2025年度 大阪府
数学 C問題

kmkm

1.

(1) x^2-4x+6 に $x=2-\sqrt{2}$ を代入して

$$(2-\sqrt{2})^2-4\times(2-\sqrt{2})+6$$
$$=2^2-2\times2\times\sqrt{2}-\sqrt{2}^2-4+4\sqrt{2}+6$$
$$=4-4\sqrt{2}-2-4+4\sqrt{2}+6$$
$$=4$$

(2) 与式 $=(3x+y)^2-(3x+y)-2$

$A=3x+y$ とおくと

$$A^2-A-2=(A+1)(A-2)$$

$A=3x+y$ より

与式 $=(3x+y+1)(3x+y-2)$

(3) $\begin{cases} x+ay=4-2b \\ bx+y=2a \end{cases}$ に $x=5,\ y=-1$ を代入して

$5-a=4-2b \iff -a+2b=-1$ —— ①

$5b-1=2a \iff 2a-5b=-1$ —— ②

① $\times2+$ ② より

$$\begin{array}{rr} & -2a+4b=-2 \\ +) & 2a-5b=-1 \\ \hline & -b=-3 \end{array}$$

$\therefore b=3$

$b=3$ を ① に代入して

$-a+6=-1 \iff -a=-7 \quad \therefore a=7$

よって

$a=7,\ b=3$

(4) $2\sqrt{n} = \sqrt{4n}$, $3\sqrt{n} = \sqrt{9n}$ であり 2乗すると

$4n < x < 9n$

・$n=1$ のとき

$4, \underbrace{5, 6, 7, 8}, 9$

条件を満たすxは4個 ⇒ $9-4-1=4$

・$n=2$ のとき

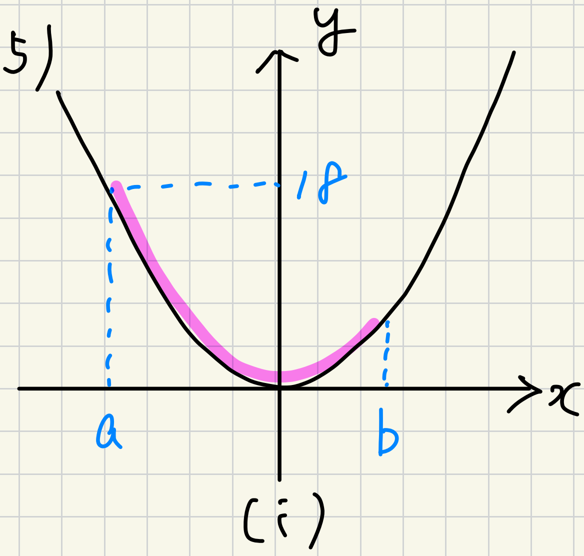
$8, \underbrace{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}, 18$

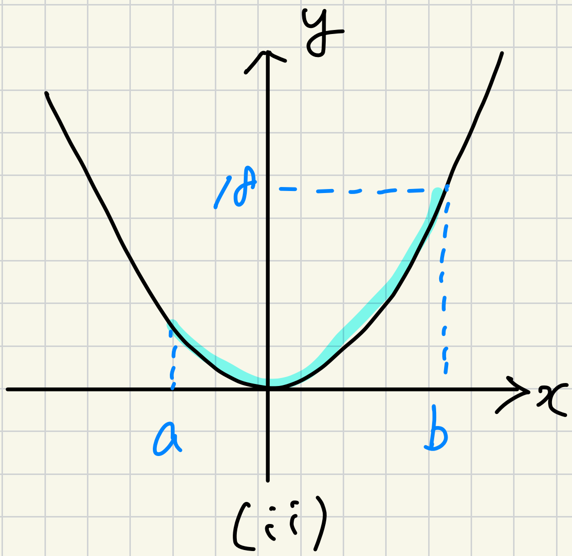
条件を満たすxは9個 ⇒ $18-8-1$
$=9$

よって、$4n < x < 9n$ を満たすxの個数は、

$9n - 4n - 1 = 5n-1$ 個

(5)





$0 \leqq y \leqq 18$ を満たすのは、上図の(i)または(ii)

(i) のとき

$18 = \frac{1}{2}a^2 \iff a^2 = 36 \quad \therefore a = \pm 6$

$a<0$ より $a=-6$

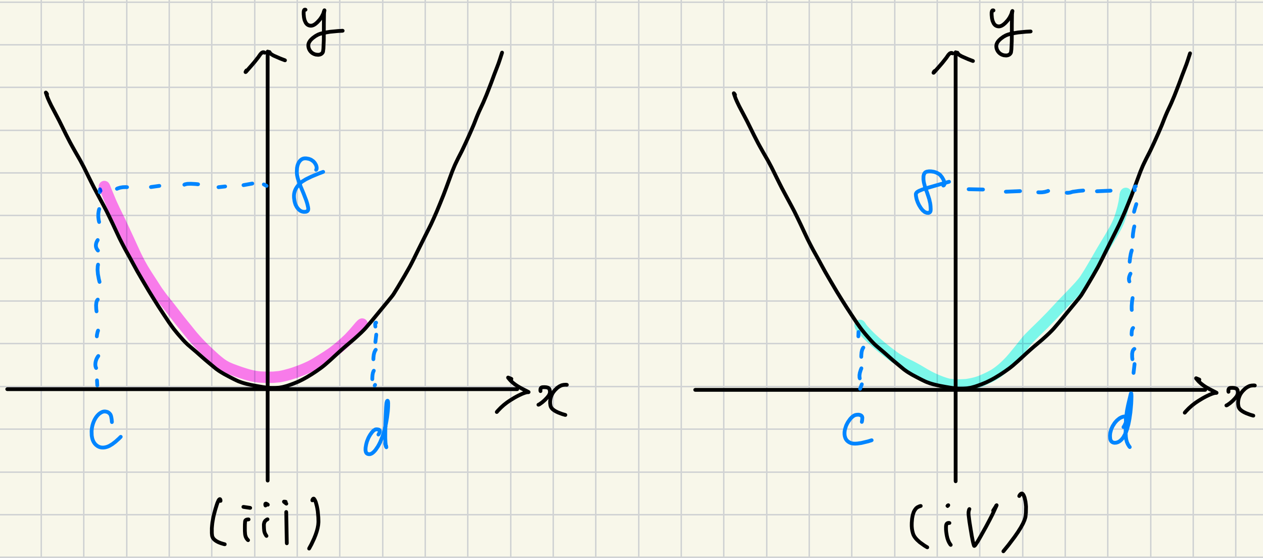
このとき $c = a+3$ より $c=-3$

(ii) のとき.

$18 = \frac{1}{2}b^2 \iff b^2 = 36 \quad \therefore b = \pm 6$

$b > 0$ より $b = 6$

このとき. $d = b + 3$ より $d = 9$



$0 \leqq y \leqq 8$ を満たすのは. 上図の(iii)または(iV)

(iii) のとき

$8 = \frac{1}{2}c^2 \iff c^2 = 16 \quad \therefore c = \pm 4$

$c < 0$ より $c = -4$

また. $c = a + 3$ より $a = c - 3 = -7$

(iV) のとき

$8 = \frac{1}{2}d^2 \iff d^2 = 16 \quad \therefore d = \pm 4$

$d > 0$ より $d = 4$

また. $d = b + 3$ より $b = d - 3 = 1$

2つの条件を同時に満たすのは

(i) かつ (iii), (i) かつ (iV)
(ii) かつ (iii), (ii) かつ (iV)

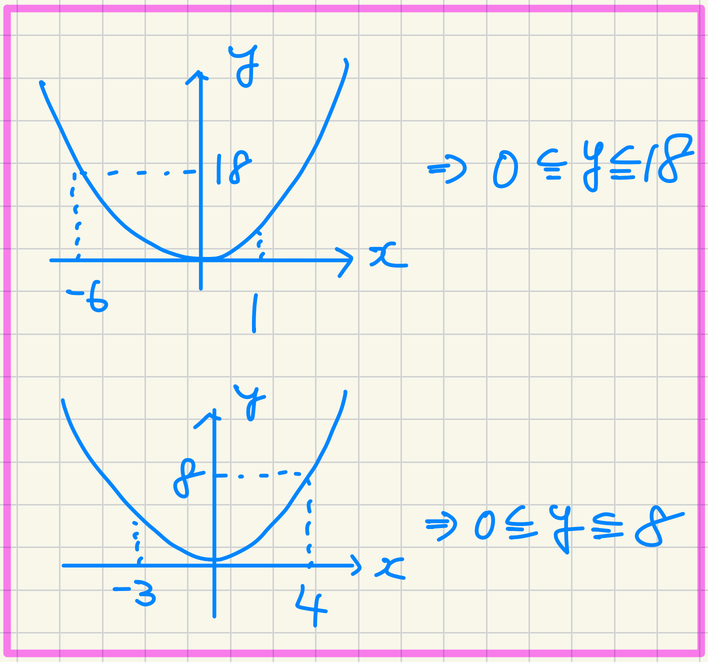
のいずれかである.

(i) かつ (iii) のとき

(i) より $a=-6$, $c=-3$

(iii) より $a=-7$, $c=-4$

なので不適



(i) かつ (iV) のとき

(i) より $a=-6$, $c=-3$

(iV) より $b=1$, $d=4$.

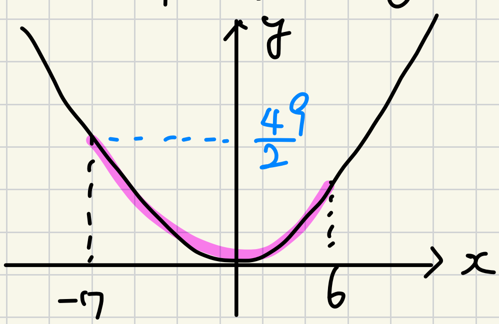
条件を満たす.

(ii) かつ (iii) のとき

(ii) より $b=6$, $d=9$

(iii) より $a=-7$, $c=-4$

⇒ $-7 \leqq x \leqq 6$ のとき $0 \leqq y \leqq \frac{49}{2}$ となり不適.



(ii) かつ (iV) のとき

(ii) より $b=6$, $d=9$

(iV) より $b=1$, $d=4$

なので不適.

以上より $a=-6$, $b=1$

(6) 2つのさいころを投げたときの出る目は、
$$6 \times 6 = 36\text{通り}$$

また、$2025 = 45^2 = (9 \times 5)^2 = (3^2 \times 5)^2 = 3^4 \times 5^2$

$\dfrac{2025}{c}$ が自然数 $\Leftrightarrow$ c は 2025 の約数.

また、$1 \leqq a \leqq 6$, $1 \leqq b \leqq 6$ より c の範囲は、

最小：$a=1, b=1$ で $c = 3$

最大：$a=6, b=6$ で $c = 18$

である. 2025 の約数のうち、3 ~ 18 であるものは、

$3^1, 3^2, 5^1, 3 \times 5 \Rightarrow 3, 9, 5, 15$ である.

∴ c は 3, 9, 5, 15 のいずれかとなる.

(i) $c = 3$ のとき

$(a, b) = (1, 2)$ の 1通り

(ii) $c = 9$ のとき

$(a, b) = (2, 5), (3, 3), (4, 1)$ の 3通り

(iii) $c = 5$ のとき

$(a, b) = (1, 3), (2, 1)$ の 2通り

(iv) $c = 15$ のとき

$(a, b) = (5, 5), (6, 3)$ の 2通り

よって $\dfrac{2025}{c}$ が自然数となるのは、$1 + 3 + 2 + 2 = 8$通り

より求める確率は $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

(参考)

$2025 = 3^4 \times 5^2$ より 2025の約数は、

$1, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 5^1, 5^2$

$3^1 \times 5^1, 3^2 \times 5^1, 3^3 \times 5^1, 3^4 \times 5^1$

$3^1 \times 5^2, 3^2 \times 5^2, 3^2 \times 5^3, 3^4 \times 5^2$

となる。

(7) やや難

n を ab (aは十の位, bは一の位) と表すこととする。

2けたの自然数の一の位は0〜9であり、これらを2乗した1の位は

$0^2 = 0 \Rightarrow 0$

$1^2 = 1 \Rightarrow 1$

$2^2 = 4 \Rightarrow 4$

$3^2 = 9 \Rightarrow 9$

$4^2 = 16 \Rightarrow 6$

$5^2 = 25 \Rightarrow 5$

$6^2 \Rightarrow 36 \Rightarrow 6$

$7^2 = 49 \Rightarrow 9$

$8^2 = 64 \Rightarrow 4$

$9^2 = 81 \Rightarrow 1$

であるから、bとして考えられるのは、

$b = 0, 1, 5, 6$

のいずれかである。

また

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & 7 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \\ 7\times a & 7\times b & \\ \hline 7\times a & 7\times b & 0 \end{array}$$

$7\times b \quad 0$

$b=1$ のとき 70

$b=2$ のとき 140

$b=3$ のとき 210

$7b$

$70n$ の十の位は $7b$ の一の位

であるから、$70n$ の十の位は $7b$ の一の位となる。

よって、a は $7b$ の一の位より 3 大きい数となる

(i) $b=0$ のとき

$7b=0$ より $a=0+3=3$

$\therefore n=30$

(ii) $b=1$ のとき

$7b=7$ より $a=7+3=10$

a は n の十の位であり $0\sim9$ のいずれかなので不適

(iii) $b=5$ のとき

$7b=35$ より $7b$ の一の位は 5。よって、

$a=5+3=8$

$\therefore n=85$

(iv) $b=6$ のとき

$7b=42$ より $7b$ の一の位は 2、よって

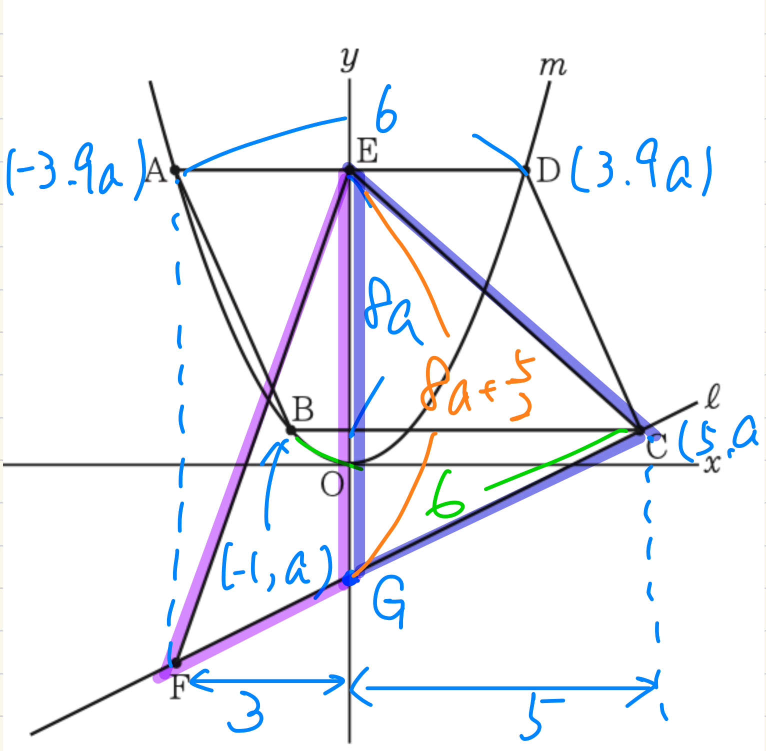
$a=2+3=5$

$\therefore n=56$

以上より

$n=30,\ 56,\ 85$

(8)



Aは $y=ax^2$ 上にあり.
$x=-3$ だから
$y=a\times(-3)^2$
$=9a$ ∴ A$(-3.9a)$

Bは $y=ax^2$ 上にあり
$x=-1$ だから
$y=a\times(-1)^2$
$=a$ ∴ B$(-1,a)$

DはAとy軸について対称だから. D$(3.9a)$
よって
AD $=3-(-3)=6$
また. □ABCDの高さは.
$9a-a=8a$
よって. □ABCDの面積は
$6\times 8a=48a$

さらに. BC = AD より
Cのx座標 = Bのx座標+6
$=-1+6=5$
Cのy座標 = Bのy座標
$=a$
⇒ C$(5,a)$

ℓは傾き $\frac{1}{2}$ だから. ℓの式を $y=\frac{1}{2}x+b$ とおくと.
C$(5,a)$ を通るから

$a=\frac{1}{2}\times 5+b \iff \underline{b=a-\frac{5}{2}}$ ⇐ ℓのy切片

ℓとy軸の交点をGとすると、Gはℓのy切片だから、
$G(0,\ a-\frac{5}{2})$

よって、

$$\underline{EG}=9a-\left(a-\frac{5}{2}\right)$$
$$=\underline{8a+\frac{5}{2}}$$

$$\underline{\triangle FEC}=\triangle EFG+\triangle EGC$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(8a+\frac{5}{2}\right)\times 3+\frac{1}{2}\times\left(8a+\frac{5}{2}\right)\times 5$$
$$=\frac{1}{2}\left(8a+\frac{5}{2}\right)\times(3+5)$$
$$=4\left(8a+\frac{5}{2}\right)$$
$$=\underline{32a+10}$$

□ABCDと△FECの面積は等しいので、

$$\underbrace{48a}_{\square ABCD}=\underbrace{32a+10}_{\triangle FEC}$$

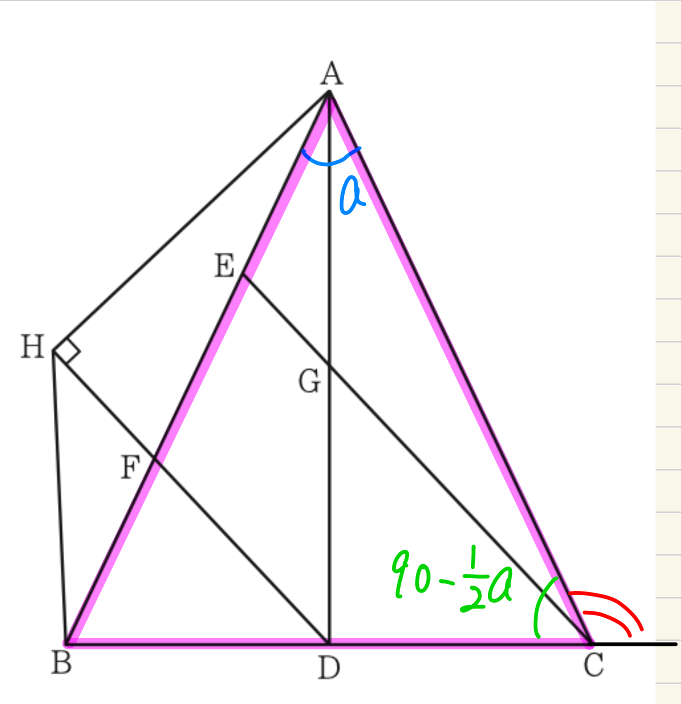
$$\iff 16a=10$$
$$\therefore a=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

aは正の定数より、$a=\frac{5}{8}$は問題に適している。

よって、$\underline{a=\frac{5}{8}}$

2.

(1)



△ABCはAB=ACの二等辺三角形より∠ABC=∠ACB.

よって

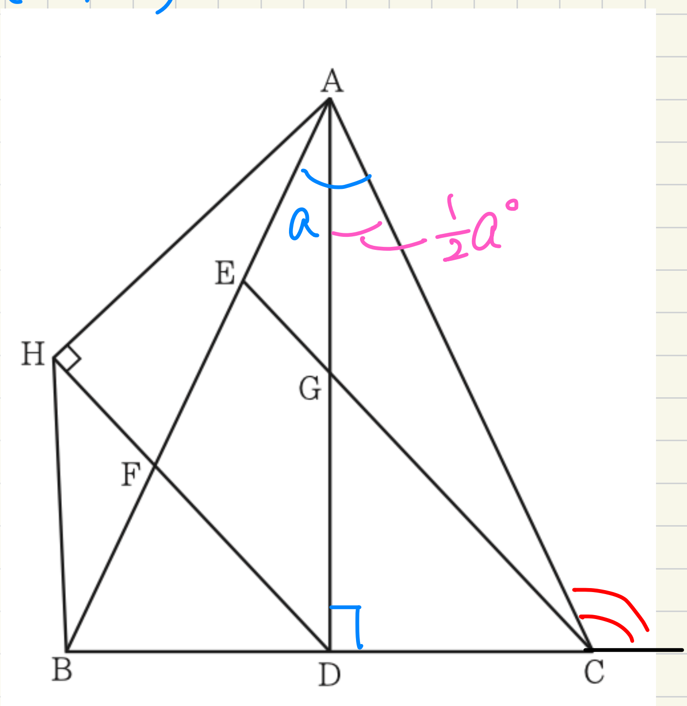
$\angle ACB=(180^\circ-a)\div 2$

$=90^\circ-\frac{1}{2}a$

したがって.△ABCの頂点Cにおける外角の大きさは

$$180^\circ-(90^\circ-\frac{1}{2}a)=90^\circ+\frac{1}{2}a$$

(別解)



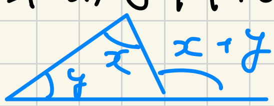
ADは∠BACの二等分線だから

$\angle DAC=\frac{1}{2}a$

△ABCはAB=ACの二等辺三角形で.ADは∠BACの二等分線より

$\angle ADC=90^\circ$

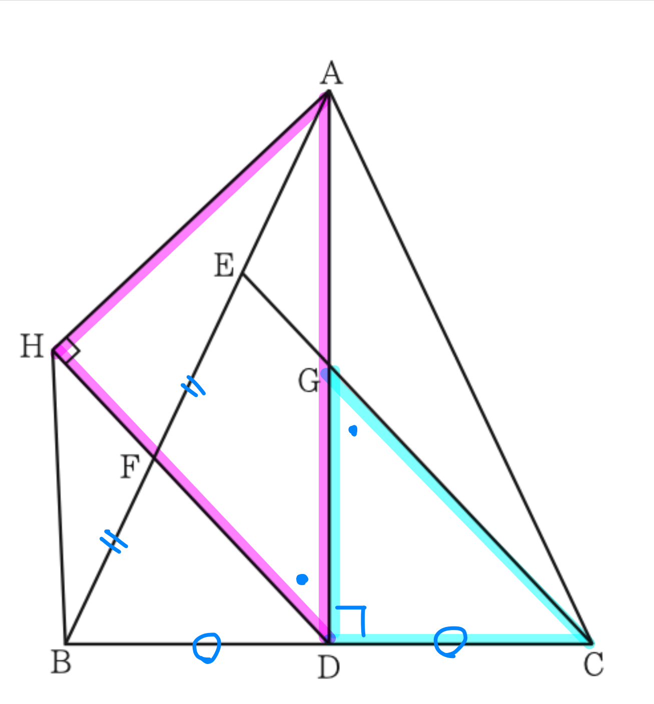
よって.求める角は



三角形の外角の定理より

$$90^\circ+\frac{1}{2}a$$

(2)



△AHD と △CDG において

AH ⊥ HD より

$\angle AHD = 90°$ ―― ㋐

二等辺三角形の頂点の二等分線は底辺を垂直に二等分するから

$\angle CDG = 90°$ ―― ㋑

㋐,㋑より

$\angle AHD = \angle CDG$ ―― ㋒

BF = FE, BD = DC より、△BCE において F, D はそれぞれ BE, BC の中点だから FD // EC

平行線の錯角は等しいから

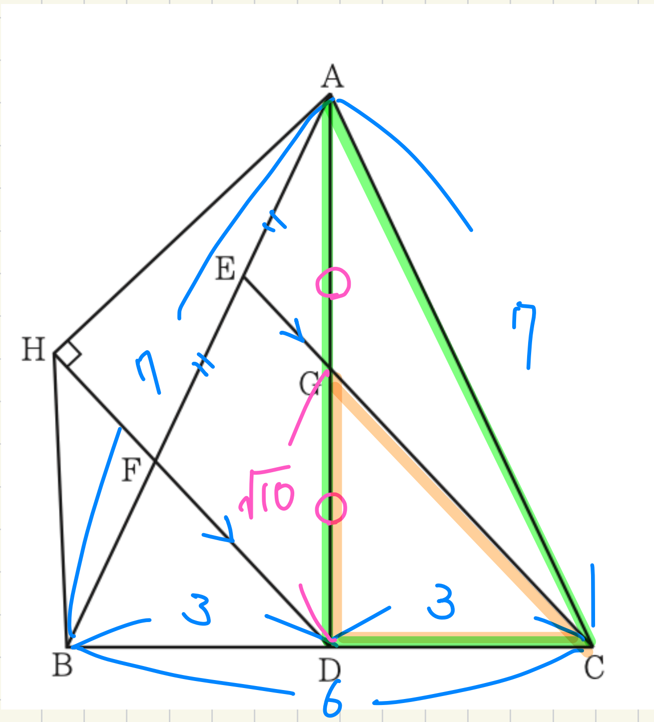
$\angle ADH = \angle CGD$ ―― ㋓

㋒,㋓より 2組の角がそれぞれ等しいので

△AHD ∽ △CDG (証明終わり)

(3)

①



△ADC で三平方の定理より

$AD = \sqrt{7^2 - 3^2}$ $= \sqrt{49-9}$

$= 2\sqrt{10}$ $= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

E は AF の中点, FC // FD

なので、中点連結定理より

G は AD の中点

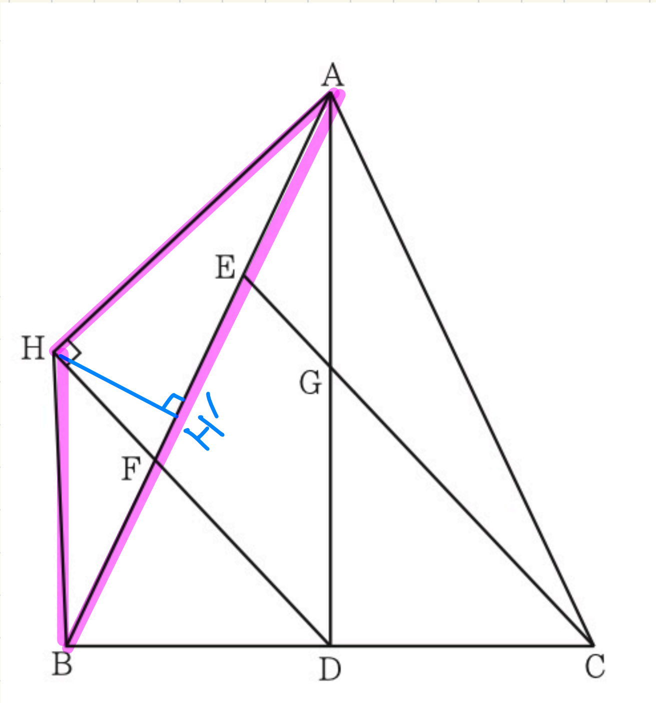
したがって

$$GD = 2\sqrt{10} \div 2$$
$$= \sqrt{10}$$

△GDCで三平方の定理より

$$GC = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{10+9}$$
$$= \sqrt{19}$$
$$= \sqrt{19}\ \text{cm}$$

② 難問

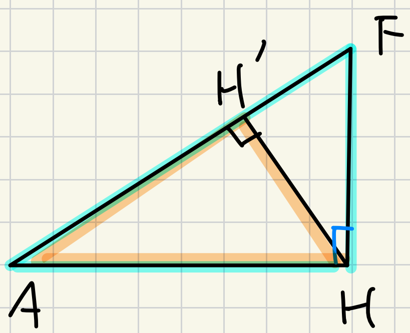


HからABに垂線を下ろした足をH′とする。

$\triangle AHB = \frac{1}{2} \times AB \times HH'$

AB = 7cm より HH′の長さを求める。

△AHF と △AH′H において
共通な角より
$\angle HAF = \angle H'AH$ ——㋐
また
$\angle AHF = \angle AH'H = 90°$ ——①



㋐,①より2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle AHF \backsim \triangle AH'H$

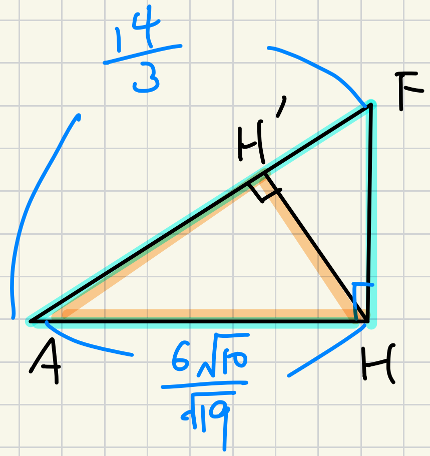
よって $AF : AH = HF : H'H$ —— ㋒

ここで、(2)より $\triangle AHD \sim \triangle CDG$ だから

$$AH : \underset{3}{CD} = \underset{2\sqrt{10}}{AD} : \underset{\sqrt{19}}{CG}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{19}\,AH = 6\sqrt{10}$$

$$\therefore AH = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{19}}\ \text{cm}$$



また、$AE = EF = FB$, $AB = 7\text{cm}$ より

$$AF = \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3}\ \text{cm}$$

さらに、$\triangle FAH$ で三平方の定理より

$$HF = \sqrt{\left(\frac{14}{3}\right)^2 - \left(\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{19}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{196}{9} - \frac{360}{19}}$$

$$= \sqrt{\frac{3724 - 3240}{171}}$$

$$= \sqrt{\frac{484}{171}}$$

$$\left(\begin{aligned} 22^2 &= 484 \\ 171 &= 3^2 \times 19 \end{aligned}\right)$$

$$= \frac{22}{3\sqrt{19}}$$

したがって、⑦より

$$\frac{14}{3} : \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{19}} = \frac{22}{3\sqrt{19}} : H'H$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{3} H'H = \frac{6\sqrt{10} \times 22}{\sqrt{19} \times 3\sqrt{19}}$$

$$= \frac{44\sqrt{10}}{19}$$

$$\therefore H'H = \frac{44\sqrt{10}}{19} \times \frac{3}{14}$$

$$= \frac{66\sqrt{10}}{19 \times 7}$$

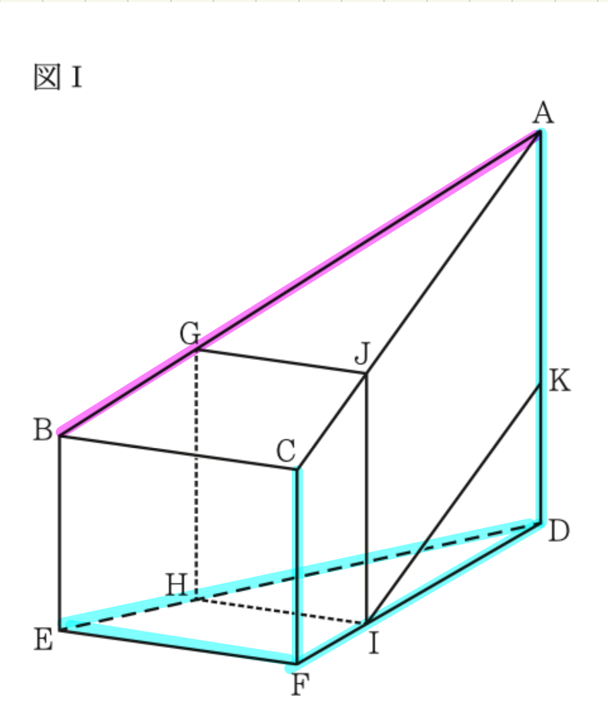
したがって△AHBの面積は

$$\frac{1}{2} \times 7 \times \frac{66\sqrt{10}}{19 \times 7} = \frac{33\sqrt{10}}{19} \text{ cm}^2$$

3

(1)

①



ア：ABと交わるので誤り

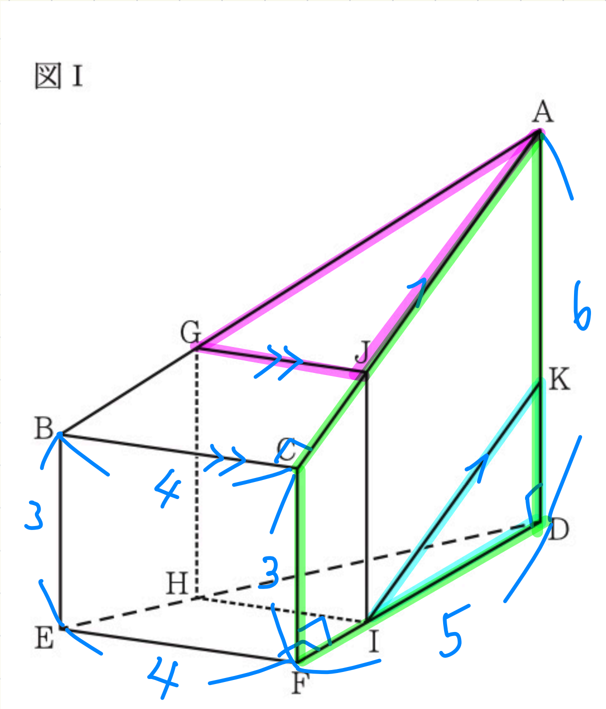
イ：ねじれの位置

ウ：ABとDEを延長すると交わるので誤り

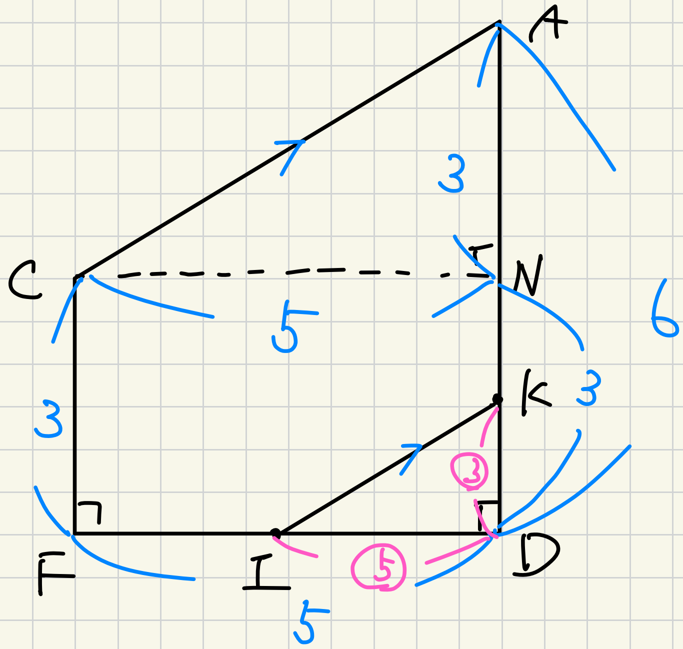
エ：ねじれの位置

オ：ねじれの位置

② 難問



まず、面ACFDで考える.



CからADに垂線を下ろした足をNとする.

△ACNと△KIDにおいて.

AC // JKより

$\angle CAN = \angle IKD$ — ㋐

また.

$\angle CNA = \angle IDK = 90^\circ$ — ㋑

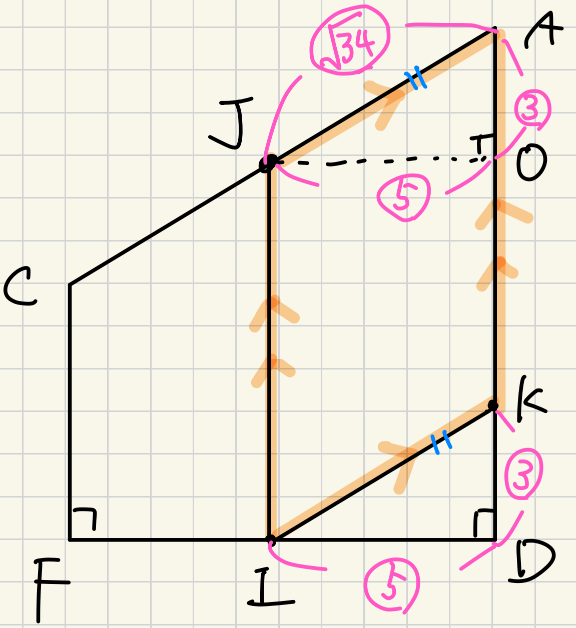
㋐,㋑より2組の角がそれぞれ等しいので.

$\triangle ACN \backsim \triangle KID$

よって.

$\underset{5}{CN} : \underset{3}{NA} = ID : DK \Leftrightarrow ID : DK = 5 : 3$

ID = ⑤, DK = ③ と表すこととする.



次に、J から、AD に垂線を下ろした足を O とする。

△AJO と △KID において、

$\boxed{\text{□AJIK は、AJ // IK, JH // KA より平行四辺形。}}$

よって、AJ = KI ―― ㋒

また、□JIDO は長方形より

JO = ID ―― ㋓

∠AOJ = ∠KDI = 90° ―― ㋔

㋒, ㋓, ㋔ より直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので、△AJO ≡ △KID

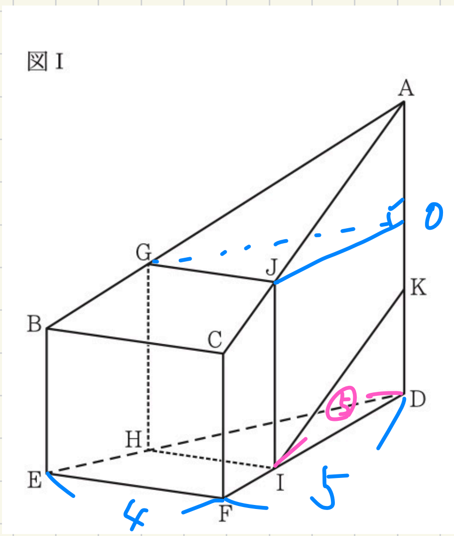
よって、

JO = ⑤、AO = ③

△AJO で三平方の定理より

$$AJ = \sqrt{⑤^2 + ③^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$= \sqrt{34}$$



次に、△DHI と △DEF において、

HI // EF より

∠DHI = ∠DEF ―― ㋕

∠DIH = ∠DFE ―― ㋖

㋕, ㋖ より2組の角がそれぞれ等しいので、△DHI ∽ △DEF

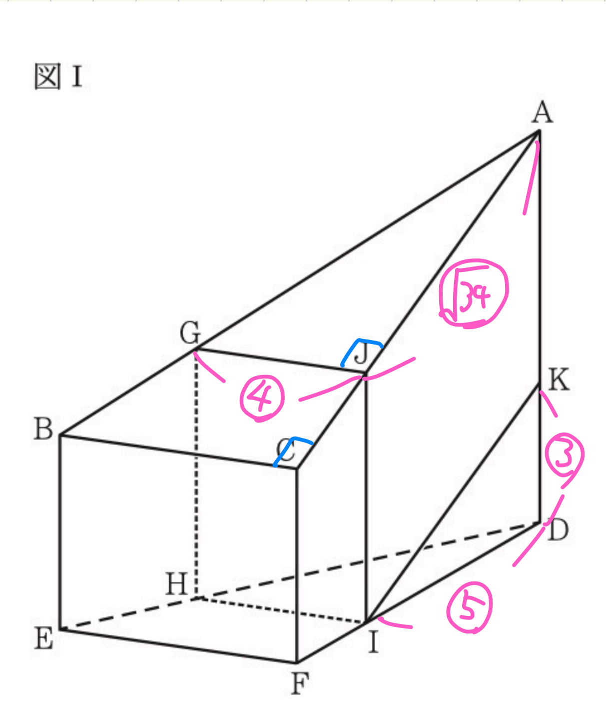
よって.

$$DI : HI = DE : EF$$
$$= 5 : 4.$$

$DI = 5$ より $HI = 4$

また、OとGを結び $\triangle OGJ$ を考えると、$\triangle OGJ$ は $\triangle DHI$ を上方向に平行移動したものだから

$$GJ = HI \quad \therefore GJ = 4$$



$GJ \parallel BC$. $\angle ACB = 90°$ より

$\angle AJG = 90°$. よって.

$$\triangle AGJ = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{34}$$
$$= 2\sqrt{34}$$

$$\triangle KID = \frac{1}{2} \times 5 \times 3$$
$$= \frac{15}{2}$$

したがって.

$$\triangle AGJ : \triangle KID = 2\sqrt{34} : \frac{15}{2}$$

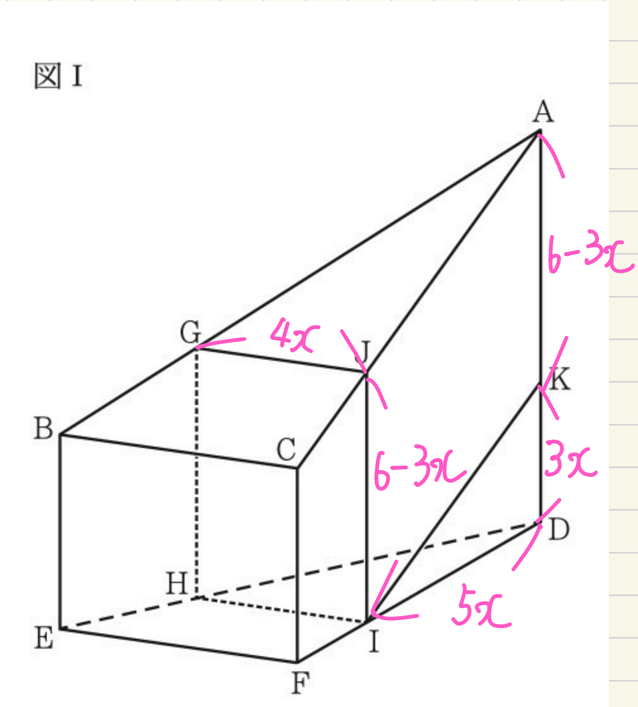
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} \times \triangle AGJ = 2\sqrt{34} \times \triangle KID$$

$$\therefore \triangle AGJ = \frac{2}{15} \times 2\sqrt{34} \times \triangle KID$$

$$= \frac{4\sqrt{34}}{15} \times \triangle KID$$

よって. $\triangle AGJ$ は. $\triangle KID$ の $\frac{4\sqrt{34}}{15}$ 倍

③



① を x とすると、③ は $3x$、⑤ は $5x$ である。

GJ = ④ より GJ = $4x$.

また AD = 6, KD = $3x$ より

AK = $6-3x$.

□AJIK は平行四辺形より

JI = AK = $6-3x$. ②より

JI = GJ + 1 より

$$6-3x = 4x+1$$

$$\Leftrightarrow -7x = -5$$

$$\therefore x = \frac{5}{7}$$

□GHIJ は長方形だから、周の長さは

$$4x + 4x + (6-3x) + (6-3x)$$

$$= 2x + 12.$$

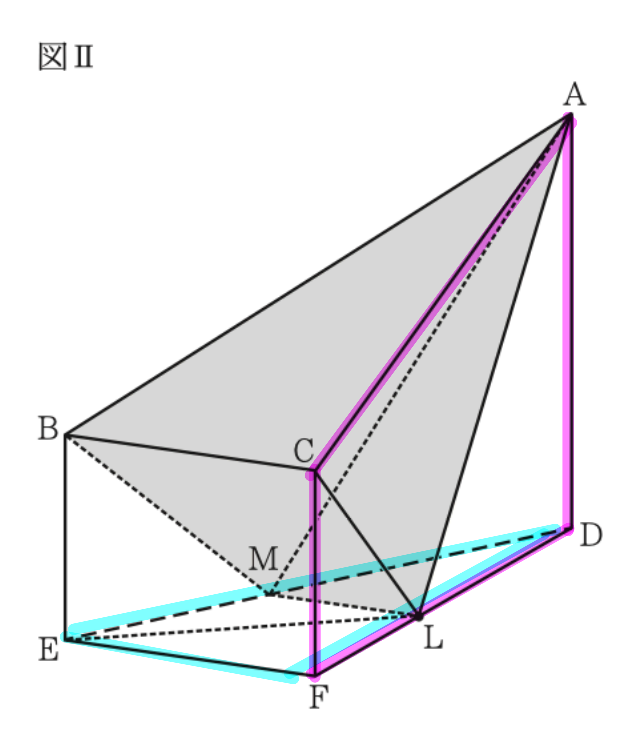
よって、$x = \frac{5}{7}$ を代入して、

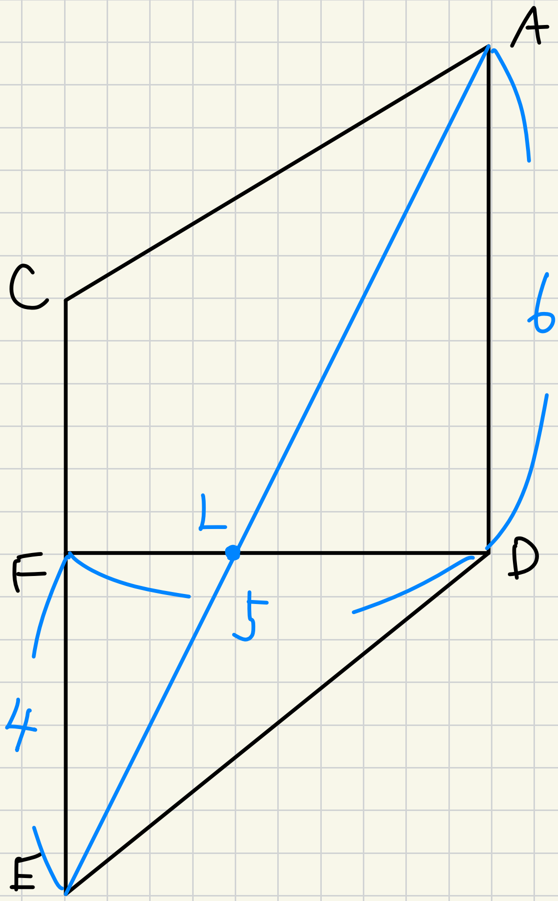
$$2 \times \frac{5}{7} + 12 = \frac{10}{7} + \frac{84}{7}$$

$$= \frac{94}{7} \text{ cm}$$

(2)

①





AL+LEが最小となるのは、上図の展開図で、直線AEとDFの交点がLとなるときである。

△ALDと△ELFにおいて、

対頂角は等しいので、

$\angle ALD = \angle ELF$ —㋐

また、

$\angle ADL = \angle EFL = 90^\circ$ —㋑

㋐、㋑より2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle ALD \sim \triangle ELF$

よって、

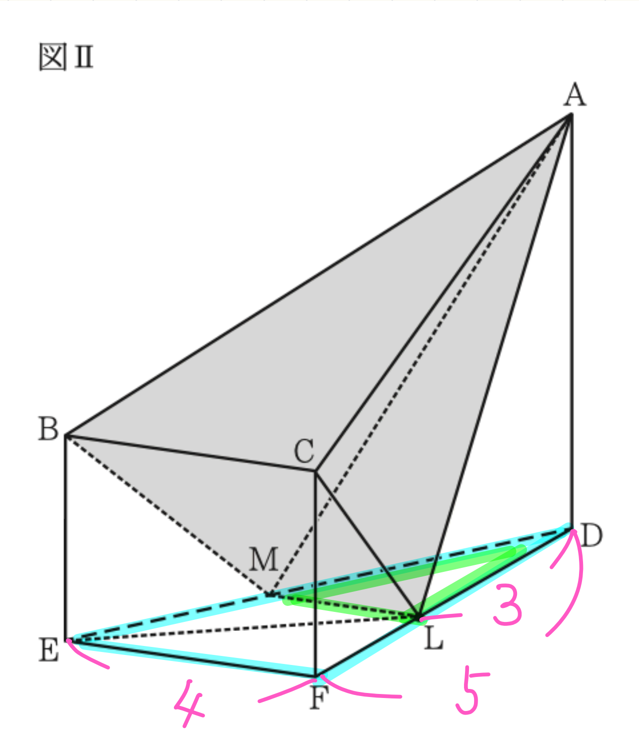
$LD : LF = AD : EF$

$= 6 : 4$

$= 3 : 2$

$FD = 5$ cm より

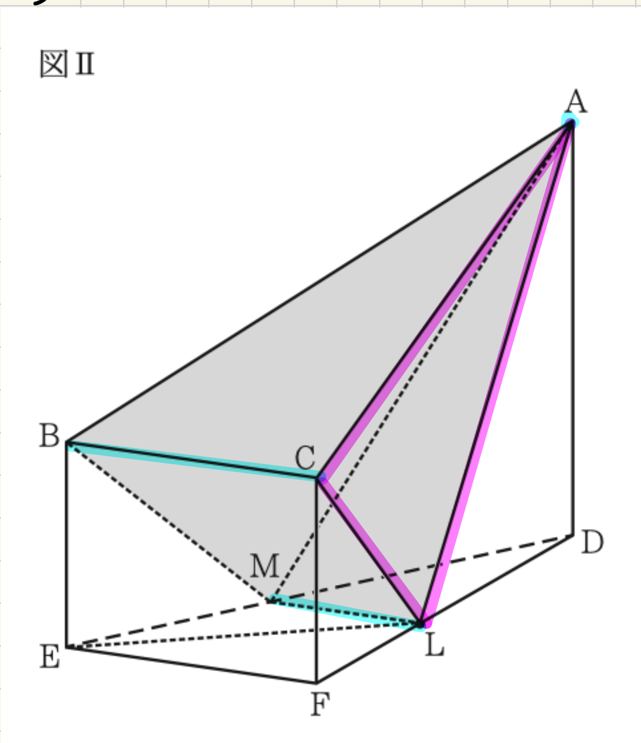
$$DL = \frac{3}{3+2} \times 5 = 3\text{ cm}$$

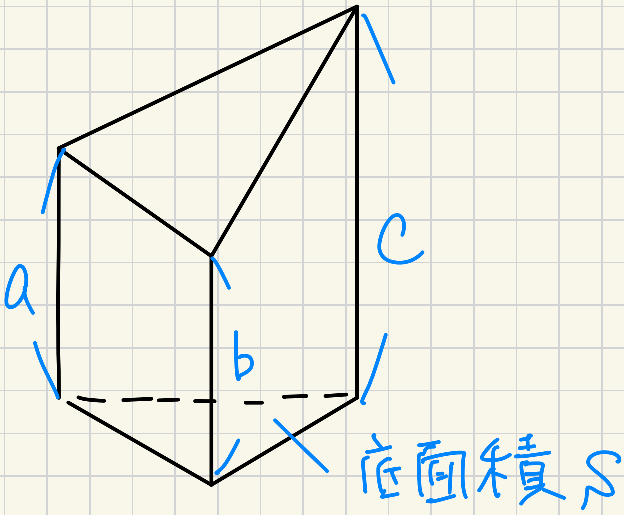


△DMLと△DEFにおいて
ML // EFより
∠DML = ∠DEF ―㋐
∠DLM = ∠DFE ―㋓
㋐, ㋓より2組の角がそれぞれ等しいので△DML ∽ △DEF
よって
$ML : EF = DL : DF$
$\quad\quad 4 \quad\quad 3 \quad\quad 5$

⇔ $5ML = 12$ ∴ $ML = \frac{12}{5}$ cm

②

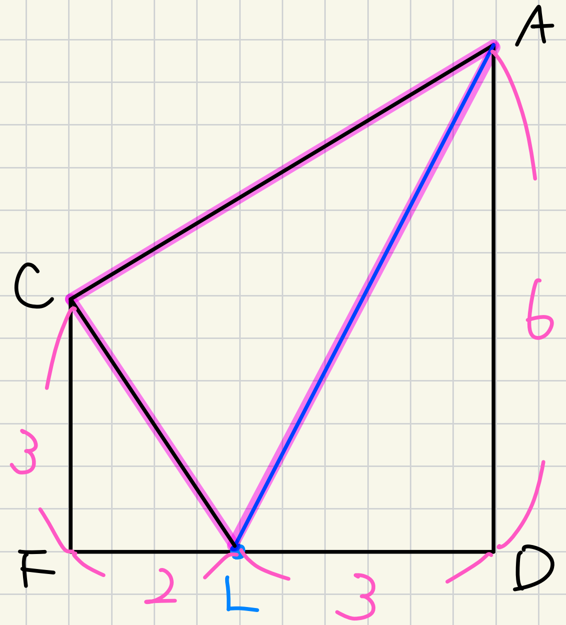




切頭三角柱の体積

$$S \times \frac{a+b+c}{3}$$

切頭三角柱において、底面を△ACLとして考える。



$\triangle ACL$

$= \square ACFD - \triangle CFL - \triangle ADL$

$= \dfrac{(3+6)\times 5}{2} - \dfrac{1}{2}\times 2\times 3 - \dfrac{1}{2}\times 3\times 6$

$= \dfrac{45}{2} - 3 - 9$

$= \dfrac{45-6-18}{2} = \dfrac{21}{2}$

点A $=0$, BC $=4$, ML $=\dfrac{12}{5}$ より求める体積は

$\dfrac{21}{2}\times\left(0+4+\dfrac{12}{5}\right)\times\dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{21}{2}\times\dfrac{32}{5}\times\dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{112}{5}$ cm^3