2024年度　島根県

数学

Km Km

第1問題

問1　与式 $= 5 - 12$

$= -7$

問2　与式 $= (2\sqrt{3})^2 - \sqrt{7}^2$

$= 12 - 7$

$= 5$

問3　$3x = 5(x-3)$

$= 5x - 15$

$\Leftrightarrow \quad -2x = -15$

$x = \dfrac{15}{2}$

問4　$2x + 3y = 1$ —— ①

$x - y = 3$ —— ②

① − ②×2 より

$$\begin{array}{rrl} & 2x + 3y &= 1 \\ -) & 2x - 2y &= 6 \\ \hline & 5y &= -5 \end{array}$$

$y = -1$

$y = -1$ を ② に代入して

$x - (-1) = 3$

$\Leftrightarrow \quad x + 1 = 3$

$\therefore \quad x = 2$

よって. $x = 2$, $y = -1$

問5 $(x-2)^2 = 7$

$\Leftrightarrow \quad x-2 = \pm\sqrt{7}$

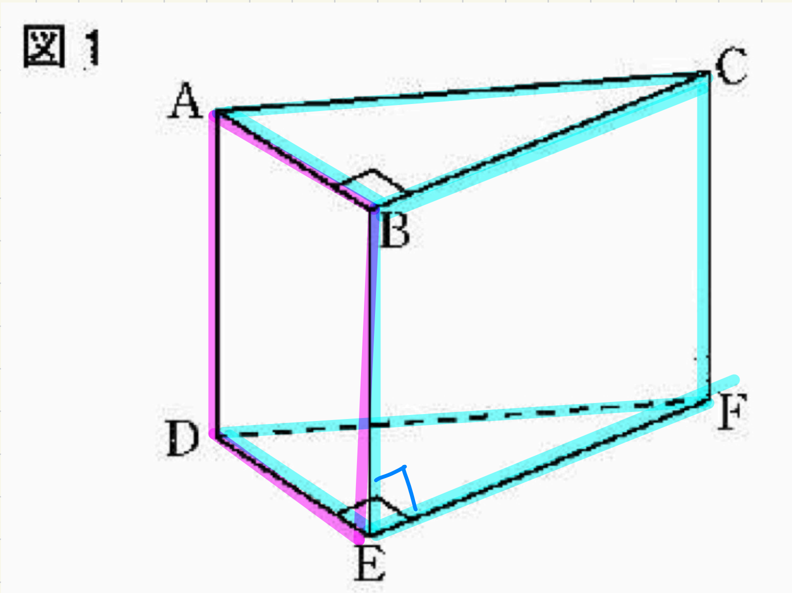
$\therefore \quad x = 2 \pm \sqrt{7}$

問6

1. $y = \dfrac{20}{x}$ $\quad (xy = 20)$

2. $30 - 5a > b$

問7.



□ADEBと垂直な面は.

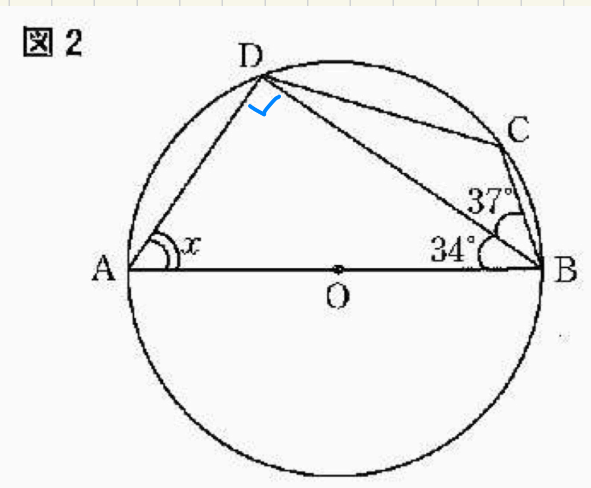
△ABC

△DEF

□BEFC

よって. ア, イ, エ

問8



∠ADBは直径に対する円周角なので. ∠ADB = 90°

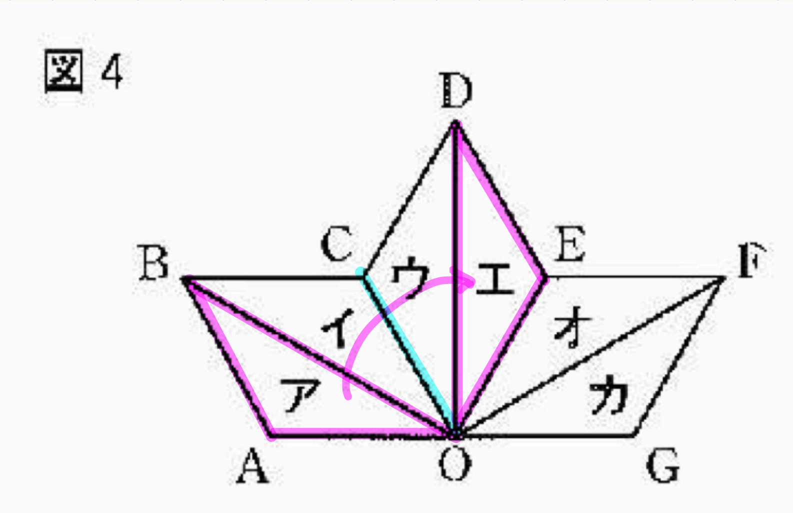
△ABDの内角の和は180°だから

$\angle x = 180° - (90° + 34°)$

$= 56°$

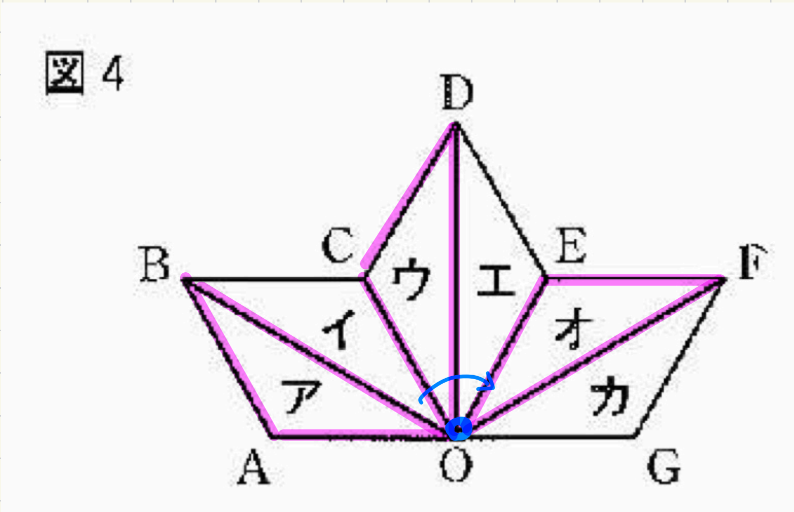
問9

1.



エ

2.



ウ、オ

第二問題

問1

0 〜 5 : 0人

5 〜 10 : 2人

10 〜 15 : 10人

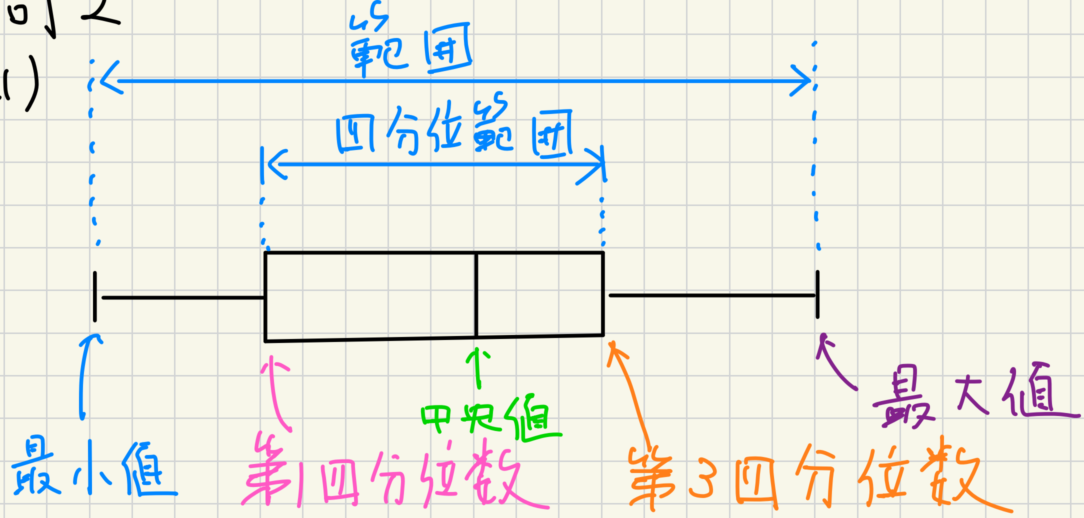
15 〜 20 : 15人

よって、累積度数は

0 + 2 + 10 + 15 = 27人

問2

(1)



ア：2023年度と2018年度の第1四分位数は異なるので誤り

イ：範囲は2023年度の方が大きい
四分位範囲は2023年度の方が大きい。
よって正しい

ウ：箱ひげ図から平均値は分からないので誤り

エ：2013年度の最小値は7画で10画以下の人がいるから誤り

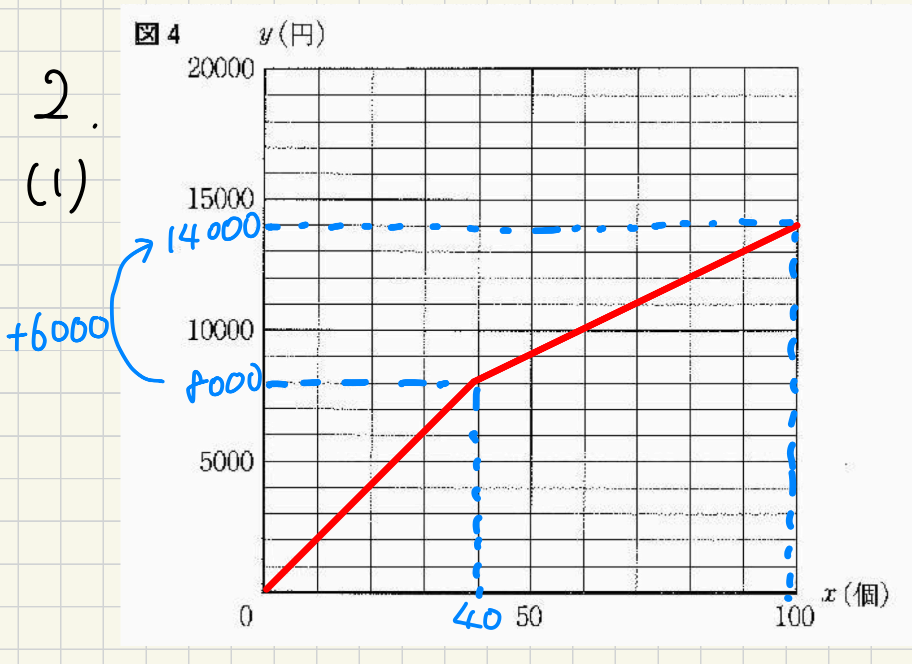
オ：どの年度も中央値は15画以上なので、半数以上は15画以上。よって正しい

よって、イ、オ

(2) 2013年度の最小値は7画なので、
5画以上10画以下である。
ウの最小値は0画以上5画以下なので、
ウは誤り。
※箱ひげ図より2008年度のみ最小値が0画以上5画以下なので、ウは2008年度
また、2013年度と2018年度を比べると、
2013年度の四分位範囲＝13画～18画
⇒13～18画にデータが集中
2018年度の四分位範囲＝13画～21画
⇒13～21画にデータが集中
ア，イを比べると、アの方が13～18画にデータが集中しているので、答えはア

問2
1. グラフから100個で12000円なので、
1個の価格は
12000÷100＝120円

2.
(1)



1～40個は1個200円
⇒40個で8000円

$\underbrace{41～100個}_{60個}$は1個100円

⇒60個で6000円

(2) (1)の販売額の合計は

$$\underbrace{8000}_{1\sim40\text{個}} + \underbrace{6000}_{41\sim100\text{個}} = 14000\text{円}$$

1個200円にして100個売ったときの販売額は

$$200 \times 100 = 20000\text{円}$$

よって

$$14000 - 20000 = -6000$$

より 6000円 少なくなる.

(3) はじめのうちに売った個数をx個とすると,
残りの個数は $100-x$ 個である.

$$200x + 100(100-x) \geqq 12000$$

$$\Leftrightarrow 200x + 10000 - 100x \geqq 12000$$

$$\Leftrightarrow 100x \geqq 2000$$

$$x \geqq 20$$

よって20個以上

第3問題

問1

1. 3枚のカードから1枚引くので,確率は $\frac{1}{3}$

2.

(1)

(ア) 太郎さんがAのカードを引いたとき

太郎さん $= 1^2 = 1$, 花子さん $= 2 \times 3 = 6$

⇒太郎さんの負け

(イ) 太郎さんがBのカードを引いたとき
太郎さん $= 2^2 = 4$、花子さん $= 1 \times 3 = 3$
⇒太郎さんの勝ち

(ウ) 太郎さんがCのカードを引いたとき
太郎さん $= 3^2 = 9$、花子さん $= 1 \times 2 = 2$
⇒太郎さんの勝ち

よって勝ち負けの方法は3通りあり、そのうち太郎さんが勝つのは2通りだから、確率は

$$\frac{2}{3}$$

(2)

(ア) 太郎さんがAのカードを引いたとき
太郎さん $= 1^2 = 1$、花子さん $= 2 \times 4 = 8$
⇒花子さんの勝ち

(イ) 太郎さんがBのカードを引いたとき
太郎さん $= 2^2 = 4$、花子さん $= 1 \times 4 = 4$
⇒引き分け

(ウ) 太郎さんがCのカードを引いたとき
太郎さん $= 4^2 = 16$、花子さん $= 1 \times 2 = 2$
⇒花子さんの負け

よって勝ち負けの方法は3通りあり、そのうち花子さんが勝つのは1通りだから、確率は

$$\frac{1}{3}$$

3. 太郎さんと花子さんの勝つことの起こりやすさが同じになるには、

- 太郎さんの勝ち　1回
- 引き分け　1回
- 花子さんの勝ち　1回

となることである。カードに書かれる数字を小さい順に a, b, c とすると、

$$a < bc, \quad b^2 = ac, \quad c > ab$$

となれば良い。$b^2 = ac$ より $a \times c$ が平方数になる。a, b, c は全て異なる数だから、

$b^2 = ac \Rightarrow a = 1, \ c = b^2$ または $a = b^2, \ c = 1$

であるが、$a < b < c$ より $a = 1, \ c = b^2$ となる必要がある。$b = 3$ とすると、3つの組は $(1, 3, 9)$ であり、

$\underbrace{1^2 < 3 \times 9}_{\text{花子さんの勝ち}}$, $\underbrace{3^2 = 1 \times 9}_{\text{引き分け}}$, $\underbrace{9 > 1 \times 3}_{\text{太郎さんの勝ち}}$

となるから、勝つことの起こりやすさは同じになる。

よって、求める組は $(1, 3, 9)$

問2

1. 表1,2,3より得点の差は a の値の2乗となっているから、カードに書かれた数が a ずつはなれた自然数ならば、太郎さんがBのカードをひいたとき、太郎さんの得点は、花子さんの得点より、いつでも a^2 大きい

2. カードに書かれた a ずつはなれた自然数のうち、Bのカードに書かれた数を n とすると、Aは $n-a$ イ、Cは $n+a$ ウ と表すことができる。太郎さんがBのカードをひいたとき、太郎さんの得点から花子さんの得点をひくと、

(エ) $n^2-(n-a)(n+a)=n^2-(n^2-a^2)$

$$=a^2$$

したがって、カードに書かれた数が a ずつはなれた自然数ならば、太郎さんがBのカードをひいたとき、太郎さんの得点は、花子さんの得点よりいつでも a^2 大きい

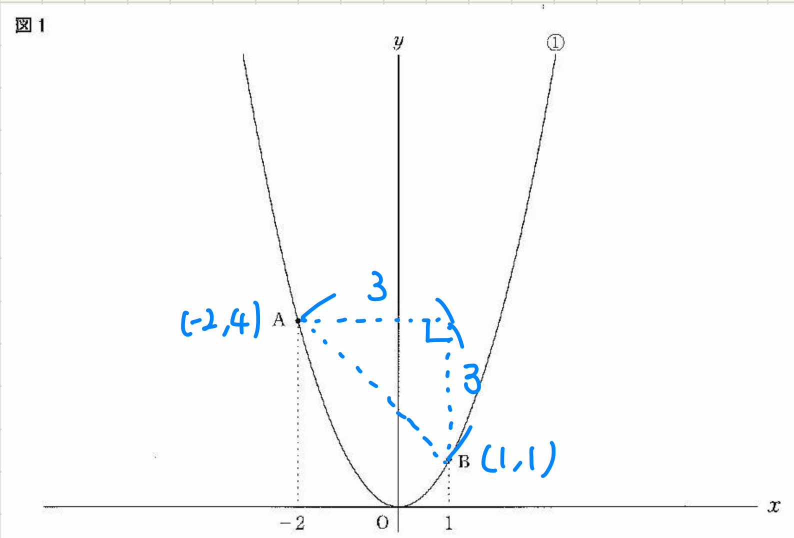
第4問題

問1

1 点Aは $y=x^2$ 上にあり $x=-2$ なので

$$y=(-2)^2$$
$$=4$$

2.



点Bは $y=x^2$ 上にあり、
$x=1$ なので、
$y=1^2$
$=1$ $\therefore B(1,1)$

左図の直角三角形において、三平方の定理より

$AB=\sqrt{3^2+3^2}$ $=\sqrt{9+9}$
$=3\sqrt{2}$ $=\sqrt{18}$ $=3\sqrt{2}$

3. 直線OBの式を $y=ax$ とおくと、B(1,1)を通るから、

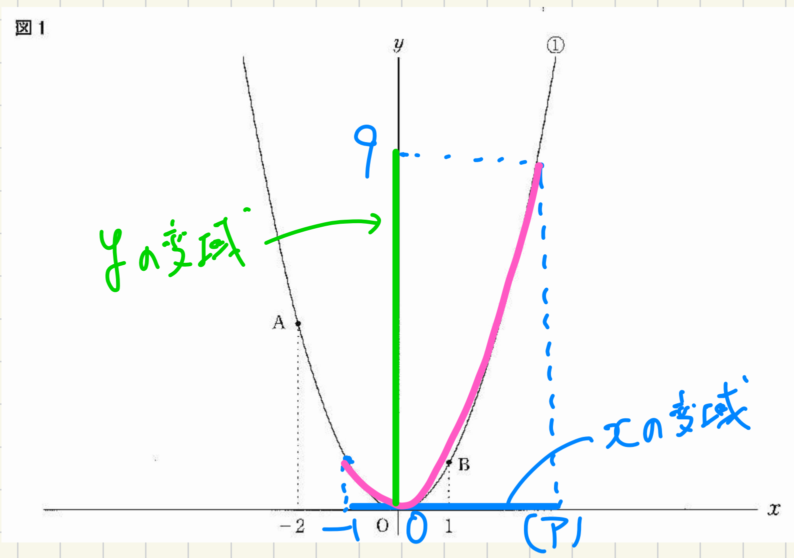
$1=a\times1$ $\therefore a=1$

よって、傾きは1である。 点Aを通る式を $y=x+b$ とおくと、A(−2, 4)を通るから

$4=-2+b$ $\therefore b=6$

よって $y=x+6$

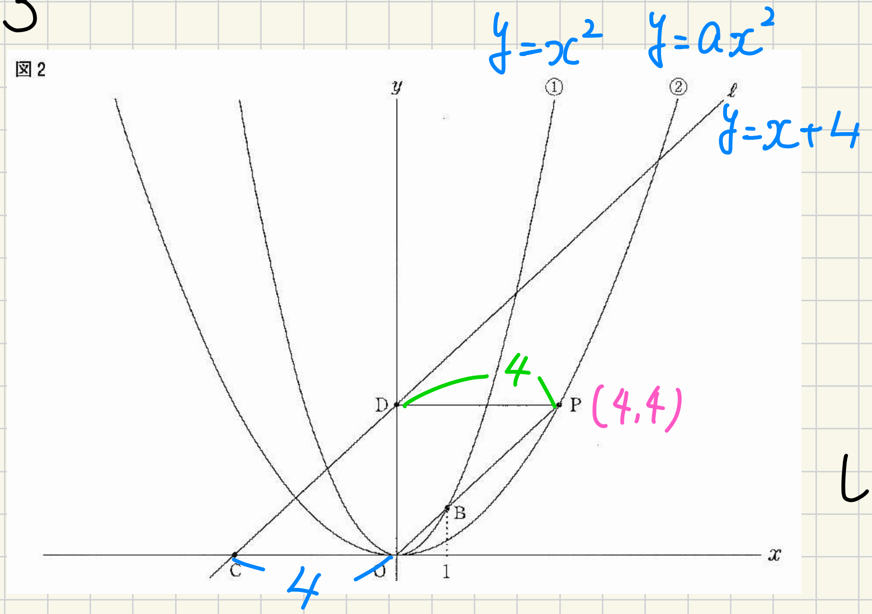
問2



グラフより $y=9$ のとき
$9=x^2$
$\therefore x=\pm3$
(ア)は−1より大きいので、
(ア) $=3$
(イ) $=0$

問3

1.



点Cは $y=x+4$ において、$y=0$ だから

$0=x+4$

$\therefore x=-4$

したがって $CO=4$

□DCOPは平行四辺形だから、$CO=PD$

$\therefore PD=4$

よって、点Pの x 座標は4。また、点Dは $y=x+4$ の y 切片だから $D(0,4)$。点DとPの y 座標は等しいから、Pの y 座標は4。$\therefore P(4,4)$

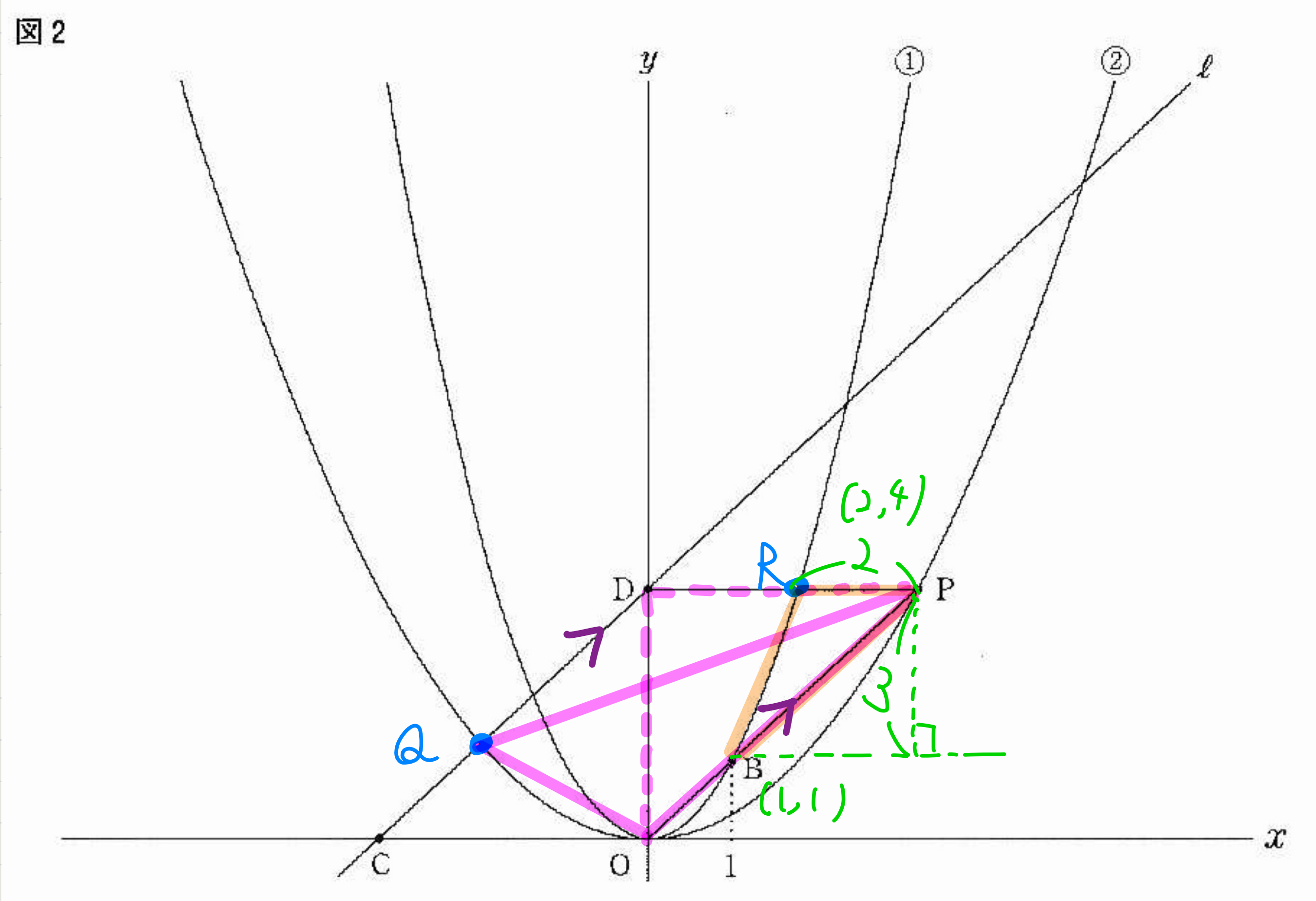
点Pは $y=ax^2$ 上にあり、$x=4$、$y=4$ だから

$$4=a\times4^2$$

$$\Leftrightarrow 16a=4$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

2.



△OPQと△OPDにおいて、底辺をOPとすると、
CD // OPより高さが等しい。
⇒底辺と高さが等しいので、面積も等しい。

$$\triangle OPD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$ より $\triangle OPQ = 8$

また、点RはDP上にあるから、$y=4$。また、
①：$y = x^2$上にあるから

$$4 = x^2 \qquad \therefore x = \pm 2$$

Rのx座標は0より大きいので、$x=2$　∴ R(2, 4)
よって、△BPRの面積は

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

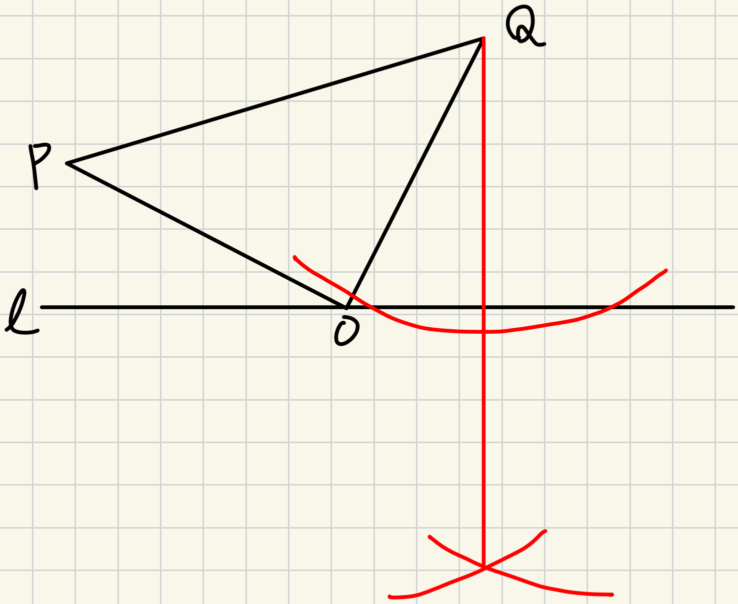
したがって、△OPQ：△BPR = 8：3

第5問題

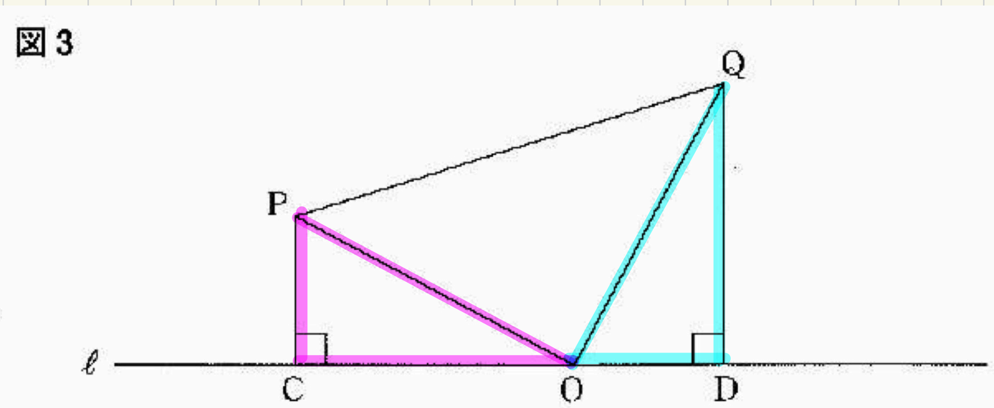
問1　△OPQは△OABを回転した図形だから、
△OPQは OP = OQ、∠POQ = 90° の直角二等辺三角形である。よって
$$\angle OPQ = (180° - 90°) \div 2$$
$$= 45°$$

問2

1.



2.



△PCOと△ODQにおいて、

仮定より

OP = QO ―①

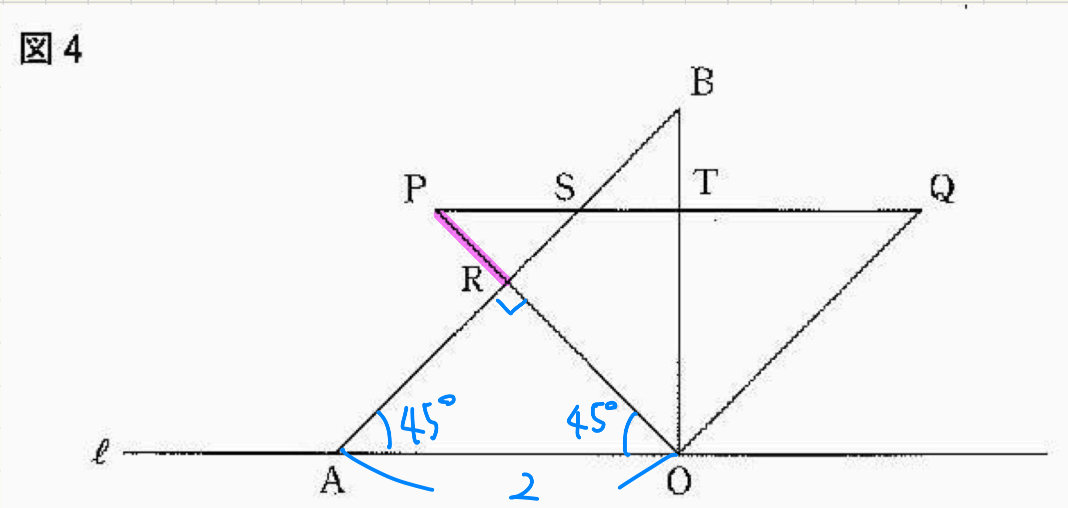
∠PCO = ∠ODQ = 90° ―②

△PCOにおいて、三角形の内角の和は180°だから

∠OPC = 180° − 90° − ∠COP = 90° − ∠COP ―③

3点 C, O, D が一直線上にあるから
$\angle QOD = 180° - 90° - \angle COP = 90° - \angle COP$ — ④
③, ④ より
$\angle OPC = \angle QOD$ — ⑤
①, ②, ⑤ より 直角三角形で, 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから
$\triangle PCO \equiv \triangle ODQ$ (証明終わり)

問3
1.



OA = OP より, OP = 2
また, $\angle BAO = \angle AOP = 45°$ だから
$$\angle ARO = 180° - (45° + 45°) = 90°$$
よって, $\triangle RAO$ は直角二等辺三角形より
$$RA : RO : \underbrace{AO}_{2} = 1 : 1 : \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow RO : 2 = 1 : \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}RO = 2$$

$\therefore RO = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ $= \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

したがって.

$PR = OP - RO$

$= 2 - \sqrt{2}$ cm

2.

図5

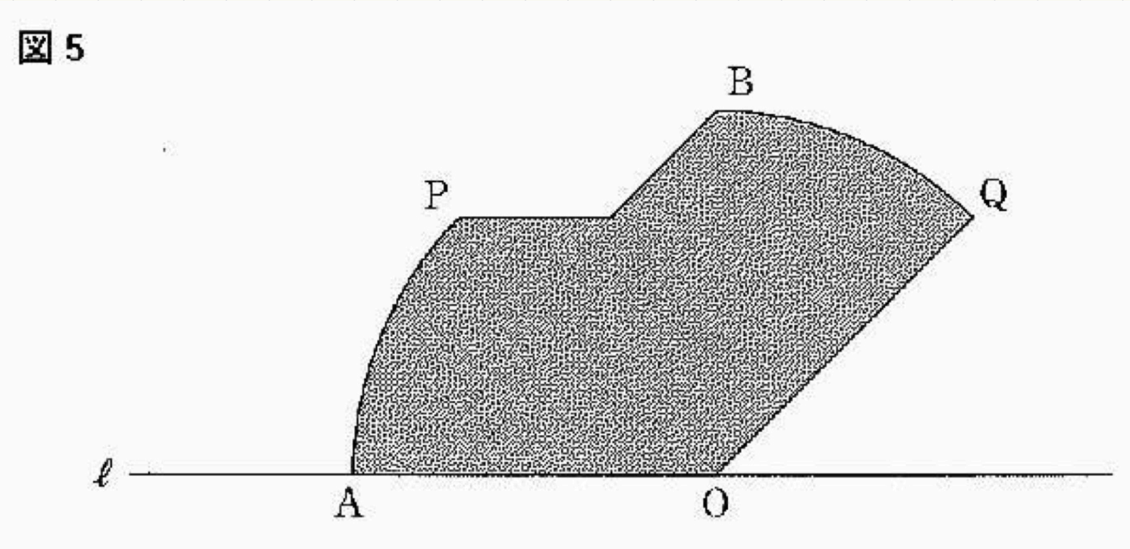
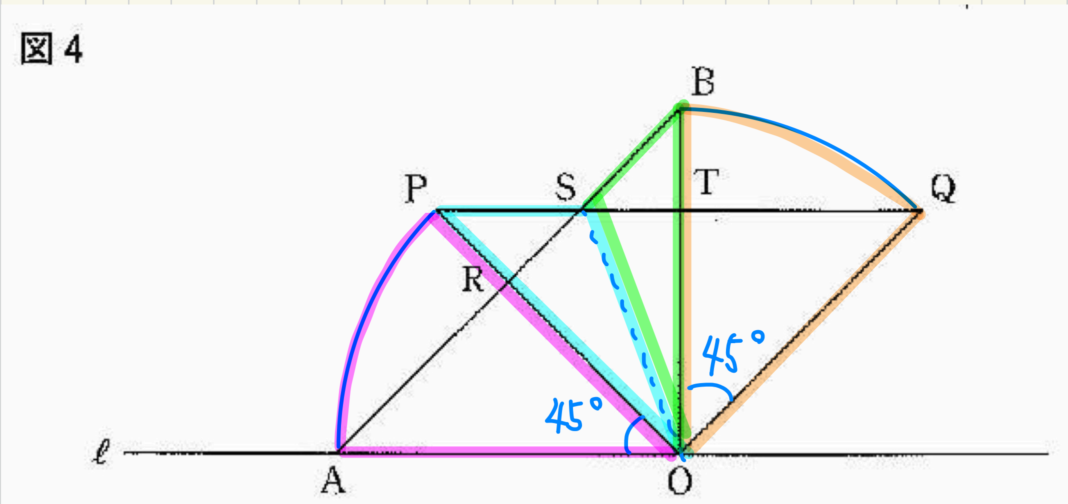


図4



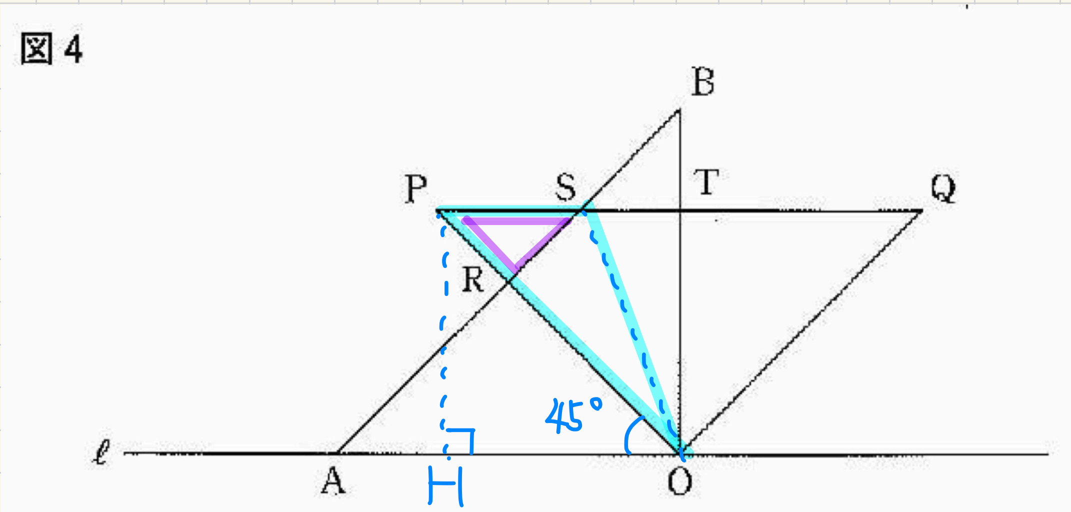
求める面積 = 扇形 OAR + △OPS + △OSB

+ 扇形 OBQ

扇形OAR

$$2\times 2\times \pi\times \frac{45}{360} = 4\pi\times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\pi$$

△OPS



△PRSはRP=RS, ∠PRS=90°の直角二等辺三角形なので.

$$\underbrace{RP}_{2-\sqrt{2}} : RS : PS = 1:1:\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2-\sqrt{2} : PS = 1 : \sqrt{2}$$

$$\therefore PS = \sqrt{2}(2-\sqrt{2})$$

$$= 2\sqrt{2}-2$$

また.Pから直線ℓに垂線を下ろした足をHとすると,
△POHは.∠HPO=∠HOP=45°, ∠PHO=90°
の直角二等辺三角形だから

$$PH : OH : \underbrace{PO}_{2} = 1:1:\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\ PH : 2 = 1 : \sqrt{2}$$

$\therefore \sqrt{2}PH = 2$

$$PH = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

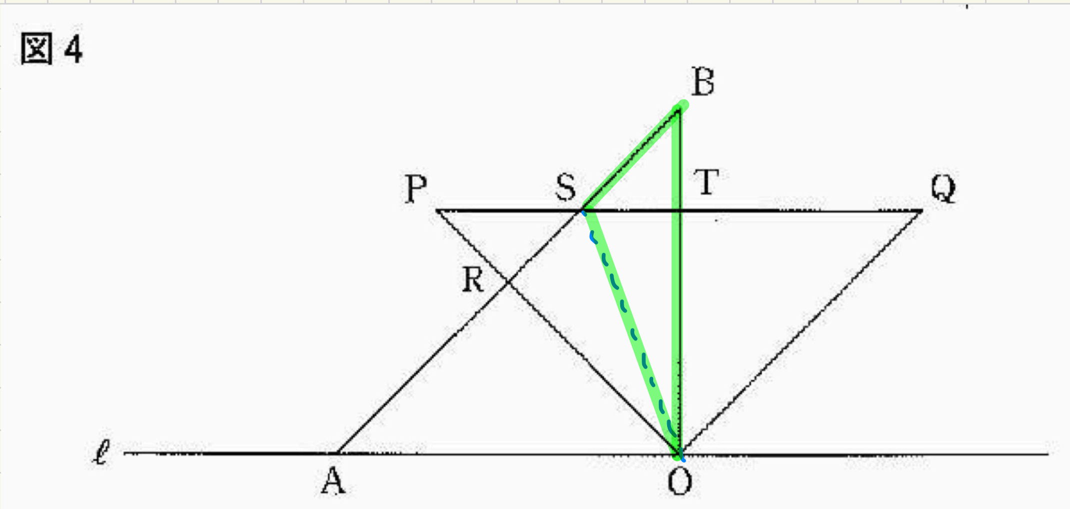
したがって

$$\triangle OPS = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} - 2) \times \sqrt{2}$$

$$= (\sqrt{2} - 1) \times \sqrt{2}$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

△OSB



SOを対称の軸とすると、△OPSと△OSBは線対称だから、$\triangle OPS \equiv \triangle OSB$

$\therefore \triangle OSB = 2 - \sqrt{2}$

扇形OBQ

$$2 \times 2 \times \pi \times \frac{45}{360} = 4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\pi$$

以上より、求める面積は

$$\frac{1}{2}\pi + 2-\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\pi$$

$$= \pi + 4 - 2\sqrt{2} \quad cm^2$$