$$
したがって，$y = 200x$ —— ①

・明さんのグラフ
$y = mx + n$ とおくと，$(1.2, 1200)$，$(6, 0)$
を通るから
$$1200 = 1.2m + n \quad \text{——②}$$
$$-)\quad 0 = 6m + n \quad \text{——③}$$
$$1200 = -4.8m$$
$$m = -250$$
$m = -250$ を③に代入して
$$0 = 6 \times (-250) + n \qquad \therefore n = 1500$$
したがって，$y = -250x + 1500$ —— ④

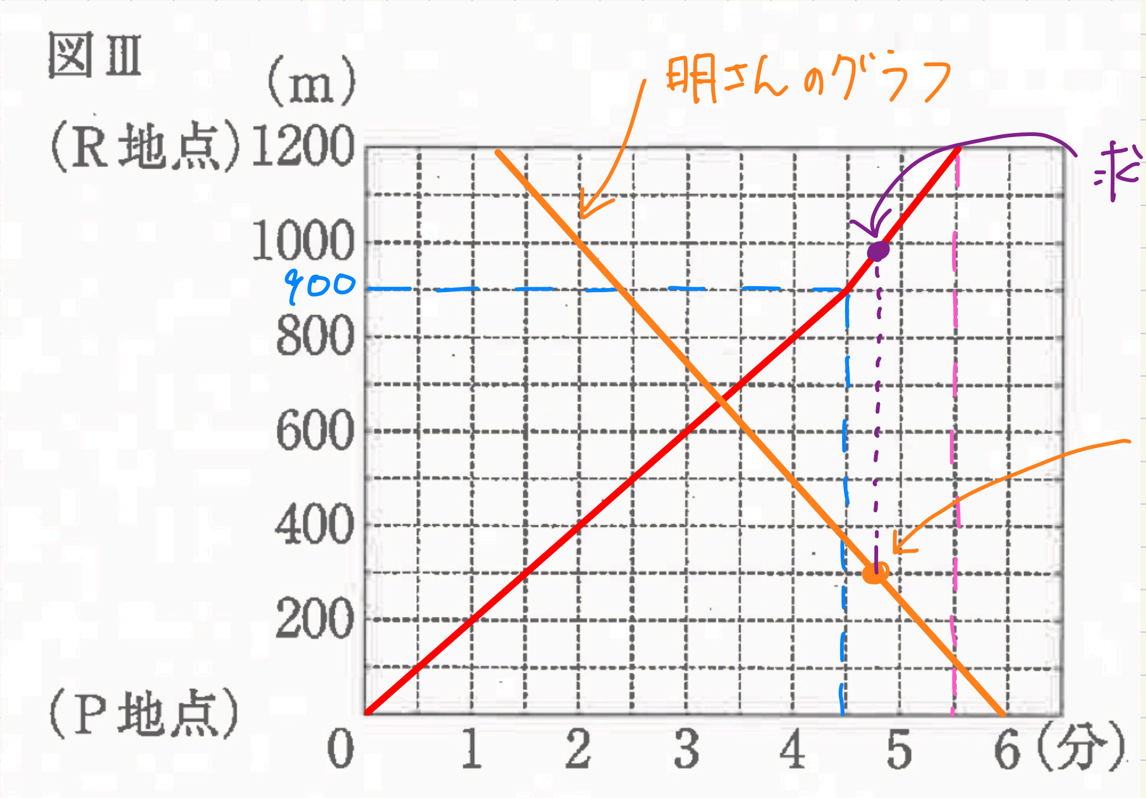
2人がすれ違うのは，①，④を連立させれば良い。
①を④に代入して
$$200x = -250x + 1500$$
$$\Leftrightarrow 450x = 1500$$
$$x = \frac{10}{3}$$
$$= 3\frac{1}{3}$$

$\times\frac{1}{3}$ $\left(\begin{aligned} 1分 &= 60秒 \\ \frac{1}{3}分 &= ?秒 \end{aligned} \right) \times\frac{1}{3}$

$? = 60 \times \frac{1}{3} = 20秒$

したがって、2人がすれ違うのは 3分20秒

(イ)



グラフから，求める値は $4.5 < x < 6$ の範囲である。
このときの洋平さんのグラフを $y = px + q$ とおくと，
$(4.5, 900)$，$(5.5, 1200)$ を通るから

$$900 = 4.5p + q \quad —— ①$$
$$-)\ 1200 = 5.5p + q \quad —— ②$$
$$-300 = -p$$
$$p = 300$$

$p = 300$ を①に代入して

$$900 = 4.5 \times 300 + q$$
$$\therefore q = 900 - 1350$$
$$= -450$$

よって、$y = 300x - 450$

明さんのグラフ：$y = -250x + 1500$ において、
$y = 300$ を代入すると、

$$300 = -250x + 1500$$

$$\Leftrightarrow 250x = 1200$$

$$x = 4.8$$

このとき、洋平さんのいる位置は、$y = 300x - 450$ に $x = 4.8$ を代入して

$$y = 300 \times 4.8 - 450$$
$$= 1440 - 450$$
$$= 990$$

よって、求める値は 990m

第四問

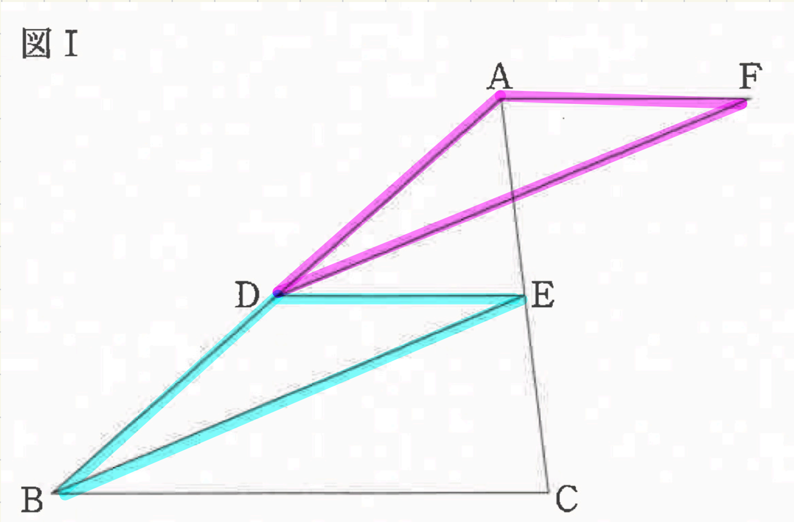
1. 点D、Eは辺AB、ACの中点だから、
中点連結定理より

$$DE = \frac{1}{2} BC$$

$$= \frac{1}{2} \times 10$$

$$= 5\text{ cm}$$

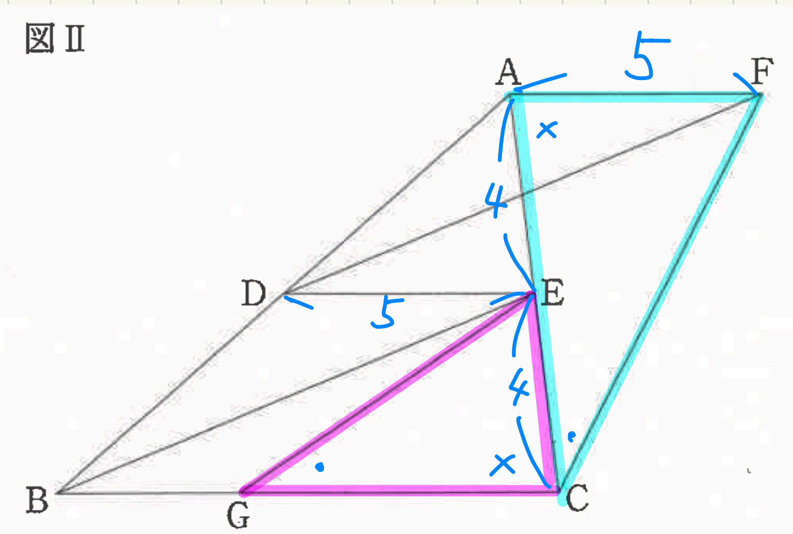
2.



△ADF と △DBE において、
仮定から
AF = DE ——①
点Dは辺ABの中点であるから
AD = DB ——②
仮定から AF // DE で、同位角が等しいから
∠FAD = ∠EDB ——③
①, ②, ③より 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ADF ≡ △DBE （証明終わり）

3.

(1)



△CGE と △ACF において 仮定より
∠CGE = ∠ACF ——①
中点連結定理より
DE // BC
であり、AF // DE より
AF // GC。よって錯角が等しいから
∠GCE = ∠CAE ——②

①、② より2組の角がそれぞれ等しいので.

$\triangle CGE \backsim \triangle ACF$

対応する辺の比は等しいから.

$CG : AC = CE : AF$

ここで、

$AC = 8$,

E は AC の中点 より $CE = 4$

2. より対応する辺の長さは等しいので、$DE = AF$

$\Rightarrow AF = 5$

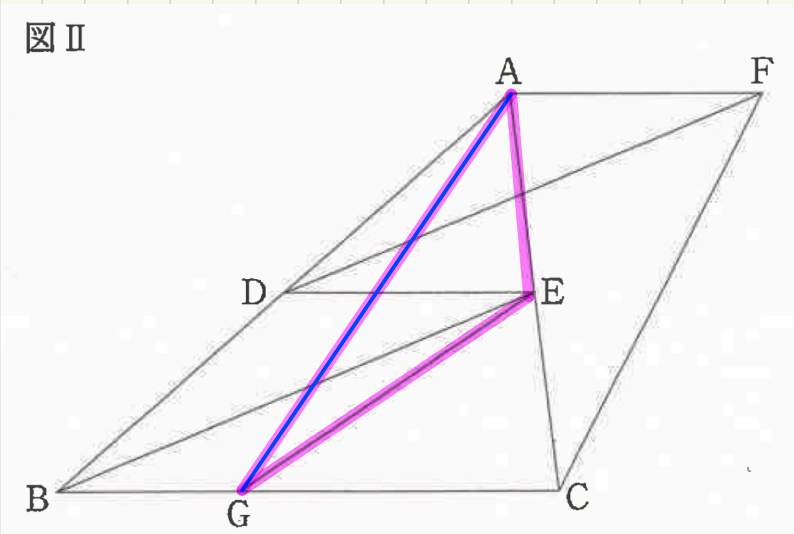
なので

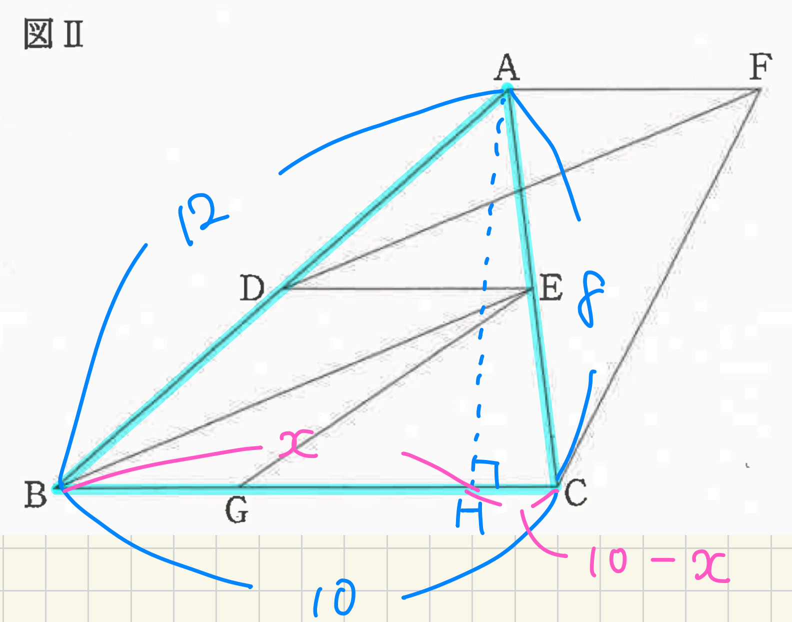
$CG : 8 = 4 : 5$

$\Leftrightarrow \quad 5CG = 32$

$CG = \dfrac{32}{5}$ cm

(2)





AからBCに垂線を下ろした足をHとする。
また、BH = x cm とおくと、
CH = $10-x$ cm

△ABHで三平方の定理より

$$AH^2 = 12^2 - x^2 \quad \text{——} ①$$

△ACHで三平方の定理より

$$\begin{aligned} AH^2 &= 8^2 - (10-x)^2 \\ &= 64 - (100 - 20x + x^2) \\ &= -x^2 + 20x - 36 \quad \text{——} ② \end{aligned}$$

① = ② だから

$$144 - x^2 = -x^2 + 20x - 36$$

$$\Leftrightarrow \quad 20x = 180$$

$$x = 9$$

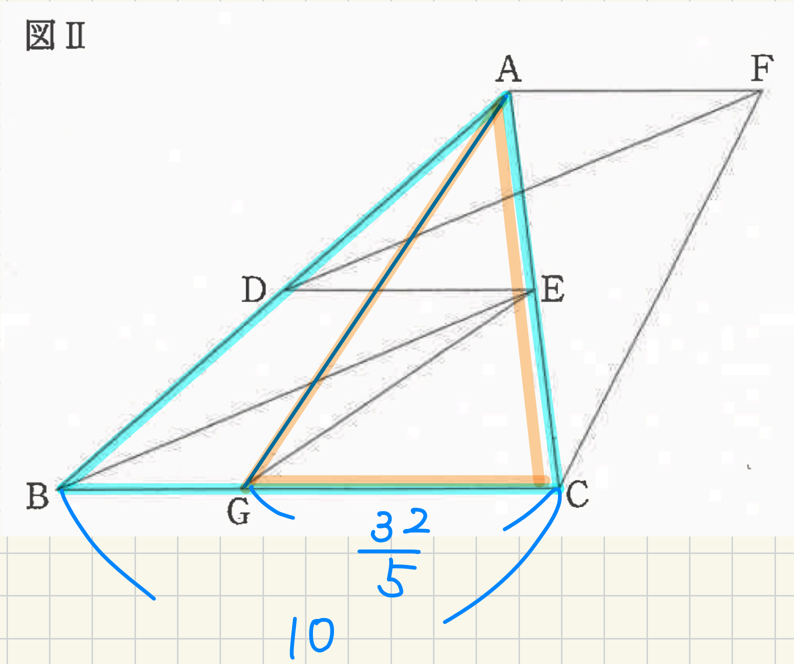
よって

$$AH = \sqrt{12^2 - 9^2} \qquad = \sqrt{144-81}$$

$$= 3\sqrt{7}\ \text{cm} \qquad = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

したがって△ABCの面積は

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 3\sqrt{7} = 15\sqrt{7}\ \text{cm}^2$$



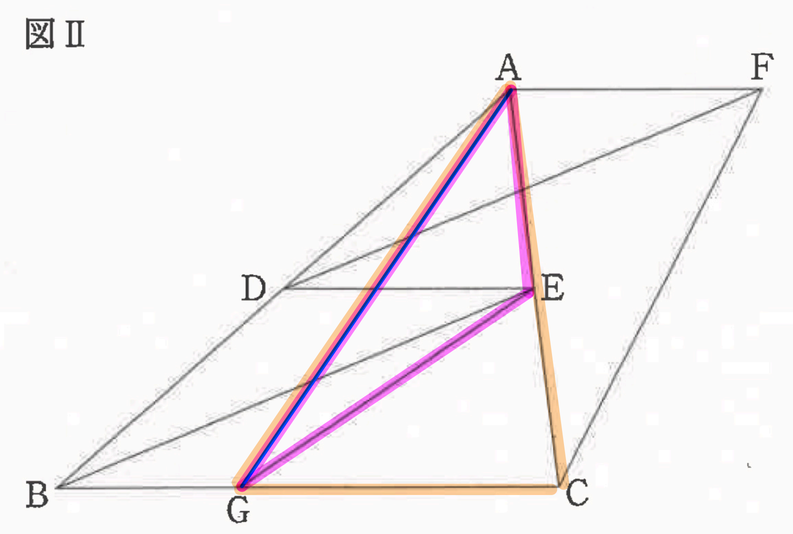
△ABCと△AGCにおいて，底辺をそれぞれBC，GCとすると，高さが等しいので，面積比は，底辺比と等しい。

よって

$$\triangle ABC : \triangle AGC = 10 : \frac{32}{5}$$
$$= 50 : 32$$
$$= 25 : 16$$

$$\Leftrightarrow \quad 25 \times \triangle AGC = 16 \times \triangle ABC$$

$$\therefore \triangle AGC = \frac{16}{25} \times \triangle ABC$$
$$= \frac{16}{25} \times 15\sqrt{7}$$
$$= \frac{48}{5}\sqrt{7} \ \mathrm{cm}^2$$



△AGCと△AGEにおいて，底辺をそれぞれAC，AEとすると，高さが等しいので，面積比は底辺比に等しい。
ここで，EはACの中点だから．

$AC : AE = 2 : 1$

したがって

$\triangle AGC : \triangle AGE = 2 : 1$

$\Leftrightarrow \quad 2 \times \triangle AGE = \triangle AGC$

$\therefore \triangle AGE = \frac{1}{2} \times \triangle AGC$

$= \frac{1}{2} \times \frac{48}{5}\sqrt{7}$

$= \frac{24}{5}\sqrt{7} \text{ cm}^2$