2024年度　香川県

数学

Km Km

問題1

(1) 与式 $= -14 + 5$

$= -9$

(2) $a^2 + \dfrac{15}{a} = (-3)^2 + \dfrac{15}{-3}$

$= 9 - 5$

$= 4$

(3) 与式 $= 4a^3b^2 \times \dfrac{2}{ab}$

$= 8a^2b$

(4) $\begin{cases} 3x + 5y = 4 & \text{—— ①} \\ x - y = 4 & \text{—— ②} \end{cases}$

① − ② × 3 より

$$\begin{array}{rrr} & 3x + 5y & = 4 \\ -) & 3x - 3y & = 12 \\ \hline & 8y & = -8 \\ & y & = -1 \end{array}$$

$y = -1$ を ② に代入して

$x - (-1) = 4$

$\Leftrightarrow x + 1 = 4$

$\therefore x = 3$

よって、$x = 3$, $y = -1$

(5) 与式 $= 5\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

$= 7\sqrt{2}$

※ $\dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

(6) $A = (x+3)$ とおくと

与式 $= A^2 - A + 30$

$= (A-6)(A+5)$

$A = (x+3)$ より

与式 $= (x+3-6)(x+3+5)$

$= (x-3)(x+8)$

(7) $\sqrt{11}^2 = 11$, $4^2 = 16$ より $11 < 16$

よって $-11 > -16 \Leftrightarrow -\sqrt{11} > -4$

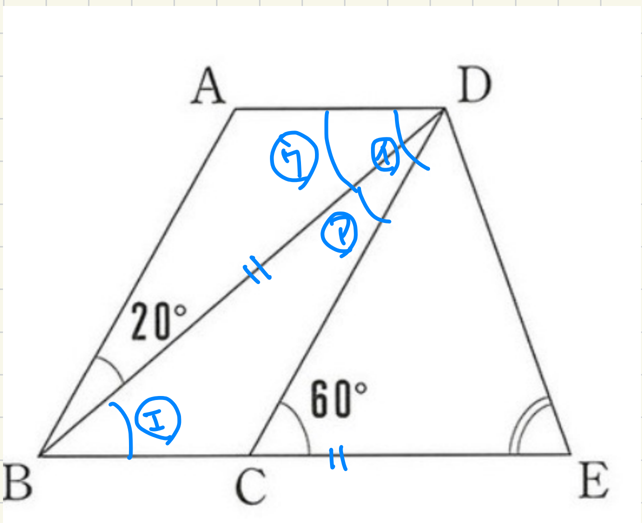
㋑は正の数だから、㋐,㋑,㋒のうち最も大きい数は㋑。よって

$-4 < -\sqrt{11} < 3$

㋒ ㋐ ㋑

問題2

(1)



□ABCDは平行四辺形より

AB // CD、錯角は等しいので、

㋐ $= 20°$

また、AD // BC より AD // CE、錯角は等しいので

①$= 60°$

よって

ウ $=$ イ $-$ ア
$= 60° - 20°$
$= 40°$

AD // BC より錯角が等しいので

エ $=$ ウ
$= 40°$

△BED は BD = BE の二等辺三角形なので
底角が等しいから

$\angle BED = \angle BDE$

$\angle BED = x$ とおくと、$\angle BDE = x$ で、△BED の
内角の和は180°だから

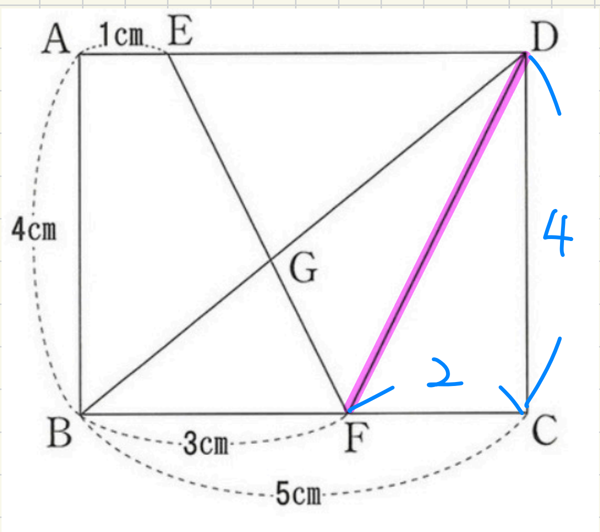
$\underbrace{\text{エ}}_{40°} + x + x = 180°$

$\angle BED = \angle CED$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 140°$
$\therefore x = 70°$ 　　よって $\angle CED = 70°$

(2)

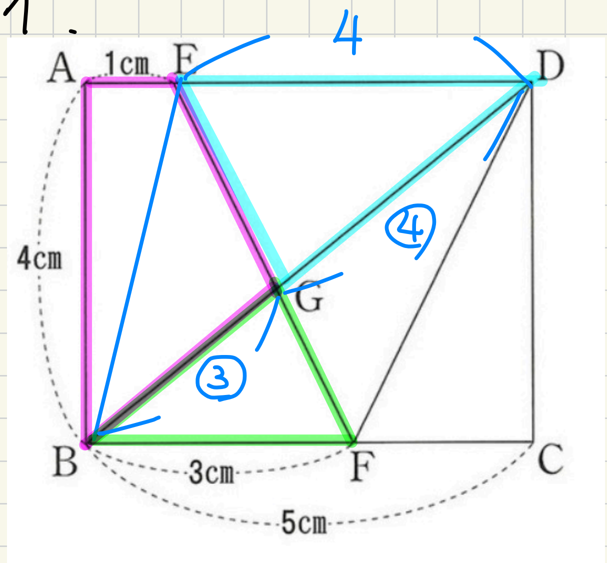
ア.



△DFC で三平方の定理より

$DF = \sqrt{4^2 + 2^2}$ 　$= \sqrt{16+4}$
$= 2\sqrt{5}$ cm 　$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

1.



BEの補助線を引くと、
□ABGE＝△ABE＋△EBG

・△ABEの面積

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2\,cm^2$$

・△EBGの面積

まず、△EBDの面積は

$$\frac{1}{2} \times \underset{ED}{4} \times \underset{AB}{4} = 8\,cm^2$$

△GEDと△GFBにおいて、
ED // FBより錯角が等しいので、

∠GED＝∠GFB ――①

∠GDE＝∠GBF ――②

①、②より2組の角がそれぞれ等しいので、

△GED ∽ △GFB

対応する辺の比は等しいから

GD : GB ＝ ED : FB

＝ 4 : 3

△EBGと△EGDにおいて、底辺をそれぞれBG、GDとすると高さは等しいので、面積比は底辺比と等しい。よって、△EBG : △EGD ＝ 3 : 4 ――③

ここで、$\triangle EBD = \triangle EBG + \triangle EGD$ であるから

$\triangle EGD = \triangle EBD - \triangle EBG$。これを③に代入して

$$\triangle EBG : \underbrace{\triangle EBD}_{8} - \triangle EBG = 3 : 4$$

$$\Leftrightarrow 4 \times \triangle EBG = 3 \times (8 - \triangle EBG)$$

$$= 24 - 3 \times \triangle EBG$$

$$\Leftrightarrow 7 \times \triangle EBG = 24$$

$$\therefore \triangle EBG = \frac{24}{7}$$

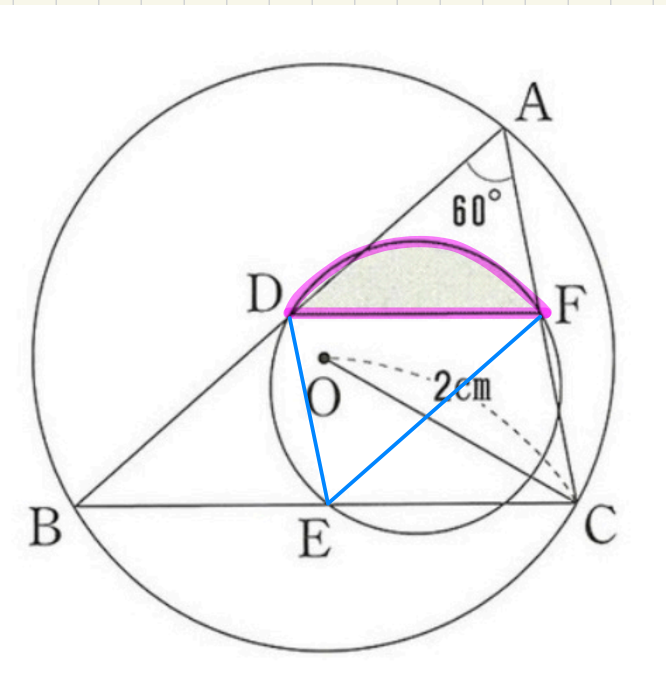
以上より

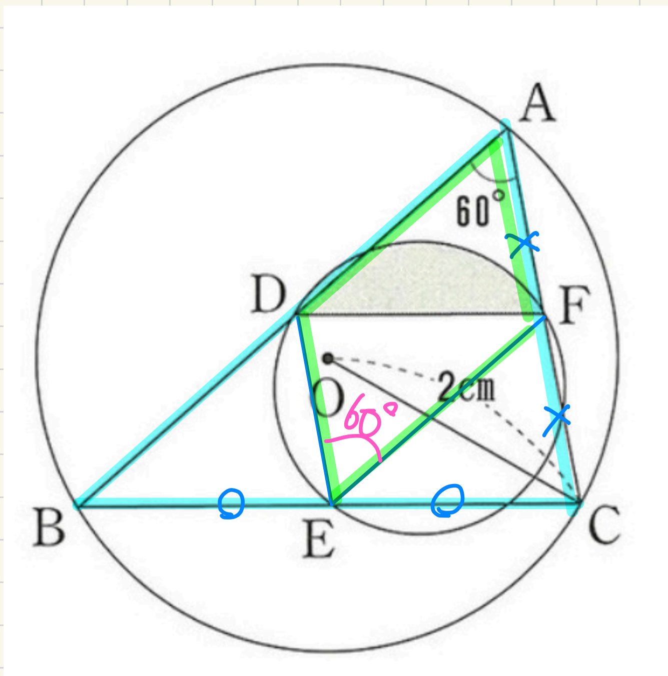
$$\square ABGE = \triangle ABE + \triangle EBG$$

$$= 2 + \frac{24}{7} \qquad = \frac{14}{7} + \frac{24}{7}$$

$$= \frac{38}{7}\ \mathrm{cm}^2 \qquad = \frac{38}{7}$$

(3)





E, F はそれぞれ BC, CA の中点だから.
中点連結定理より

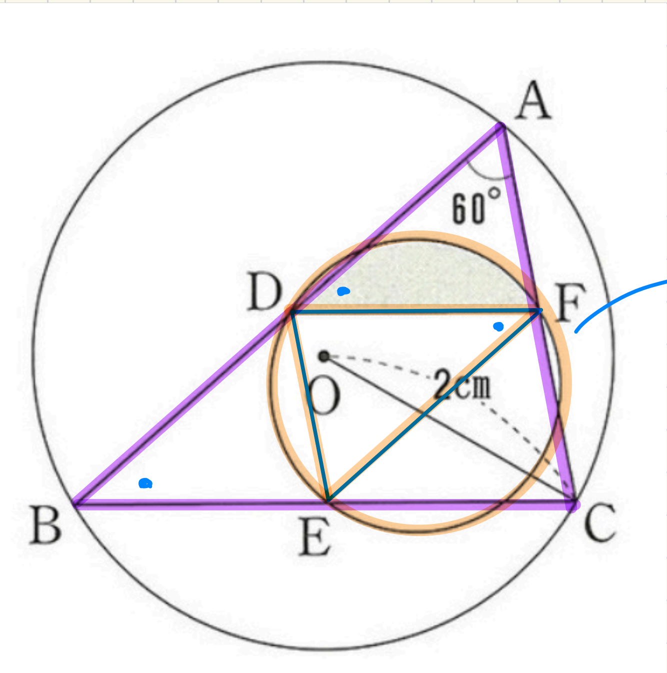
$AB /\!/ EF \quad \therefore AD /\!/ EF$ —— ①

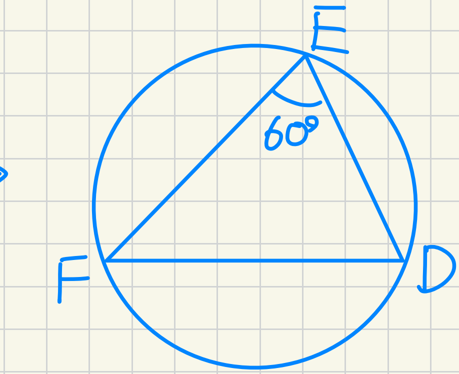
同様に, D, E はそれぞれ AB, BC の中点だから.
中点連結定理より

$AC /\!/ DE \quad \therefore AF /\!/ DE$ —— ②

①, ② より 2組の向かい合う辺が平行だから
▱ADEF は平行四辺形である. よって向かい合う角は等しいから

$\angle DEF = \angle DAF$
$= 60°$





△ABC と △EFD において.

$\angle BAC = FED = 60°$ —— ③

AD // EF より錯角が等しいので.

$\angle ADF = \angle EFD$ —— ④

DF // BC より同位角が等しいので

$\angle ADF = \angle ABC$ —— ⑤

④, ⑤ より

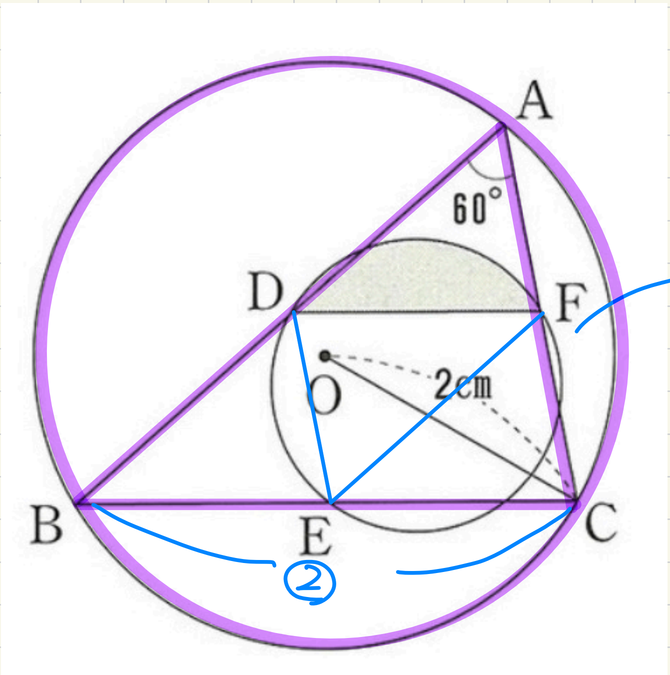
$\angle ABC = \angle EFD$ ―― ⑥

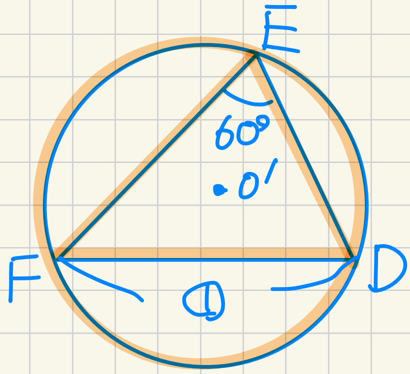
③, ⑥ より2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \backsim \triangle EFD$

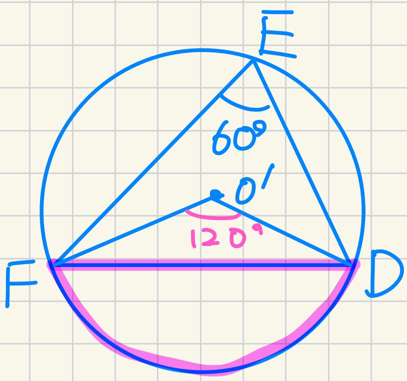
相似比は、BC : DF = 2 : 1 ―― ⑦

中点連結定理





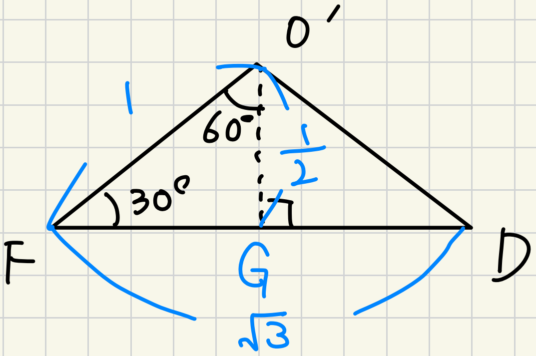
D, E, Fを通る円の中心をO′とすると、
⑦より円Oと円O′の比は2:1であり、円Oの半径は2cmだから、円O′の半径は1cm



$\overset{\frown}{FD}$ に対して円周角と中心角より

$\angle FO'D = 2\angle FED$

$= 120°$



O' から FD に垂線を下ろした足を G とすると、△O'FG は 30°-60°-90° の直角三角形なので、

$$O'G : \underbrace{O'F}_{1} : FG = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

よって

$$O'G : \underbrace{1}_{O'F} = 1 : 2 \iff 2O'G = 1$$

$$\therefore O'G = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{1}_{O'F} : FG = 2 : \sqrt{3} \iff 2FG = \sqrt{3}$$

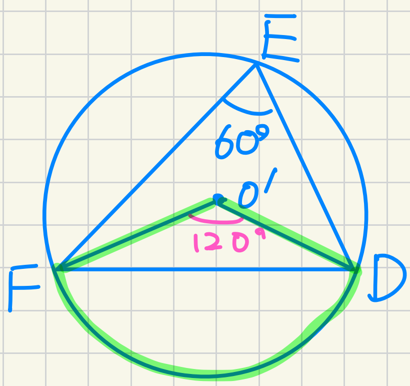
$$\therefore FG = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

$$FD = 2FG = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

以上より △O'FD の面積は

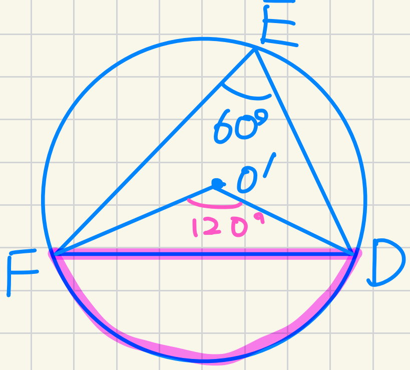
$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



次におうぎ形 O'-FD の面積は

$$1 \times 1 \times \pi \times \frac{120}{360} = \frac{1}{3}\pi$$

したがって求める面積は



(おうぎ形O′FD) − △O′FD

$= \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm²

問題3

(1) 2つのさいころを投げたときの出る目は

6×6 = 36通り

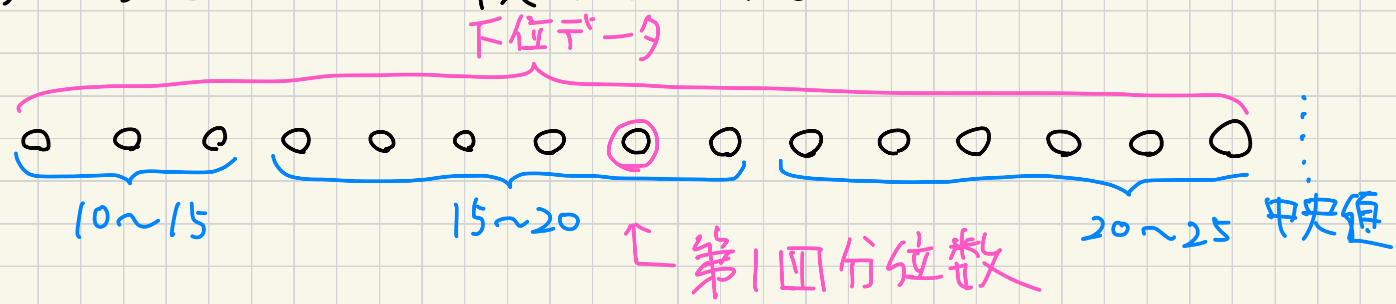
10の約数は 1, 2, 5, 10 だから、積が10の約数となるのは

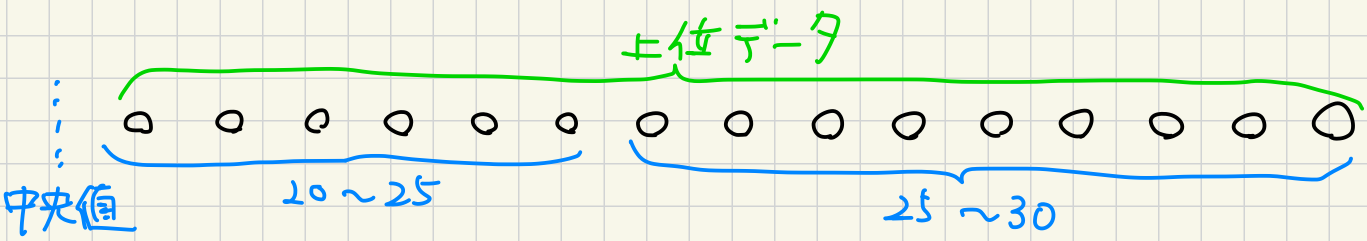
(さいころA, さいころB) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)
(1, 5), (5, 1),
(2, 5), (5, 2)

の7通り　よって求める確率は

$\frac{7}{36}$

(2) データを小さい順に並べると





第1四分位数が含まれる階級は15以上20未満であり、度数は6人だから、相対度数は

$$\frac{6}{30} = 0.2$$

(3)

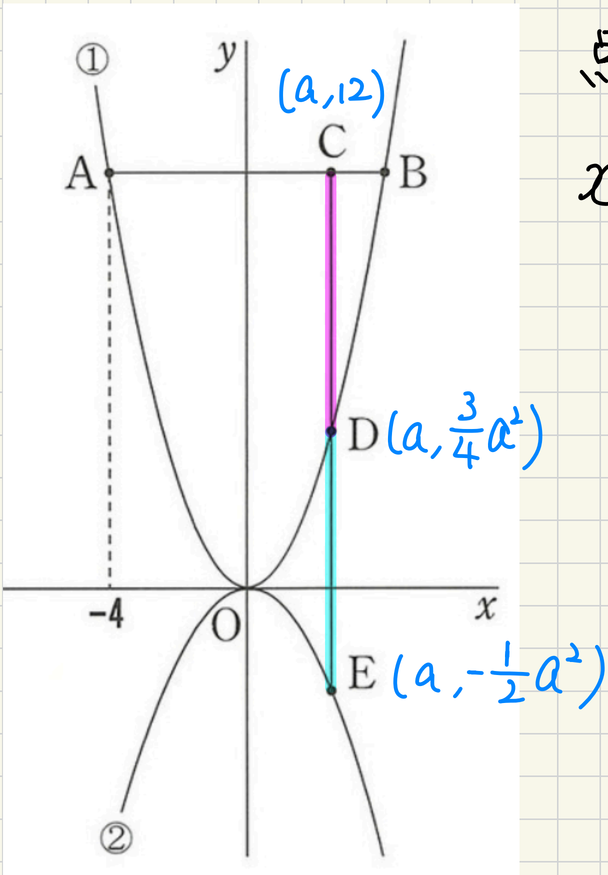
ア. $y = ax^2$ において、x が p から q まで変化するときの変化の割合は $a(p+q)$.

$y = -\frac{1}{2}x^2$ において、x が 1 から 3 まで変化するときの変化の割合は、

$$-\frac{1}{2} \times (1+3) = -\frac{1}{2} \times 4$$

$$= -2$$

イ.



点Aは、$y = \frac{3}{4}x^2$ 上にあり

$x = -4$ だから、

$$y = \frac{3}{4} \times (-4)^2$$

$$= \frac{3}{4} \times 16 = 12$$

$\therefore$ A $(-4, 12)$

点B, Cのy座標と、点Aのy座標は等しいから、
点Cのx座標をaとして、C(a, 12)

また、点Cと点Eのx座標は等しいので、
点Eのx座標＝a、また、点Eは$y=-\frac{1}{2}x^2$上
にあるから

$$y=-\frac{1}{2}a^2 \qquad \therefore E\left(a, -\frac{1}{2}a^2\right)$$

点Cと点Dのx座標は等しいので、点Dの
x座標＝a、また、点Dは$y=\frac{3}{4}x^2$上にあるから、

$$y=\frac{3}{4}a^2 \qquad \therefore D\left(a, \frac{3}{4}a^2\right)$$

以上より

CD＝Cのy座標－Dのy座標

$$=12-\frac{3}{4}a^2$$

DE＝Dのy座標－Eのy座標

$$=\frac{3}{4}a^2-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)$$

$$=\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2$$

$$=\frac{5}{4}a^2$$

CD＝DEより

$$12-\frac{3}{4}a^2=\frac{5}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{4}a^2=12$$

$$\Leftrightarrow 2a^2=12$$

$$\Leftrightarrow a^2=6$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{6}$$

点Cのx座標は正より$a>0$。よって$a=\sqrt{6}$

(4) m, nを整数とすると、2つの奇数は、$2m+1$, $2n+1$と表される。したがって

$$(2m+1)^2+(2n+1)^2+2$$

$$=4m^2+4m+1+4n^2+4n+1+2$$

$$=4m^2+4m+4n^2+4n+4$$

$$=4(m^2+m+n^2+n+1)$$

m^2+m+n^2+n+1は整数だから、2つの奇数をそれぞれ2乗してできた2つの数の和に2を加えた数は4の倍数である。(証明終わり)

問題4

(1) ア. 上の段は列目が偶数のとき黒であり、下の段は列目が3の倍数のとき白である。

$$2024\div2=1012$$

$$2024\div3=674.66\cdots$$

だから、2024は偶数 ⇒ 上の段は黒

2024は3の倍数でない ⇒ 下の段は黒。

よって、㋑、㋓

イ.

(i) 上段は白であるから、nは奇数である。

1	2	3	4	5	….	$n-1$	n	$n+1$
白	黒	白	黒	白	……	黒	白	黒

黒は1個少ない

碁石は$n+1$個

$n+1$列目までの白と黒の碁石の合計は、$n+1$個であり、黒の碁石は半分だから、

$$\frac{n+1}{2}\text{個}$$ …… $n+1$列目までの黒

よって、n列目までの黒の碁石は

$$\frac{n+1}{2}-1=\frac{n+1-2}{2}$$

$$=\frac{n-1}{2}\text{個}$$

また、n列目までの白と黒の碁石の合計は

n個であり、黒の碁石は $\frac{n-1}{2}$ 個だから

白の碁石は

$$n-\frac{n-1}{2}=\frac{2n-n+1}{2}$$
$$=\frac{n+1}{2}\text{個}$$

(ii) 下段は白であるから、nは3の倍数である

$$\underbrace{\begin{matrix}1, & 2, & 3, & \cdots\cdots, & n\\ \text{黒} & \text{黒} & \text{白} & \cdots\cdots & \text{白}\end{matrix}}_{n\text{個}}$$

n列目までの白と黒の碁石の合計はn個であり
白の碁石は全体の$\frac{1}{3}$だから$\frac{1}{3}n$個　よって
黒の碁石は

$$n-\frac{1}{3}n=\frac{2}{3}n\text{個}$$

(i)(ii)より上段と下段の碁石の合計は、

$$\text{白の碁石}=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{3}n=\frac{3n+3+2n}{6}$$
$$=\frac{5n+3}{6}\text{個}$$

$$\text{黒の碁石}=\frac{n-1}{2}+\frac{2}{3}n=\frac{3n-3+4n}{6}$$
$$=\frac{7n-3}{6}$$

白：黒 $= 8:11$ より

$$\frac{5n+3}{6} : \frac{7n-3}{6} = 8:11$$

$$\Leftrightarrow 5n+3 : 7n-3 = 8:11$$

$$\Leftrightarrow 11\times(5n+3) = 8\times(7n-3)$$

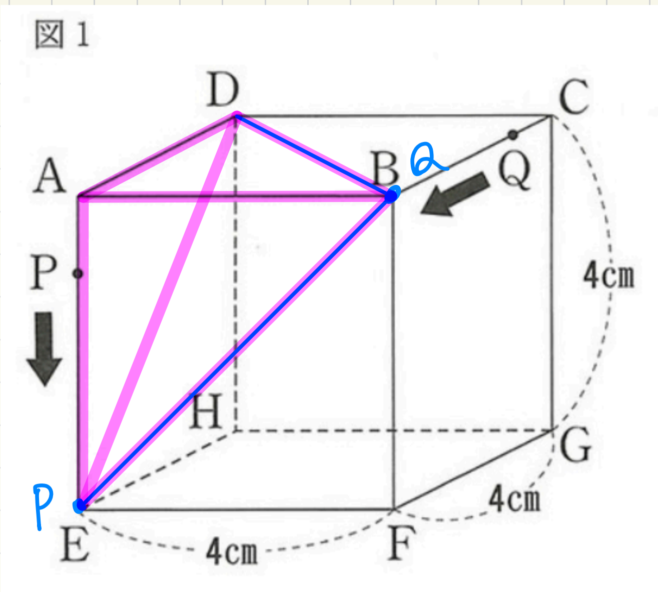
$$\Leftrightarrow 55n+33 = 56n-24$$

$$\therefore n = 57$$

nは奇数であり、3の倍数でもあるから、$n=57$は条件を満たす。よって、$n=57$

(2)

ア



4秒後は、

点Pは点Eに

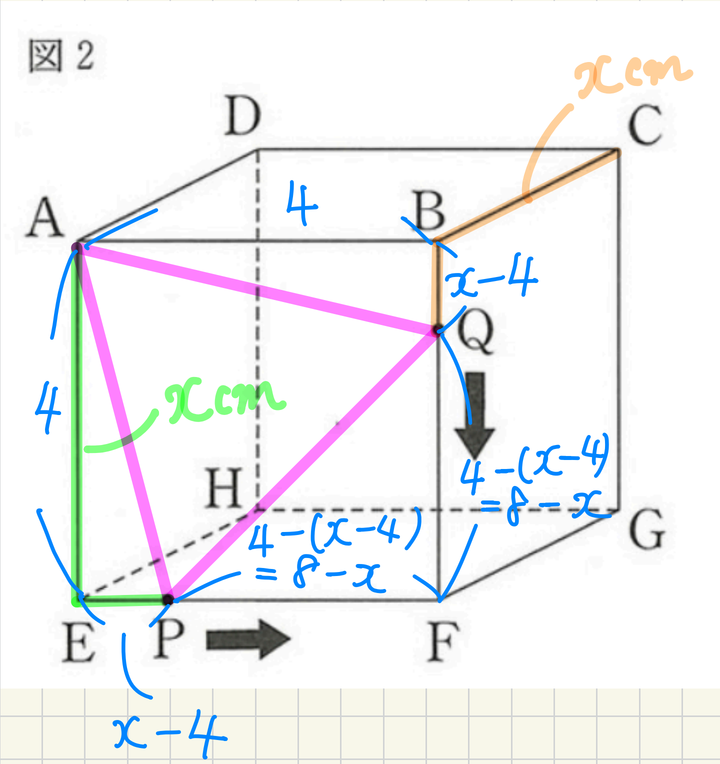
点Qは点Bに

いる。△APQを底面、ADを高さとして求める体積は

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times4\times4}_{\triangle APQ}\times\underbrace{4}_{AD}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{32}{3}\text{cm}^3$$

イ.



$4 < x < 8$ のとき
点Pは辺EF上
点Qは辺BF上
にある。

$\triangle APQ = \square AEFB - \triangle AEP - \triangle PFQ - \triangle AQB$

ここで、

$AP = x\,\text{cm},\ CQ = x\,\text{cm}$ より

$EP = \underbrace{x-4}_{AP-AE},\quad PF = \underbrace{4-(x-4)}_{EF-EP} = 8-x$

$BQ = \underbrace{x-4}_{CQ-CB},\quad QF = \underbrace{4-(x-4)}_{BF-BQ} = 8-x$

であるから、

$$\triangle APQ = \underbrace{4\times4}_{\square AEFB} - \underbrace{\frac{1}{2}\times4\times(x-4)}_{\triangle AEP} - \underbrace{\frac{1}{2}\times(8-x)(8-x)}_{\triangle PFQ}$$
$$- \underbrace{\frac{1}{2}\times4\times(x-4)}_{\triangle AQB}$$

$$= 16 - 2(x-4) - \frac{1}{2}(8-x)^2 - 2(x-4)$$

$$= 16 - 2x + 8 - \frac{1}{2}(64 - 16x + x^2) - 2x + 8$$

$$= 16 - 2x + 8 - 32 + 8x - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 8$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 4x$$

ウ

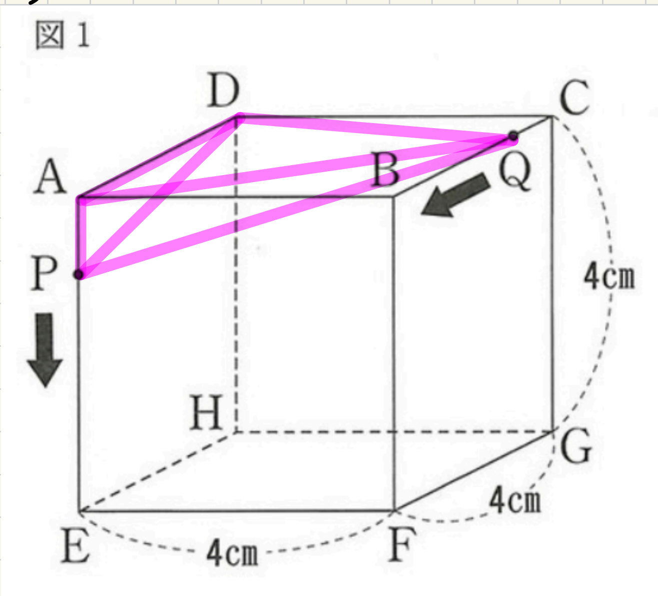


図 1

P, Qが同時に出発してから1秒後の三角すいAPQDの体積は

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times 4\times 1}_{\triangle APD}\times\underbrace{4}_{DC}\times\frac{1}{3}$$

$$= \frac{8}{3}\,\mathrm{cm}^3 \quad\text{——}\quad ①$$

4<x<8のとき、P、Qが同時に出発してからx秒後の三角すいAPQDの体積は

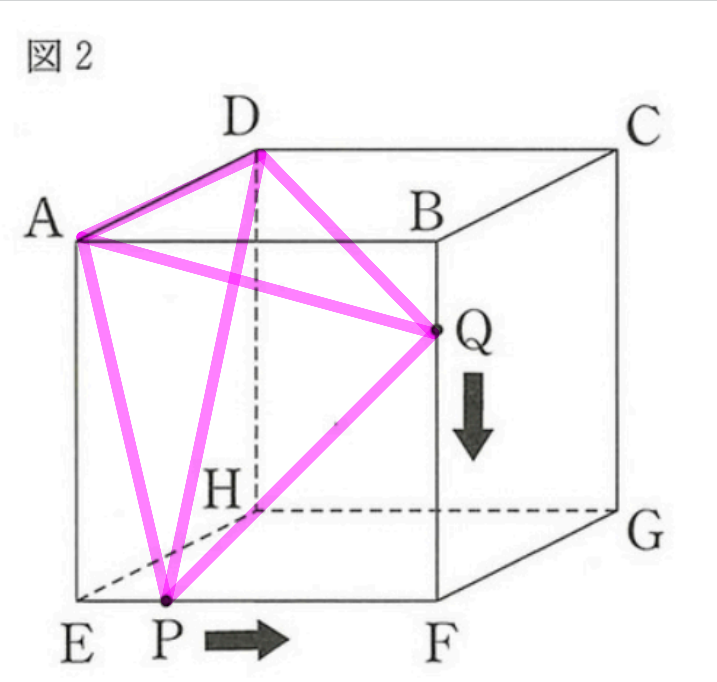


図 2

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2+4x\right)}_{\triangle APQ\ (イより)}\times\underbrace{4}_{AD}\times\frac{1}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}x \quad\text{—}\quad ②$$

※ □AEFB⊥ADで、△APQは□AEFB内にあるから、△APQ⊥AD

よって、△APQを底面、ADを高さとして考える

①＝② より

$$\frac{8}{3} = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$$

解の公式 より

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{2} \qquad = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} \qquad = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4 \pm 2\sqrt{3}$$

ここで. $4 < x < 8$ より $x = 4 + 2\sqrt{3}$

注 $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$ より

$$4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2 \times 1.73 = 7.46$$
$$4 - 2\sqrt{3} = 4 - 2 \times 1.73 = -0.54$$

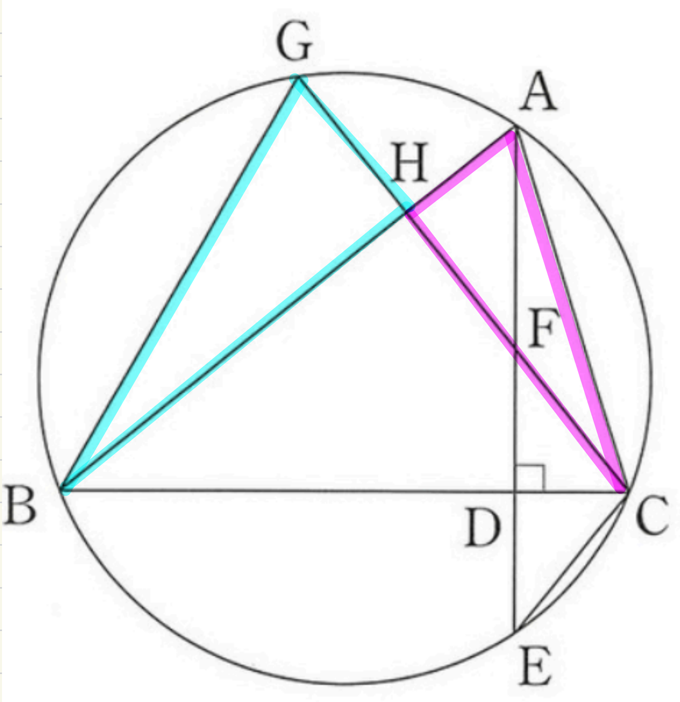
であり. $4 < x < 8$ から

$4 + 2\sqrt{3}$ は 条件を満たす

$4 - 2\sqrt{3}$ は 条件を満たさない

問題5

(1)



△ACHと△GBHにおいて、

対頂角は等しいから

∠AHC＝∠GHB ―― ①

$\overset{\frown}{AG}$に対する円周角は等しいから

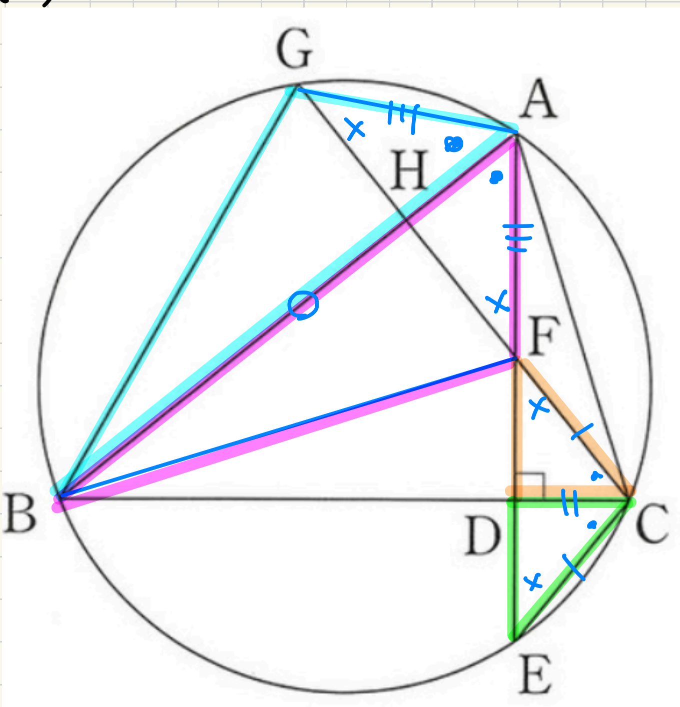
∠ACH＝∠GBH ―― ②

①、②より2組の角がそれぞれ等しいので、

△ACH∽△GBH

(証明終わり)

(2)



△CDEと△CDFにおいて、

共通な辺は等しいから

CD＝CD ―― ①

仮定より

CE＝CF ―― ②

∠CDE＝∠CDF＝90° ―― ③

①、②、③より直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから

△CDE≡△CDF

対応する角は等しいから

$\angle DCE = \angle DCF$ —— ④

$\angle CED = \angle CFD$ —— ⑤

$\triangle ABF$ と $\triangle ABG$ において

共通な辺は等しいから

$AB = AB$ —— ⑥

$\overset{\frown}{BE}$ に対する円周角は等しいから

$\angle BAF = \angle DCE$ —— ⑦

$\overset{\frown}{BG}$ に対する円周角は等しいから

$\angle BAG = \angle DCF$ —— ⑧

④，⑦，⑧より

$\angle BAF = \angle BAG$ —— ⑨

対頂角は等しいから

$\angle AFG = \angle CFD$ —— ⑩

$\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角は等しいから

$\angle AGF = \angle CED$ —— ⑪

⑤，⑩，⑪より

$\angle AGF = \angle AFG$ —— ⑫

⑫より2つの角が等しいから $\triangle AFG$ は二等辺三角形なので

$AF = AG$ —— ⑬

⑥，⑨，⑬より2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABF \equiv \triangle ABG$ （証明終わり）