中学数学

円周角と中心角

応用編

偏差値55以上・入試大問対策

円周角の定理を、
相似・三平方の定理と組み合わせて使う力をつけます。

KmKmの学習支援サイト

目次

1　この教材の使い方

この教材は、円周角と中心角の基本を学習したあと、入試問題で差がつく応用問題に取り組むための教材です。

特に、**円周角の定理**だけでなく、**相似**や**三平方の定理**を組み合わせて使う問題を扱います。

学習の進め方

1. まず、円周角で等しい角を見つけます。
2. 次に、相似な三角形がないかを確認します。
3. 直径がある場合は、直角三角形を見つけます。
4. 長さを求めるときは、相似比と三平方の定理を使い分けます。

注意 応用問題で大切なこと

円の問題では、最初から長さを求めようとしないことが大切です。まず図の中にある**等しい角**、**直角**、**相似な三角形**を見つけてから式を立てましょう。

2　円周角の定理の応用

2.1　円に内接する四角形の角

円に内接する四角形

4 つの頂点が同じ円の周上にある四角形では、向かい合う角の和は $180°$ になります。

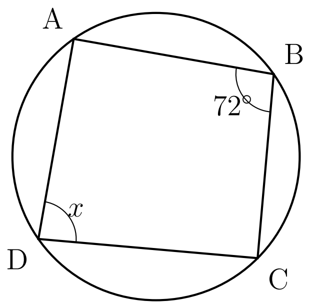
つまり、四角形 $ABCD$ が円に内接するとき、

$$\angle A + \angle C = 180°, \qquad \angle B + \angle D = 180°$$

です。

例題 1

次の図で、A, B, C, D は円周上の点です。$\angle ABC = 72°$ のとき、$\angle ADC$ を求めなさい。



方針

円に内接する四角形では、向かい合う角の和が $180°$ になることを使います。

解き方

四角形 $ABCD$ は円に内接しています。

したがって、向かい合う角の和は $180°$ です。

$$\angle ABC + \angle ADC = 180°$$

です。

$\angle ABC = 72°$ なので、

$$\angle ADC = 180° - 72° = 108°$$

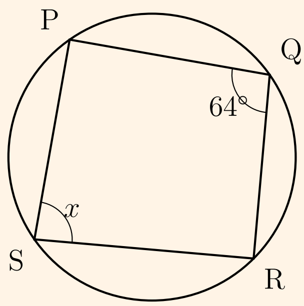
です。

答え

$$108°$$

練習問題 1

次の図で、P, Q, R, S は円周上の点です。$\angle PQR = 64°$ のとき、$\angle PSR$ を求めなさい。



解答解説 1

解き方

四角形 $PQRS$ は円に内接しています。

したがって、向かい合う角の和は $180°$ です。

$$\angle PQR + \angle PSR = 180°$$

です。

$\angle PQR = 64°$ なので、

$$\angle PSR = 180° - 64° = 116°$$

です。

答え

$$116°$$

2.2 円周角の定理の逆

円周角の定理の逆

2 点 A, B を結び、同じ側にある点 C, D について、

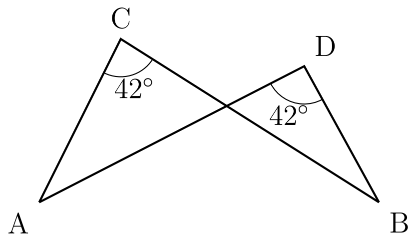
$$\angle ACB = \angle ADB$$

ならば、4 点 A, B, C, D は同じ円周上にあります。

これは、**円周角の定理の逆**です。

例題 2

次の図で、$\angle ACB = 42^\circ$、$\angle ADB = 42^\circ$ です。4 点 A, B, C, D は同じ円周上にあるといえますか。



方針

同じ線分 AB を見ている角が等しいかを確認します。

解き方

$\angle ACB$ と $\angle ADB$ は、どちらも線分 AB を見ています。

また、

$$\angle ACB = 42^\circ, \qquad \angle ADB = 42^\circ$$

なので、

$$\angle ACB = \angle ADB$$

です。

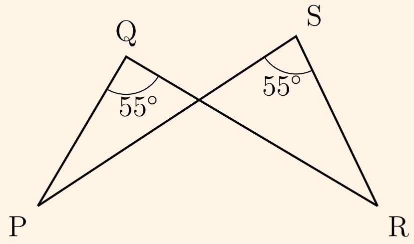
したがって、円周角の定理の逆より、4 点 A, B, C, D は同じ円周上にあるといえます。

答え

いえる。

練習問題 2

次の図で、$\angle PQR = 55^\circ$、$\angle PSR = 55^\circ$ です。4 点 P, Q, R, S は同じ円周上にあるといえますか。



解答解説 2

解き方

$\angle PQR$ と $\angle PSR$ は、どちらも線分 PR を見ています。

また、

$$\angle PQR = 55^\circ, \qquad \angle PSR = 55^\circ$$

なので、

$$\angle PQR = \angle PSR$$

です。

したがって、円周角の定理の逆より、4 点 P, Q, R, S は同じ円周上にあるといえます。

答え

いえる。

3 円周角と相似

3.1 円周角から相似を見つける

円の中の相似

円の中で 2 本の弦が交わるとき、円周角の定理を使って等しい角を見つけると、相似な三角形を作れることがあります。

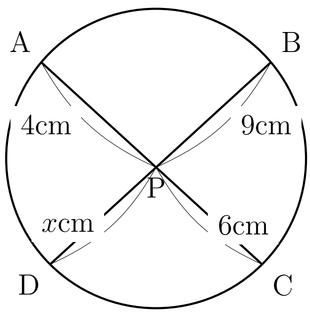
長さを求める応用問題では、

$$\text{円周角} \to \text{等しい角} \to \text{相似} \to \text{比の式}$$

の順に考えます。

例題 3

次の図で、弦 AC と弦 BD は点 P で交わっています。$AP = 4\text{cm}$、$BP = 9\text{cm}$、$CP = 6\text{cm}$ のとき、DP の長さを求めなさい。



方針

円周角を使って相似な三角形を見つけ、対応する辺の比を立てます。

解き方

$\triangle APB$ と $\triangle DPC$ に注目します。

直線 AC と直線 BD が交わっているので、

$$\angle APB = \angle DPC$$

です。

また、$\angle ABP$ と $\angle DCP$ は、どちらも弧 AD に対する円周角なので、

$$\angle ABP = \angle DCP$$

です。

したがって、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle APB \sim \triangle DPC$$

です。

対応する辺の比より、

$$AP : DP = BP : CP$$

です。

数を入れると、

$$4 : DP = 9 : 6$$

です。

よって、

$$DP = 4 \times \frac{6}{9} = \frac{8}{3}$$

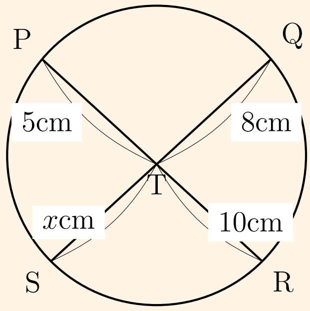
です。

答え

$$\frac{8}{3}\mathrm{cm}$$

練習問題 3

次の図で、弦 PR と弦 QS は点 T で交わっています。$PT = 5\text{cm}$、$QT = 8\text{cm}$、$RT = 10\text{cm}$ のとき、ST の長さを求めなさい。



解答解説 3

解き方

$\triangle PTQ$ と $\triangle STR$ に注目します。

対頂角より、

$$\angle PTQ = \angle STR$$

です。

また、$\angle PQT$ と $\angle SRT$ は、どちらも弧 PS に対する円周角なので、

$$\angle PQT = \angle SRT$$

です。

したがって、

$$\triangle PTQ \sim \triangle STR$$

です。

対応する辺の比より、

$$PT : ST = QT : RT$$

です。

数を入れると、

$$5 : ST = 8 : 10$$

です。

よって、

$$ST = 5 \times \frac{10}{8} = \frac{25}{4}$$

です。

答え

$$\frac{25}{4}\mathrm{cm}$$

3.2　2 本の弦の積の関係

交わる弦の長さ

2 本の弦が円の内部で交わるとき、交点で分けられた長さには、

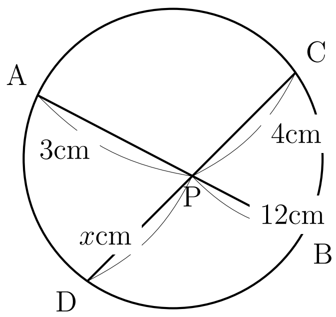
$$AP \times CP = BP \times DP$$

のような関係が成り立ちます。

これは、相似な三角形から導くことができます。

例題 4

次の図で、弦 AB と弦 CD は点 P で交わっています。$AP = 3\text{cm}$、$PB = 12\text{cm}$、$CP = 4\text{cm}$ のとき、PD の長さを求めなさい。



方針

交わる弦では、分けられた長さの積が等しくなります。

解き方

交わる弦の性質より、

$$AP \times PB = CP \times PD$$

です。

数を入れると、

$$3 \times 12 = 4 \times PD$$

です。

したがって、

$$36 = 4PD$$

なので、

$$PD = 9$$

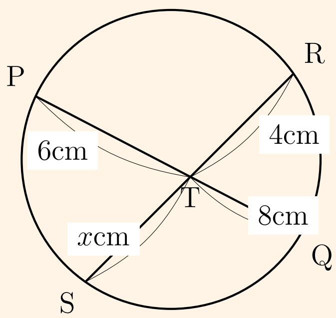
です。

答え

$$9\text{cm}$$

練習問題 4

次の図で、弦 PQ と弦 RS は点 T で交わっています。$PT = 6\text{cm}$、$TQ = 8\text{cm}$、$RT = 4\text{cm}$ のとき、ST の長さを求めなさい。



解答解説 4

解き方

交わる弦の性質より、

$$PT \times TQ = RT \times ST$$

です。

数を入れると、

$$6 \times 8 = 4 \times ST$$

です。

したがって、

$$48 = 4ST$$

なので、

$$ST = 12$$

です。

答え

12cm

4　円周角と三平方の定理

4.1　直径から直角三角形を作る

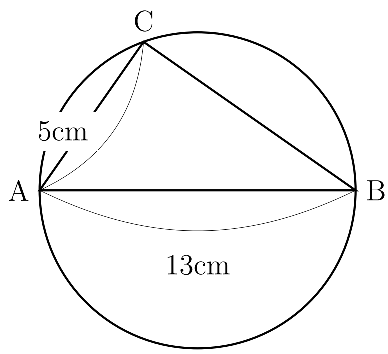
直径と三平方の定理

直径に対する円周角は 90° です。

そのため、円の直径が図にあるときは、直角三角形を見つけて、三平方の定理を使えることがあります。

例題 5

次の図で、AB は円の直径です。$AB = 13\text{cm}$、$AC = 5\text{cm}$ のとき、BC の長さを求めなさい。



方針

AB が直径なので、$\angle ACB = 90^\circ$ です。直角三角形 ABC で三平方の定理を使います。

解き方

AB は直径なので、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

です。

したがって、三角形 ABC は、AB を斜辺とする直角三角形です。

三平方の定理より、

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

です。

数を入れると、

$$5^2 + BC^2 = 13^2$$

です。

したがって、

$$BC^2 = 169 - 25 = 144$$

なので、

$$BC = 12$$

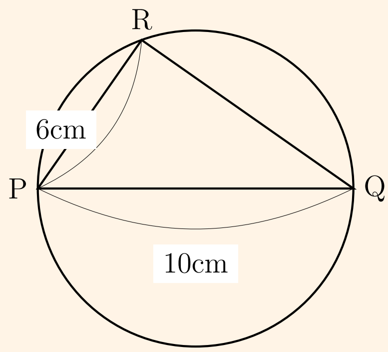
です。

答え

12cm

練習問題 5

次の図で、PQ は円の直径です。$PQ = 10\text{cm}$、$PR = 6\text{cm}$ のとき、QR の長さを求めなさい。



解答解説 5

解き方

PQ は直径なので、

$$\angle PRQ = 90^\circ$$

です。

したがって、三角形 PQR は、PQ を斜辺とする直角三角形です。

三平方の定理より、

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2$$

です。

数を入れると、

$$6^2 + QR^2 = 10^2$$

です。

したがって、

$$QR^2 = 100 - 36 = 64$$

なので、

$$QR = 8$$

です。

答え

8cm

5　円周角・相似・三平方の総合

5.1　直角三角形の中の相似

直角三角形の高さと相似

AB が直径で、点 C が円周上にあるとき、$\angle ACB = 90^\circ$ です。

点 C から AB に垂線を下ろして足を D とすると、直角三角形の中に相似な三角形ができます。

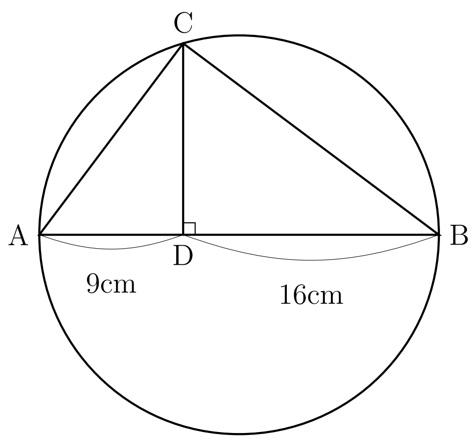
このとき、

$$CD^2 = AD \times DB$$

が成り立ちます。

例題 6

次の図で、AB は円の直径です。点 C から AB に垂線を下ろし、その足を D とします。$AD = 9\text{cm}$、$DB = 16\text{cm}$ のとき、CD の長さを求めなさい。



方針

直径から直角を見つけ、直角三角形の中の相似を使います。

解き方

AB は直径なので、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

です。

また、$CD \perp AB$ なので、三角形 ACD と三角形 CBD は相似になります。

この相似から、

$$CD^2 = AD \times DB$$

が成り立ちます。

数を入れると、

$$CD^2 = 9 \times 16 = 144$$

です。

したがって、

$$CD = 12$$

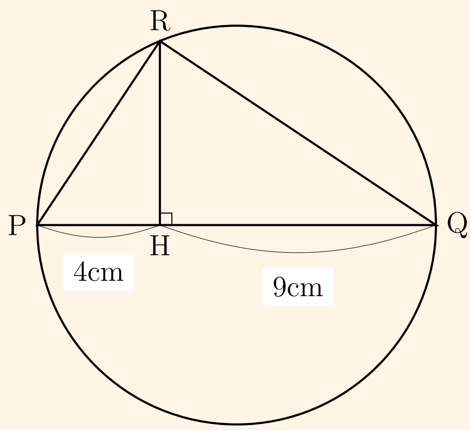
です。

答え

12cm

練習問題 6

次の図で、PQ は円の直径です。点 R から PQ に垂線を下ろし、その足を H とします。$PH = 4\text{cm}$、$HQ = 9\text{cm}$ のとき、RH の長さを求めなさい。



解答解説 6

解き方

PQ は直径なので、

$$\angle PRQ = 90^\circ$$

です。

また、$RH \perp PQ$ なので、直角三角形の中の相似より、

$$RH^2 = PH \times HQ$$

が成り立ちます。

数を入れると、

$$RH^2 = 4 \times 9 = 36$$

です。

したがって、

$$RH = 6$$

です。

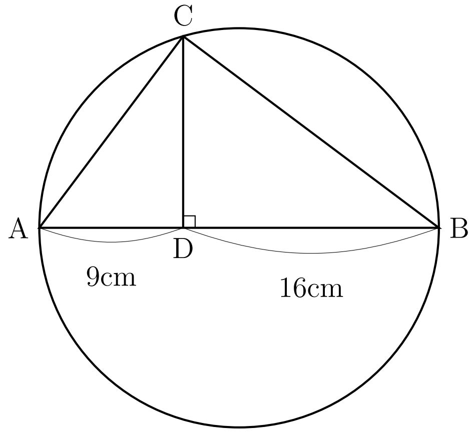
答え

$$6\text{cm}$$

5.2 長さをすべて求める総合問題

例題 7

次の図で、AB は円の直径です。点 C から AB に垂線を下ろし、その足を D とします。$AD = 9\text{cm}$、$DB = 16\text{cm}$ のとき、AC と BC の長さを求めなさい。



方針

まず AB の長さを求めます。次に、直角三角形の中の相似を使って AC^2 と BC^2 を求めます。

解き方

$AD = 9\text{cm}$、$DB = 16\text{cm}$ なので、

$$AB = 9 + 16 = 25$$

です。

直角三角形の中の相似より、

$$AC^2 = AD \times AB$$

です。

したがって、

$$AC^2 = 9 \times 25 = 225$$

なので、

$$AC = 15$$

です。

同じように、

$$BC^2 = DB \times AB$$

です。

したがって、

$$BC^2 = 16 \times 25 = 400$$

なので、

$$BC = 20$$

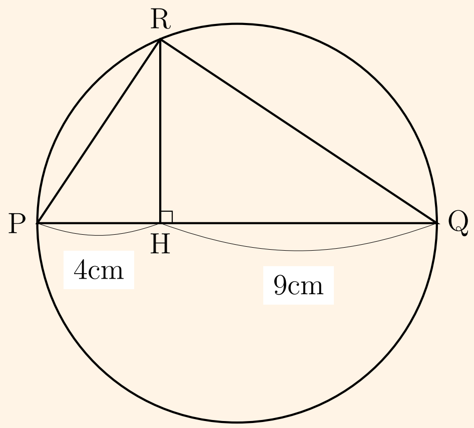
です。

答え

$$AC = 15\text{cm}, \qquad BC = 20\text{cm}$$

練習問題 7

次の図で、PQ は円の直径です。点 R から PQ に垂線を下ろし、その足を H とします。$PH = 4\text{cm}$、$HQ = 9\text{cm}$ のとき、PR と RQ の長さを求めなさい。



解答解説 7

解き方

$PH = 4\text{cm}$、$HQ = 9\text{cm}$ なので、

$$PQ = 4 + 9 = 13$$

です。

直角三角形の中の相似より、

$$PR^2 = PH \times PQ$$

です。

したがって、

$$PR^2 = 4 \times 13 = 52$$

なので、

$$PR = 2\sqrt{13}$$

です。

同じように、

$$RQ^2 = HQ \times PQ$$

です。

したがって、

$$RQ^2 = 9 \times 13 = 117$$

なので、

$$RQ = 3\sqrt{13}$$

です。

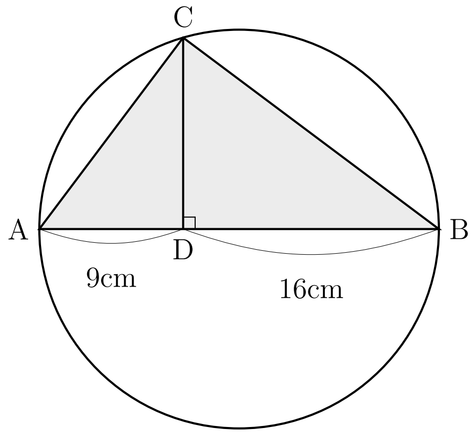
答え

$$PR = 2\sqrt{13}\text{cm}, \qquad RQ = 3\sqrt{13}\text{cm}$$

5.3 面積も含む総合問題

例題 8

次の図で、AB は円の直径です。点 C から AB に垂線を下ろし、その足を D とします。$AD = 9\mathrm{cm}$、$DB = 16\mathrm{cm}$ のとき、三角形 ABC の面積を求めなさい。



方針

底辺 AB と高さ CD を求めて、三角形の面積を求めます。

解き方

$AD = 9\mathrm{cm}$、$DB = 16\mathrm{cm}$ なので、

$$AB = 9 + 16 = 25$$

です。

また、直角三角形の中の相似より、

$$CD^2 = AD \times DB = 9 \times 16 = 144$$

です。

したがって、

$$CD = 12$$

です。

三角形 ABC の底辺を AB、高さを CD とすると、面積は、

$$25 \times 12 \div 2 = 150$$

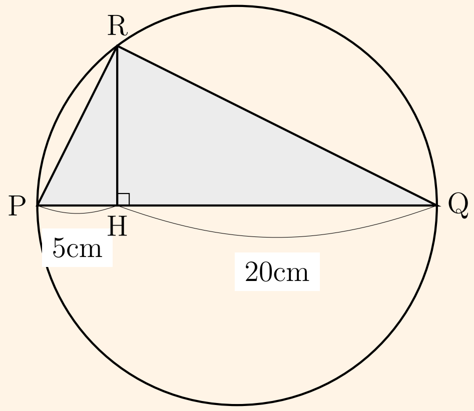
です。

答え

150cm^2

練習問題 8

次の図で、PQ は円の直径です。点 R から PQ に垂線を下ろし、その足を H とします。$PH = 5\text{cm}$、$HQ = 20\text{cm}$ のとき、三角形 PQR の面積を求めなさい。



解答解説 8

解き方

$PH = 5\text{cm}$、$HQ = 20\text{cm}$ なので、

$$PQ = 5 + 20 = 25$$

です。

また、直角三角形の中の相似より、

$$RH^2 = PH \times HQ = 5 \times 20 = 100$$

です。

したがって、

$$RH = 10$$

です。

三角形 PQR の底辺を PQ、高さを RH とすると、面積は、

$$25 \times 10 \div 2 = 125$$

です。

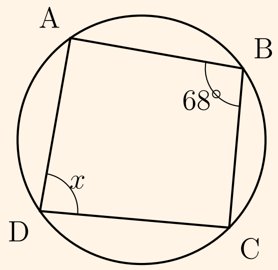
答え

$$125\text{cm}^2$$

6　単元まとめ練習問題

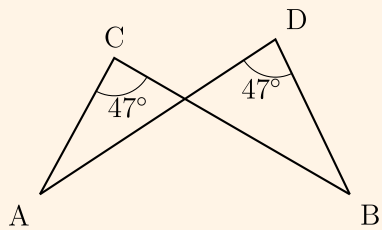
練習問題 まとめ 1

次の図で、A, B, C, D は円周上の点です。$\angle ABC = 68^\circ$ のとき、$\angle ADC$ を求めなさい。



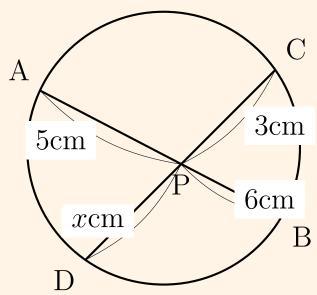
練習問題 まとめ 2

次の図で、$\angle ACB = 47^\circ$、$\angle ADB = 47^\circ$ です。4 点 A, B, C, D は同じ円周上にあるといえますか。



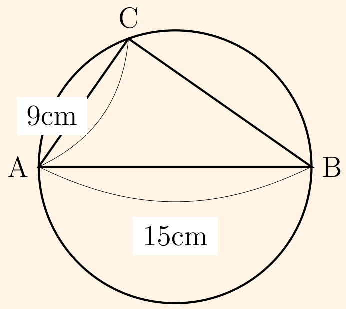
練習問題 まとめ 3

次の図で、弦 AB と弦 CD は点 P で交わっています。$AP = 5\text{cm}$、$PB = 6\text{cm}$、$CP = 3\text{cm}$ のとき、DP の長さを求めなさい。



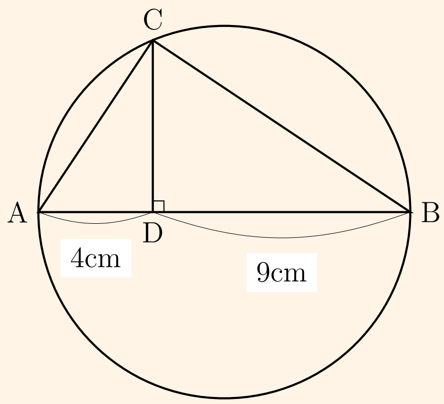
練習問題 まとめ 4

次の図で、AB は円の直径です。$AB = 15\text{cm}$、$AC = 9\text{cm}$ のとき、BC の長さを求めなさい。



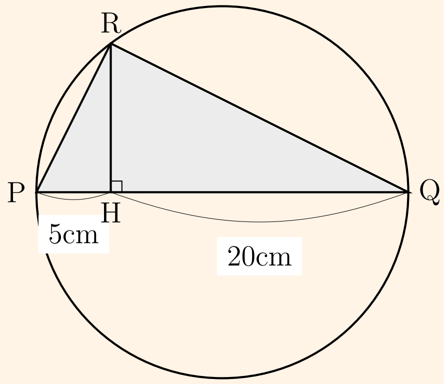
練習問題 まとめ 5

次の図で、AB は円の直径です。点 C から AB に垂線を下ろし、その足を D とします。$AD = 4\text{cm}$、$DB = 9\text{cm}$ のとき、CD の長さを求めなさい。



練習問題 まとめ 6

次の図で、PQ は円の直径です。点 R から PQ に垂線を下ろし、その足を H とします。$PH = 5\text{cm}$、$HQ = 20\text{cm}$ のとき、三角形 PQR の面積を求めなさい。



6.1 解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

四角形 $ABCD$ は円に内接しています。

向かい合う角の和は 180° なので、

$$\angle ADC = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$$

です。

答え

$$112^\circ$$

解答解説 まとめ 2

解き方

$\angle ACB$ と $\angle ADB$ は、どちらも線分 AB を見ています。

また、

$$\angle ACB = \angle ADB = 47^\circ$$

です。

したがって、円周角の定理の逆より、4 点 A, B, C, D は同じ円周上にあるといえます。

答え

いえる。

解答解説 まとめ 3

解き方

交わる弦の性質より、

$$AP \times PB = CP \times DP$$

です。

数を入れると、

$$5 \times 6 = 3 \times DP$$

です。

したがって、

$$30 = 3DP$$

なので、

$$DP = 10$$

です。

答え

10cm

解答解説 まとめ 4

解き方

AB は直径なので、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

です。

三平方の定理より、

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

です。

数を入れると、

$$9^2 + BC^2 = 15^2$$

です。

したがって、

$$BC^2 = 225 - 81 = 144$$

なので、

$$BC = 12$$

です。

答え

12cm

解答解説 まとめ 5

解き方

直角三角形の中の相似より、

$$CD^2 = AD \times DB$$

です。

数を入れると、

$$CD^2 = 4 \times 9 = 36$$

です。

したがって、

$$CD = 6$$

です。

答え

6cm

解答解説 まとめ 6

解き方

$PH = 5\text{cm}$、$HQ = 20\text{cm}$ なので、

$$PQ = 5 + 20 = 25$$

です。

直角三角形の中の相似より、

$$RH^2 = PH \times HQ = 5 \times 20 = 100$$

です。

したがって、

$$RH = 10$$

です。

三角形 PQR の面積は、

$$25 \times 10 \div 2 = 125$$

です。

答え

$$125\text{cm}^2$$

7　学習チェックリスト

学習チェックリスト

- □円に内接する四角形で、向かい合う角の和が 180° になることを使える。
- □円周角の定理の逆を使って、4 点が同じ円周上にあることを判断できる。
- □円周角から相似な三角形を見つけられる。
- □交わる弦の長さの関係を使える。
- □直径から直角三角形を見つけ、三平方の定理を使える。
- □直角三角形の中の相似を使って、長さや面積を求められる。

8 まとめ

円周角と中心角・応用編のまとめ

円周角の応用問題では、まず**同じ弧に対する角**を見つけます。

円に内接する四角形では、向かい合う角の和が 180° になります。

また、円周角の定理の逆を使うと、4 点が同じ円周上にあるかを判断できます。

長さを求める問題では、円周角で等しい角を見つけ、**相似な三角形**を作ることが大切です。

直径がある問題では、直径に対する円周角が 90° になるので、**三平方の定理**を使えることがあります。