中学数学

円周角と中心角

標準編

偏差値50前後からの入試基本対策

同じ弧を見つける力をつけ、
中心角・円周角・直径を使った標準問題を整理します。

KmKmの学習支援サイト

目次

1　この教材の使い方

この教材は、円周角と中心角の基本を学んだあと、入試の標準問題で安定して得点するための教材です。

角度を求めるだけでなく、**どの弧を見ている角なのか**、**中心角と円周角のどちらなのか**、**直径が使えるか**を確認しながら進めます。

標準編で身につけたいこと

- 中心角と円周角の関係を使って角度を求める。
- 同じ弧に対する円周角を見つける。
- 直径に対する円周角が 90° になることを使う。
- 円に内接する四角形の性質を使う。
- 円周角の定理の逆を使って、4 点が同じ円周上にあるか判断する。

注意 図を見るときの注意

角度が同じに見えても、必ず同じ弧を見ているとは限りません。まずは、角の両端がどの 2 点につながっているかを確認しましょう。

2　中心角と円周角の確認

2.1　中心角から円周角を求める

中心角と円周角の関係

同じ弧に対する中心角と円周角では、

$$中心角 = 2 \times 円周角$$

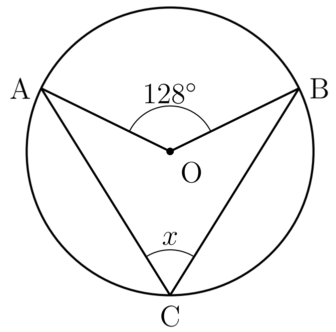
が成り立ちます。

したがって、円周角は中心角の半分です。

$$円周角 = 中心角 \div 2$$

例題 1

次の図で、O は円の中心です。$\angle AOB = 128^\circ$ のとき、$\angle ACB$ を求めなさい。



方針

中心角と円周角が、同じ弧 AB に対する角であることを確認します。

解き方

$\angle AOB$ は中心角、$\angle ACB$ は円周角です。

どちらも同じ弧 AB に対する角なので、円周角は中心角の半分です。

したがって、

$$\angle ACB = 128^\circ \div 2 = 64^\circ$$

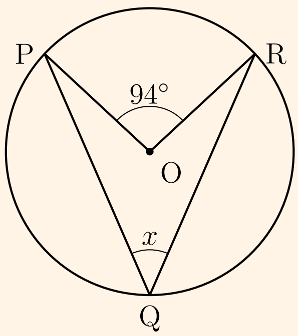
です。

答え

$$64^\circ$$

練習問題 1

次の図で、O は円の中心です。$\angle POR = 94^\circ$ のとき、$\angle PQR$ を求めなさい。



解答解説 1

解き方

$\angle POR$ は中心角、$\angle PQR$ は円周角です。

どちらも同じ弧 PR に対する角です。

したがって、

$$\angle PQR = 94^\circ \div 2 = 47^\circ$$

です。

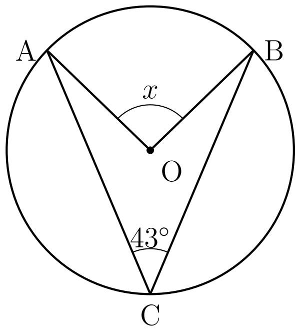
答え

$$47^\circ$$

2.2 円周角から中心角を求める

例題 2

次の図で、O は円の中心です。$\angle ACB = 43^\circ$ のとき、$\angle AOB$ を求めなさい。



方針

中心角は、同じ弧に対する円周角の 2 倍です。

解き方

$\angle ACB$ は円周角、$\angle AOB$ は中心角です。

どちらも同じ弧 AB に対する角なので、中心角は円周角の 2 倍です。

したがって、

$$\angle AOB = 43^\circ \times 2 = 86^\circ$$

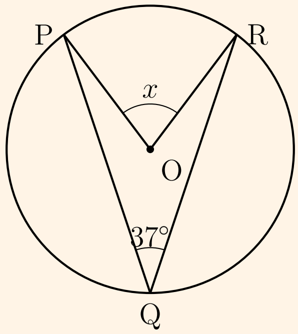
です。

答え

$$86^\circ$$

練習問題 2

次の図で、O は円の中心です。$\angle PQR = 37°$ のとき、$\angle POR$ を求めなさい。



解答解説 2

解き方

$\angle PQR$ は円周角、$\angle POR$ は中心角です。

どちらも同じ弧 PR に対する角です。

したがって、

$$\angle POR = 37^\circ \times 2 = 74^\circ$$

です。

答え

$$74^\circ$$

3　同じ弧に対する円周角

3.1　同じ弧を見ている角

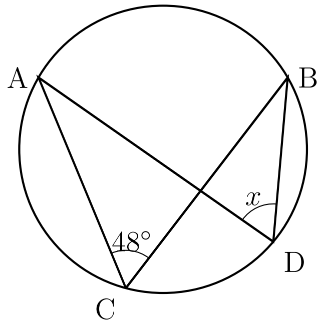
同じ弧に対する円周角

同じ弧に対する円周角は等しくなります。

図で角度を求めるときは、角の両端がどの 2 点につながっているかを確認し、**同じ弧を見ている角**を探します。

例題 3

次の図で、A, B, C, D は円周上の点です。$\angle ACB = 48^\circ$ のとき、$\angle ADB$ を求めなさい。



方針

$\angle ACB$ と $\angle ADB$ が、どちらも弧 AB を見ていることを確認します。

解き方

$\angle ACB$ と $\angle ADB$ は、どちらも弧 AB に対する円周角です。

同じ弧に対する円周角は等しいので、

$$\angle ADB = \angle ACB = 48^\circ$$

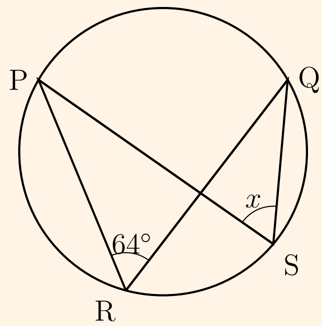
です。

答え

$$48^\circ$$

練習問題 3

次の図で、P, Q, R, S は円周上の点です。$\angle PRQ = 64^\circ$ のとき、$\angle PSQ$ を求めなさい。



解答解説 3

解き方

$\angle PRQ$ と $\angle PSQ$ は、どちらも弧 PQ に対する円周角です。

同じ弧に対する円周角は等しいので、

$$\angle PSQ = \angle PRQ = 64^\circ$$

です。

答え

$$64^\circ$$

4　直径を使う問題

4.1　直径に対する円周角

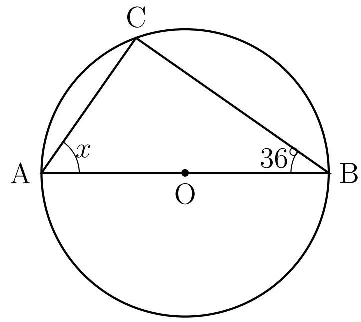
直径と円周角

直径に対する円周角は、いつも 90° です。

直径が図にあるときは、まず直角を作れないか確認しましょう。

例題 4

次の図で、AB は円の直径です。$\angle CBA = 36°$ のとき、$\angle BAC$ を求めなさい。



方針

直径 AB に対する円周角 $\angle ACB$ が $90°$ であることを使います。

解き方

AB は直径なので、

$$\angle ACB = 90°$$

です。

三角形 ABC の内角の和は $180°$ なので、

$$\angle BAC = 180° - 90° - 36° = 54°$$

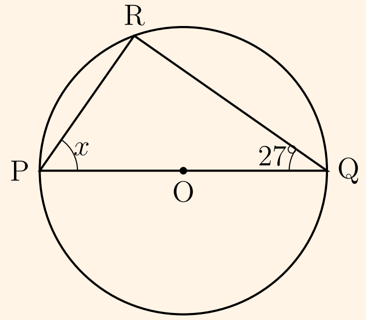
です。

答え

$$54°$$

練習問題 4

次の図で、PQ は円の直径です。$\angle PQR = 27^\circ$ のとき、$\angle QPR$ を求めなさい。



解答解説 4

解き方

PQ は直径なので、

$$\angle PRQ = 90^\circ$$

です。

三角形 PQR の内角の和は 180° なので、

$$\angle QPR = 180^\circ - 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$$

です。

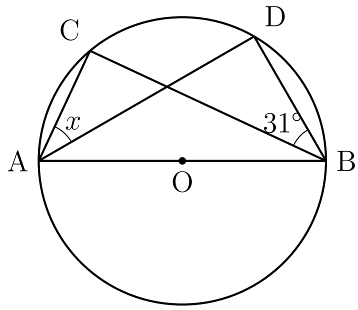
答え

$$63^\circ$$

4.2　直径と同じ弧の組み合わせ

例題 5

次の図で、AB は円の直径です。C, D は円周上の点です。$\angle CBD = 31°$ のとき、$\angle CAD$ を求めなさい。



方針

$\angle CBD$ と $\angle CAD$ が、どちらも弧 CD を見ていることを確認します。

解き方

$\angle CBD$ と $\angle CAD$ は、どちらも弧 CD に対する円周角です。

同じ弧に対する円周角は等しいので、

$$\angle CAD = \angle CBD = 31°$$

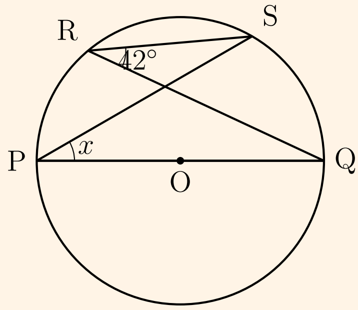
です。

答え

$$31°$$

練習問題 5

次の図で、PQ は円の直径です。R, S は円周上の点です。$\angle QRS = 42^\circ$ のとき、$\angle QPS$ を求めなさい。



解答解説 5

解き方

$\angle QRS$ と $\angle QPS$ は、どちらも弧 QS に対する円周角です。

同じ弧に対する円周角は等しいので、

$$\angle QPS = \angle QRS = 42^\circ$$

です。

答え

$$42^\circ$$

5　円に内接する四角形

5.1　向かい合う角の和

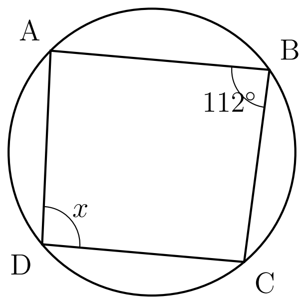
円に内接する四角形の性質

4 つの頂点が同じ円周上にある四角形では、向かい合う角の和が 180° になります。

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \qquad \angle B + \angle D = 180^\circ$$

例題 6

次の図で、四角形 $ABCD$ は円に内接しています。$\angle ABC = 112^\circ$ のとき、$\angle ADC$ を求めなさい。



方針

円に内接する四角形では、向かい合う角の和が 180° です。

解き方

四角形 $ABCD$ は円に内接しています。

$\angle ABC$ と $\angle ADC$ は向かい合う角なので、

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

です。

したがって、

$$\angle ADC = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$$

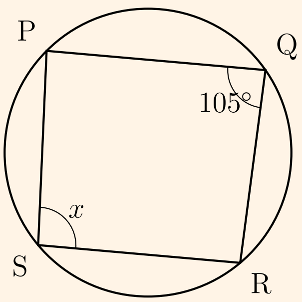
です。

答え

$$68^\circ$$

練習問題 6

次の図で、四角形 $PQRS$ は円に内接しています。$\angle PQR = 105^\circ$ のとき、$\angle PSR$ を求めなさい。



解答解説 6

解き方

四角形 $PQRS$ は円に内接しています。

$\angle PQR$ と $\angle PSR$ は向かい合う角なので、

$$\angle PQR + \angle PSR = 180^\circ$$

です。

したがって、

$$\angle PSR = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

です。

答え

$$75^\circ$$

6　円周角の定理の逆

6.1　4 点が同じ円周上にあるか判断する

円周角の定理の逆

2 点 A, B に対して、点 P と点 Q が同じ側にあり、

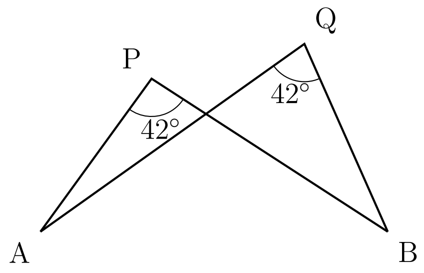
$$\angle APB = \angle AQB$$

なら、4 点 A, B, P, Q は同じ円周上にあります。

これは、**円周角の定理の逆**とよばれます。

例題 7

次の図で、$\angle APB = 42°$、$\angle AQB = 42°$ です。4 点 A, B, P, Q は同じ円周上にあるといえますか。



方針

同じ線分 AB を見ている 2 つの角が等しいかを確認します。

解き方

$\angle APB$ と $\angle AQB$ は、どちらも線分 AB を見ている角です。

また、

$$\angle APB = 42°, \qquad \angle AQB = 42°$$

なので、

$$\angle APB = \angle AQB$$

です。

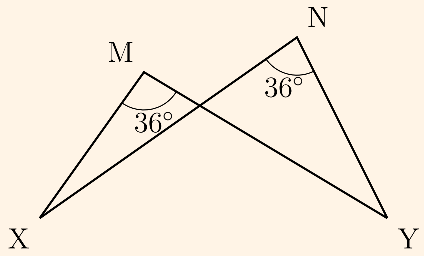
したがって、円周角の定理の逆より、4 点 A, B, P, Q は同じ円周上にあります。

答え

いえる

練習問題 7

次の図で、$\angle XMY = 36^\circ$、$\angle XNY = 36^\circ$ です。4 点 X, Y, M, N は同じ円周上にあるといえますか。



解答解説 7

解き方

$\angle XMY$ と $\angle XNY$ は、どちらも線分 XY を見ている角です。

また、

$$\angle XMY = 36^\circ, \qquad \angle XNY = 36^\circ$$

なので、

$$\angle XMY = \angle XNY$$

です。

したがって、円周角の定理の逆より、4 点 X, Y, M, N は同じ円周上にあります。

答え

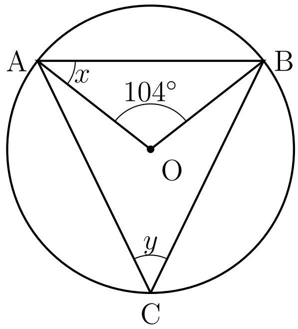
いえる

7　入試標準につながる複合問題

7.1　中心角と二等辺三角形

例題 8

次の図で、O は円の中心です。$\angle AOB = 104^\circ$ のとき、$\angle OAB$ と $\angle ACB$ を求めなさい。



方針

$OA = OB$ なので三角形 AOB は二等辺三角形です。また、円周角は中心角の半分です。

解き方

O は円の中心なので、$OA = OB$ です。

したがって、三角形 AOB は二等辺三角形です。

三角形 AOB の内角の和より、

$$\angle OAB = \frac{180^\circ - 104^\circ}{2} = 38^\circ$$

です。

また、$\angle AOB$ は弧 AB に対する中心角、$\angle ACB$ は同じ弧 AB に対する円周角です。

したがって、

$$\angle ACB = 104^\circ \div 2 = 52^\circ$$

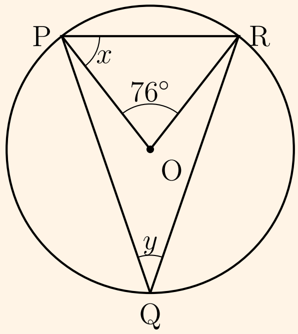
です。

答え

$$\angle OAB = 38^\circ, \qquad \angle ACB = 52^\circ$$

練習問題 8

次の図で、O は円の中心です。$\angle POR = 76^\circ$ のとき、$\angle OPR$ と $\angle PQR$ を求めなさい。



解答解説 8

解き方

O は円の中心なので、$OP = OR$ です。

したがって、三角形 POR は二等辺三角形です。

三角形 POR の内角の和より、

$$\angle OPR = \frac{180^\circ - 76^\circ}{2} = 52^\circ$$

です。

また、$\angle POR$ は弧 PR に対する中心角、$\angle PQR$ は同じ弧 PR に対する円周角です。

したがって、

$$\angle PQR = 76^\circ \div 2 = 38^\circ$$

です。

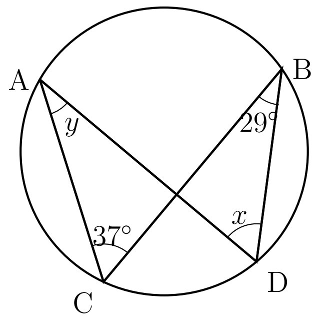
答え

$$\angle OPR = 52^\circ, \qquad \angle PQR = 38^\circ$$

7.2 複数の円周角を組み合わせる

例題 9

次の図で、A, B, C, D は円周上の点です。$\angle ACB = 37^\circ$、$\angle CBD = 29^\circ$ のとき、$\angle ADB$ と $\angle CAD$ を求めなさい。



方針

$\angle ACB$ と $\angle ADB$ は弧 AB を見ています。$\angle CBD$ と $\angle CAD$ は弧 CD を見ています。

解き方

$\angle ACB$ と $\angle ADB$ は、どちらも弧 AB に対する円周角です。

したがって、

$$\angle ADB = \angle ACB = 37^\circ$$

です。

また、$\angle CBD$ と $\angle CAD$ は、どちらも弧 CD に対する円周角です。

したがって、

$$\angle CAD = \angle CBD = 29^\circ$$

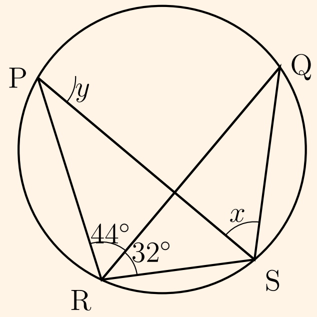
です。

答え

$$\angle ADB = 37^\circ, \qquad \angle CAD = 29^\circ$$

練習問題 9

次の図で、P, Q, R, S は円周上の点です。$\angle PRQ = 44°$、$\angle QRS = 32°$ のとき、$\angle PSQ$ と $\angle QPS$ を求めなさい。



解答解説 9

解き方

$\angle PRQ$ と $\angle PSQ$ は、どちらも弧 PQ に対する円周角です。

したがって、

$$\angle PSQ = \angle PRQ = 44^\circ$$

です。

また、$\angle QRS$ と $\angle QPS$ は、どちらも弧 QS に対する円周角です。

したがって、

$$\angle QPS = \angle QRS = 32^\circ$$

です。

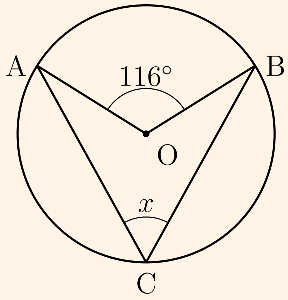
答え

$$\angle PSQ = 44^\circ, \qquad \angle QPS = 32^\circ$$

8　単元まとめ練習問題

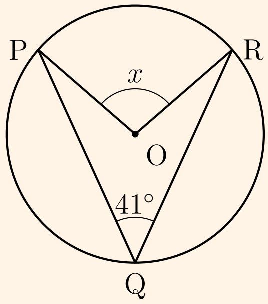
練習問題 まとめ 1

次の図で、O は円の中心です。$\angle AOB = 116^\circ$ のとき、$\angle ACB$ を求めなさい。



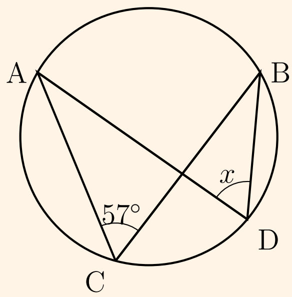
練習問題 まとめ 2

次の図で、O は円の中心です。$\angle PQR = 41^\circ$ のとき、$\angle POR$ を求めなさい。



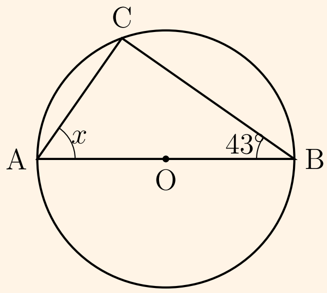
練習問題 まとめ 3

次の図で、A, B, C, D は円周上の点です。$\angle ACB = 57^\circ$ のとき、$\angle ADB$ を求めなさい。



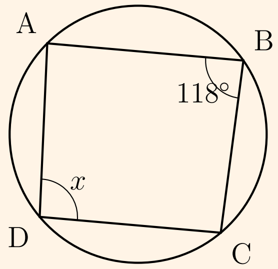
練習問題 まとめ 4

次の図で、AB は円の直径です。$\angle CBA = 43^\circ$ のとき、$\angle BAC$ を求めなさい。



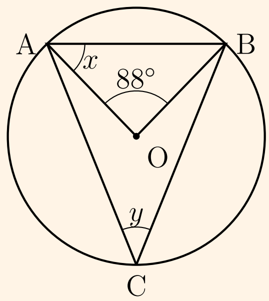
練習問題 まとめ 5

次の図で、四角形 $ABCD$ は円に内接しています。$\angle ABC = 118^\circ$ のとき、$\angle ADC$ を求めなさい。



練習問題 まとめ 6

次の図で、O は円の中心です。$\angle AOB = 88^\circ$ のとき、$\angle OAB$ と $\angle ACB$ を求めなさい。



8.1 解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

$\angle AOB$ は中心角、$\angle ACB$ は円周角です。

どちらも同じ弧 AB に対する角なので、

$$\angle ACB = 116^\circ \div 2 = 58^\circ$$

です。

答え

$$58^\circ$$

解答解説 まとめ 2

解き方

$\angle PQR$ は円周角、$\angle POR$ は中心角です。

どちらも同じ弧 PR に対する角なので、

$$\angle POR = 41^\circ \times 2 = 82^\circ$$

です。

答え

$$82^\circ$$

解答解説 まとめ 3

解き方

$\angle ACB$ と $\angle ADB$ は、どちらも弧 AB に対する円周角です。

同じ弧に対する円周角は等しいので、

$$\angle ADB = 57^\circ$$

です。

答え

$$57^\circ$$

解答解説 まとめ 4

解き方

AB は直径なので、

$$\angle ACB = 90^\circ$$

です。

三角形 ABC の内角の和より、

$$\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$$

です。

答え

$$47^\circ$$

解答解説 まとめ 5

解き方

円に内接する四角形では、向かい合う角の和が 180° です。

したがって、

$$\angle ADC = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$$

です。

答え

$$62^\circ$$

解答解説 まとめ 6

解き方

$OA = OB$ なので、三角形 AOB は二等辺三角形です。

したがって、

$$\angle OAB = \frac{180^\circ - 88^\circ}{2} = 46^\circ$$

です。

また、$\angle ACB$ は、中心角 $\angle AOB$ と同じ弧 AB に対する円周角です。

したがって、

$$\angle ACB = 88^\circ \div 2 = 44^\circ$$

です。

答え

$$\angle OAB = 46^\circ, \qquad \angle ACB = 44^\circ$$

9　学習チェックリスト

できるようになったか確認しよう

- □中心角と円周角の関係を使って角度を求められる。
- □同じ弧に対する円周角を見つけられる。
- □直径に対する円周角が 90° になることを使える。
- □円に内接する四角形の向かい合う角の和を使える。
- □円周角の定理の逆を説明できる。
- □中心と半径を使い、二等辺三角形を見つけられる。

10　まとめ

円周角と中心角・標準編のまとめ

- 中心角は、同じ弧に対する円周角の 2 倍です。
- 円周角は、同じ弧に対する中心角の半分です。
- 同じ弧に対する円周角は等しくなります。
- 直径に対する円周角は $90°$ です。
- 円に内接する四角形では、向かい合う角の和が $180°$ です。
- 同じ線分を見る角が等しいとき、4 点が同じ円周上にあると判断できることがあります。

注意 次の応用編に向けて

応用編では、補助線を引いたり、複数の円周角を組み合わせたりする問題を扱います。標準編では、まず「同じ弧を見ている角」を正確に見つける力を固めましょう。