中学数学

合同

応用編

偏差値55以上を目指す証明・図形問題対策

重なった図形・補助線・複数の条件を整理して、
入試標準から応用レベルの合同証明に取り組みます。

目次

1　この教材の使い方

この教材は、合同の基礎・標準を学んだあとに、入試の中問から大問につながる証明問題に取り組むための教材です。図の中に隠れている条件を見つけ、合同を証明したあとで、長さや角度を求める問題まで扱います。

応用編で身につけること

- 重なった三角形から、証明に使う 2 つの三角形を見つける。
- 共通な辺、対頂角、平行線、二等辺三角形の性質を証明に使う。
- 合同を証明したあと、対応する辺や角が等しいことを使って答えを出す。
- 必要に応じて補助線を引き、合同な三角形を作る。

注意 応用問題の進め方

いきなり証明を書き始めるのではなく、まず図の中で「等しいと分かるもの」に印をつけます。次に、どの合同条件が使えそうかを考えます。最後に、対応する順番をそろえて証明します。

2　重なった三角形の合同

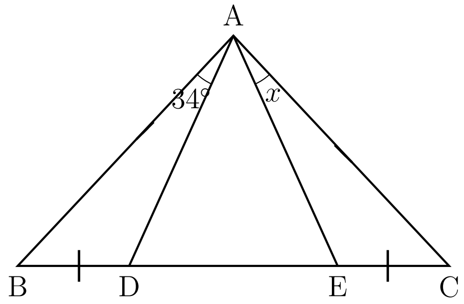
2.1　二等辺三角形の中にある合同

重なった図形の見方

図形が重なっているときは、まず使う三角形をはっきりさせます。二等辺三角形では、等しい辺と底角が使えることが多いです。

例題 1

二等辺三角形 ABC で、$AB = AC$ です。辺 BC 上に点 D, E をとり、$BD = CE$ とします。また、$\angle BAD = 34°$ です。$\angle CAE$ の大きさを求めなさい。



方針

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ の合同を証明して、対応する角を使います。

解き方

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において、二等辺三角形 ABC より、

$$AB = AC$$

です。

仮定より、

$$BD = CE$$

です。

また、二等辺三角形 ABC の底角は等しいので、

$$\angle ABD = \angle ACE$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$$

です。

合同な三角形の対応する角は等しいので、

$$\angle BAD = \angle CAE$$

です。

$\angle BAD = 34^\circ$ より、

$$\angle CAE = 34^\circ$$

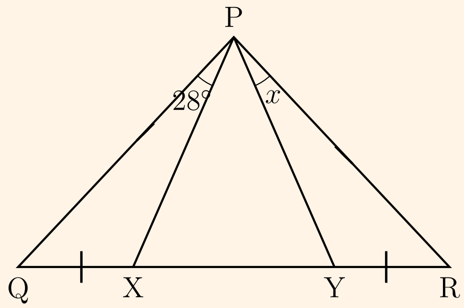
です。

答え

$$34^\circ$$

練習問題 1

二等辺三角形 PQR で、$PQ = PR$ です。辺 QR 上に点 X, Y をとり、$QX = YR$ とします。また、$\angle QPX = 28^\circ$ です。$\angle YPR$ の大きさを求めなさい。



解答解説 1

解き方

$\triangle PQX$ と $\triangle PRY$ において、二等辺三角形 PQR より $PQ = PR$ です。仮定より $QX = YR$ です。

二等辺三角形 PQR の底角は等しいので、

$$\angle PQX = \angle PRY$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQX \equiv \triangle PRY$$

です。

対応する角は等しいので、

$$\angle QPX = \angle YPR$$

です。

$\angle QPX = 28^\circ$ より、

$$\angle YPR = 28^\circ$$

です。

答え

$$28^\circ$$

3　対頂角を使う応用証明

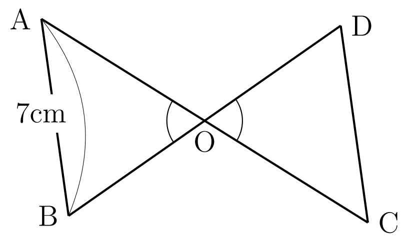
3.1　交わる線の中の合同

対頂角と対応する辺

2 本の直線が交わる図では、対頂角が等しくなります。交点を含む三角形を選ぶと、合同条件がそろいやすくなります。

例題 2

次の図で、点 O は線分 AC と線分 BD の交点です。$AO = CO$、$BO = DO$、$AB = 7\text{cm}$ です。辺 CD の長さを求めなさい。



方針

$\triangle AOB$ と $\triangle COD$ の合同を証明し、対応する辺を使います。

解き方

$\triangle AOB$ と $\triangle COD$ において、仮定より、

$$AO = CO,$$

$$BO = DO$$

です。

また、対頂角は等しいので、

$$\angle AOB = \angle COD$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AOB \equiv \triangle COD$$

です。

合同な三角形の対応する辺は等しいので、

$$AB = CD$$

です。

$AB = 7\text{cm}$ より、

$$CD = 7\text{cm}$$

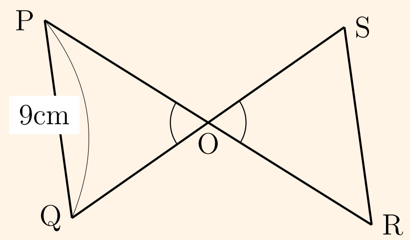
です。

答え

7cm

練習問題 2

次の図で、点 O は線分 PR と線分 QS の交点です。$PO = RO$、$QO = SO$、$PQ = 9\text{cm}$ です。辺 RS の長さを求めなさい。



解答解説 2

解き方

$\triangle POQ$ と $\triangle ROS$ において、仮定より、

$$PO = RO,$$

$$QO = SO$$

です。

また、対頂角は等しいので、

$$\angle POQ = \angle ROS$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle POQ \equiv \triangle ROS$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$PQ = RS$$

です。

$PQ = 9\text{cm}$ より、

$$RS = 9\text{cm}$$

です。

答え

$$9\text{cm}$$

4　平行線を使う応用証明

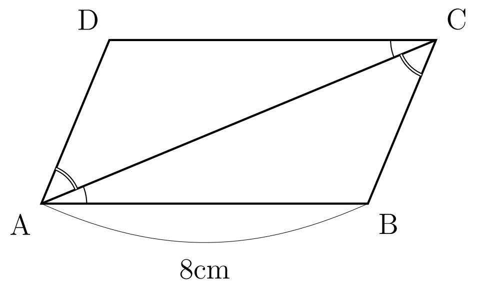
4.1　平行線から角をそろえる

錯角・同位角を証明に使う

平行線があるとき、錯角や同位角が等しくなります。合同条件の角が足りないときは、平行線から等しい角を見つけます。

例題 3

次の図で、$AB \parallel DC$、$AD \parallel BC$ です。また、$AB = 8\text{cm}$ です。辺 DC の長さを求めなさい。



方針

対角線 AC でできる 2 つの三角形を合同にして、対応する辺を使います。

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、$AB \parallel DC$ より、錯角は等しいので、

$$\angle BAC = \angle DCA$$

です。

また、$AD \parallel BC$ より、錯角は等しいので、

$$\angle BCA = \angle CAD$$

です。

さらに、AC は共通な辺なので、

$$AC = CA$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$AB = DC$$

です。

$AB = 8\text{cm}$ より、

$$DC = 8\text{cm}$$

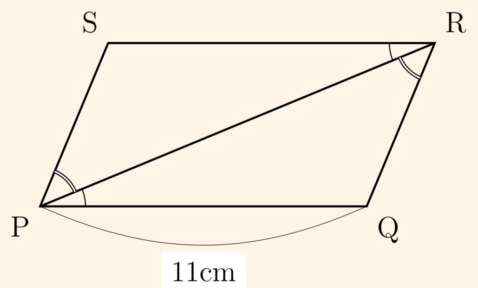
です。

答え

8cm

練習問題 3

次の図で、$PQ \parallel SR$、$PS \parallel QR$ です。また、$PQ = 11\text{cm}$ です。辺 SR の長さを求めなさい。



解答解説 3

解き方

$\triangle PQR$ と $\triangle RSP$ において、$PQ \parallel SR$ より、錯角は等しいので、

$$\angle QPR = \angle SRP$$

です。

また、$PS \parallel QR$ より、錯角は等しいので、

$$\angle PRQ = \angle RPS$$

です。

さらに、PR は共通な辺なので、

$$PR = RP$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQR \equiv \triangle RSP$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$PQ = SR$$

です。

$PQ = 11\text{cm}$ より、

$$SR = 11\text{cm}$$

です。

答え

$$11\text{cm}$$

5 補助線を使う合同

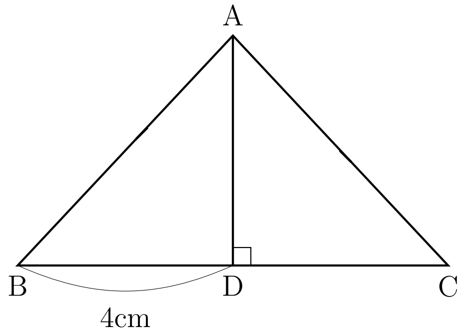
5.1 補助線で共通な辺を作る

補助線の考え方

証明したいことがそのままでは見えにくいとき、補助線を引いて合同な三角形を作ります。応用問題では、どの線を引くかが大切です。

例題 4

$AB = AC$ である三角形 ABC があります。点 A から辺 BC に垂線 AD を引くと、D は辺 BC 上の点になりました。$BD = 4\text{cm}$ のとき、DC の長さを求めなさい。



方針

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の合同を証明して、対応する辺を使います。

解き方

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、仮定より、

$$AB = AC$$

です。

AD は共通な辺なので、

$$AD = AD$$

です。

また、$AD \perp BC$ より、

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

です。

したがって、直角三角形で、斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$BD = DC$$

です。

$BD = 4\mathrm{cm}$ より、

$$DC = 4\mathrm{cm}$$

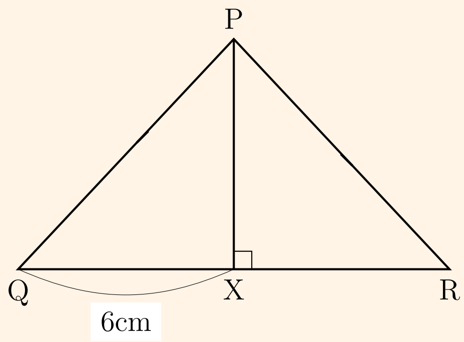
です。

答え

$$4\mathrm{cm}$$

練習問題 4

$PQ = PR$ である三角形 PQR があります。点 P から辺 QR に垂線 PX を引くと、X は辺 QR 上の点になりました。$QX = 6\mathrm{cm}$ のとき、XR の長さを求めなさい。



解答解説 4

解き方

$\triangle PQX$ と $\triangle PRX$ において、仮定より、

$$PQ = PR$$

です。

PX は共通な辺なので、

$$PX = PX$$

です。

また、$PX \perp QR$ より、

$$\angle PXQ = \angle PXR = 90^\circ$$

です。

したがって、直角三角形で、斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQX \equiv \triangle PRX$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$QX = XR$$

です。

$QX = 6\text{cm}$ より、

$$XR = 6\text{cm}$$

です。

答え

$$6\text{cm}$$

6　合同を使って図形の性質を証明する

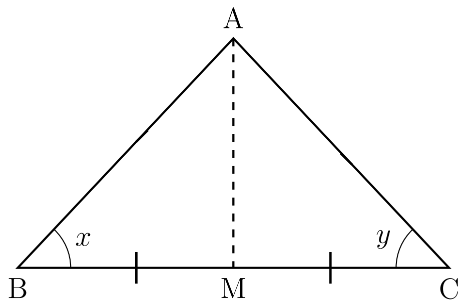
6.1　二等辺三角形の性質を合同で示す

性質を証明する問題

「長さを求める」だけでなく、「角が等しいことを証明する」問題も出ます。合同を使えば、図形の性質そのものを示せます。

例題 5

$AB = AC$ である三角形 ABC について、$\angle B = \angle C$ であることを証明しなさい。



方針

辺 BC の中点 M をとり、$\triangle ABM$ と $\triangle ACM$ の合同を示します。

解き方

辺 BC の中点を M とします。

$\triangle ABM$ と $\triangle ACM$ において、仮定より、

$$AB = AC$$

です。

M は辺 BC の中点なので、

$$BM = CM$$

です。

また、AM は共通な辺なので、

$$AM = AM$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$$

です。

合同な三角形の対応する角は等しいので、

$$\angle B = \angle C$$

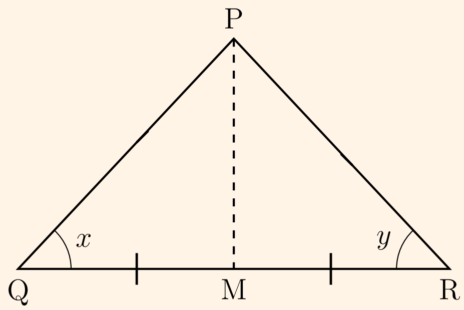
です。

答え

証明より、$\angle B = \angle C$ である。

練習問題 5

$PQ = PR$ である三角形 PQR について、$\angle Q = \angle R$ であることを証明しなさい。必要なら、辺 QR の中点を M として考えなさい。



解答解説 5

解き方

辺 QR の中点を M とします。

$\triangle PQM$ と $\triangle PRM$ において、仮定より、

$$PQ = PR$$

です。

M は辺 QR の中点なので、

$$QM = RM$$

です。

また、PM は共通な辺なので、

$$PM = PM$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQM \equiv \triangle PRM$$

です。

合同な三角形の対応する角は等しいので、

$$\angle Q = \angle R$$

です。

答え

証明より、$\angle Q = \angle R$ である。

7 複数の条件を組み合わせる問題

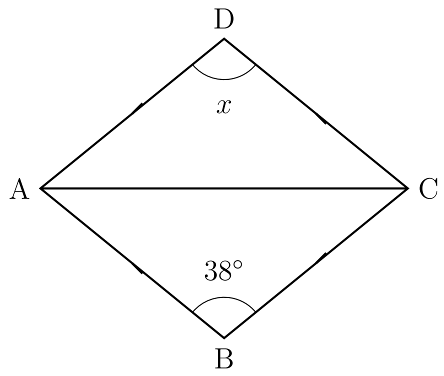
7.1 合同を証明してから角度を求める

証明と計算の組み合わせ

応用問題では、合同を証明したあとで、対応する角を使って角度を求めます。証明と計算を分けて考えると整理できます。

例題 6

次の図で、$AB = AD$、$BC = DC$ です。$\angle ABC = 38°$ のとき、$\angle ADC$ の大きさを求めなさい。



方針

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ の合同を示して、対応する角を使います。

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ において、仮定より、

$$AB = AD,$$

$$BC = DC$$

です。

また、AC は共通な辺なので、

$$AC = AC$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$$

です。

合同な三角形の対応する角は等しいので、

$$\angle ABC = \angle ADC$$

です。

$\angle ABC = 38^\circ$ より、

$$\angle ADC = 38^\circ$$

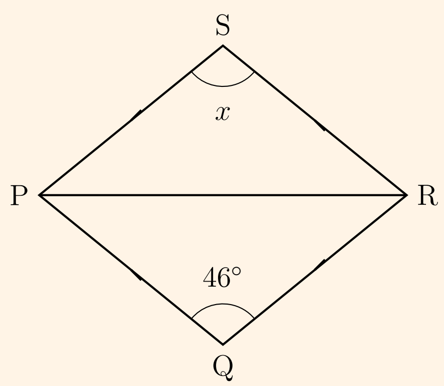
です。

答え

$$38^\circ$$

練習問題 6

次の図で、$PQ = PS$、$QR = SR$ です。$\angle PQR = 46^\circ$ のとき、$\angle RSP$ の大きさを求めなさい。



解答解説 6

解き方

$\triangle PQR$ と $\triangle PSR$ において、仮定より、

$$PQ = PS,$$

$$QR = SR$$

です。

また、PR は共通な辺なので、

$$PR = PR$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQR \equiv \triangle PSR$$

です。

対応する角は等しいので、

$$\angle PQR = \angle RSP$$

です。

$\angle PQR = 46^\circ$ より、

$$\angle RSP = 46^\circ$$

です。

答え

$$46^\circ$$

8　証明を組み立てる発展問題

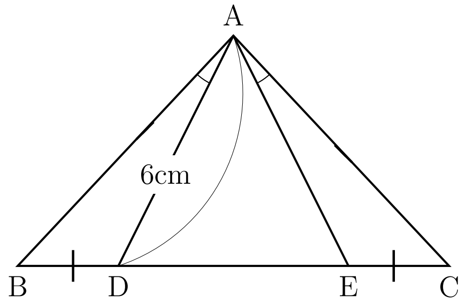
8.1　条件を順番に取り出す

証明の流れを作る

発展問題では、問題文の条件、図から分かる条件、すでに証明したことを順番に使います。最初に合同を証明し、次に必要な長さや角度に結びつけます。

例題 7

次の図で、$AB = AC$、$BD = CE$、$\angle BAD = \angle CAE$ です。$AD = 6\text{cm}$ のとき、AE の長さを求めなさい。



方針

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ で、2 組の辺とその間の角をそろえます。

解き方

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において、仮定より、

$$AB = AC,$$

$$BD = CE,$$

$$\angle BAD = \angle CAE$$

です。

ここで、$\angle BAD$ は辺 AB と辺 AD にはさまれた角ではありません。したがって、このままでは合同条件が使えません。

そこで、二等辺三角形 ABC の底角が等しいことに注目します。

$$\angle ABD = \angle ACE$$

です。

よって、$AB = AC$、$BD = CE$、$\angle ABD = \angle ACE$ より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$AD = AE$$

です。

$AD = 6\text{cm}$ より、

$$AE = 6\text{cm}$$

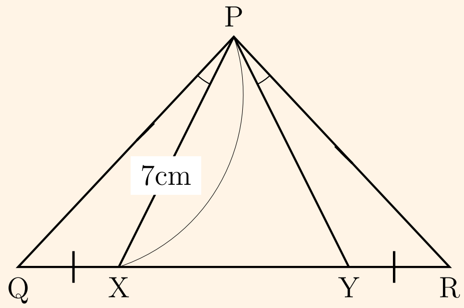
です。

答え

6cm

練習問題 7

次の図で、$PQ = PR$、$QX = YR$、$\angle QPX = \angle YPR$ です。$PX = 7\text{cm}$ のとき、PY の長さを求めなさい。



解答解説 7

解き方

$\triangle PQX$ と $\triangle PRY$ において、仮定より、

$$PQ = PR,$$

$$QX = YR$$

です。

また、二等辺三角形 PQR の底角は等しいので、

$$\angle PQX = \angle PRY$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQX \equiv \triangle PRY$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$PX = PY$$

です。

$PX = 7\text{cm}$ より、

$$PY = 7\text{cm}$$

です。

答え

$$7\text{cm}$$

9　入試大問につながる証明問題

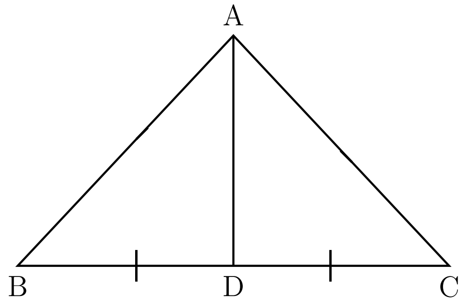
9.1　補助線を引いて合同を作る

補助線で見えない三角形を作る

合同を使う問題では、必要な三角形が最初から図に見えていないことがあります。補助線を引くことで、共通な辺や等しい角を作ります。

例題 8

三角形 ABC で、$AB = AC$ です。点 D は辺 BC 上の点で、$BD = DC$ です。点 A と点 D を結ぶとき、$AD \perp BC$ であることを証明しなさい。



方針

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の合同を証明し、$\angle ADB$ と $\angle ADC$ が等しいことを使います。

解き方

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、仮定より、

$$AB = AC,$$

$$BD = DC$$

です。

また、AD は共通な辺なので、

$$AD = AD$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

です。

合同な三角形の対応する角は等しいので、

$$\angle ADB = \angle ADC$$

です。

点 B、D、C は一直線上にあるので、

$$\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$$

です。

等しい 2 つの角の和が 180° なので、

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

です。

したがって、

$$AD \perp BC$$

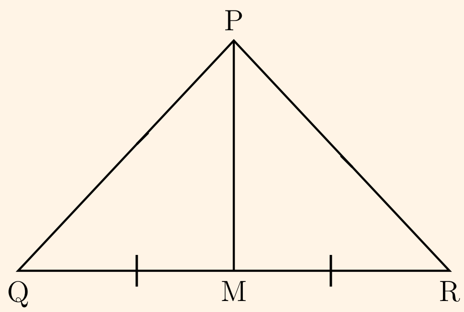
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 8

三角形 PQR で、$PQ = PR$ です。点 M は辺 QR 上の点で、$QM = MR$ です。点 P と点 M を結ぶとき、$PM \perp QR$ であることを証明しなさい。



解答解説 8

解き方

$\triangle PQM$ と $\triangle PRM$ において、仮定より、

$$PQ = PR,$$

$$QM = MR$$

です。

また、PM は共通な辺なので、

$$PM = PM$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQM \equiv \triangle PRM$$

です。

対応する角は等しいので、

$$\angle QMP = \angle RMP$$

です。

点 Q、M、R は一直線上にあるので、

$$\angle QMP + \angle RMP = 180^\circ$$

です。

等しい 2 つの角の和が 180° なので、

$$\angle QMP = \angle RMP = 90^\circ$$

です。

したがって、

$$PM \perp QR$$

です。

答え

上の証明の通り。

10　さらに挑戦する問題

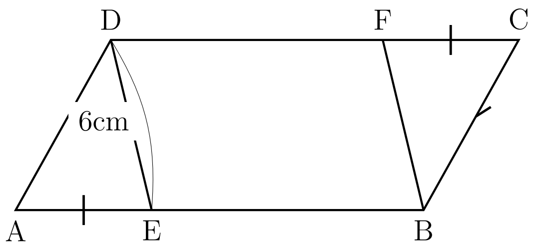
10.1　平行四辺形や二等辺三角形を組み合わせる

少し難しい問題の見方

応用問題では、1 つの条件だけでは合同にならないことがあります。平行線から角を見つけたり、二等辺三角形の性質と組み合わせたりして、必要な 3 つの条件をそろえます。

例題 9

平行四辺形 $ABCD$ があります。辺 AB 上に点 E、辺 CD 上に点 F をとり、$AE = CF$ とします。$DE = 6\text{cm}$ のとき、BF の長さを求めなさい。



方針

$\triangle DAE$ と $\triangle BCF$ の合同を証明し、対応する辺を使います。

解き方

$\triangle DAE$ と $\triangle BCF$ において、平行四辺形より、

$$AD = BC$$

です。

また、仮定より、

$$AE = CF$$

です。

さらに、$AD \parallel BC$ で、AE は辺 AB 上、CF は辺 CD 上にあるので、

$$\angle DAE = \angle BCF$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle DAE \equiv \triangle BCF$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$DE = BF$$

です。

$DE = 6\mathrm{cm}$ より、

$$BF = 6\mathrm{cm}$$

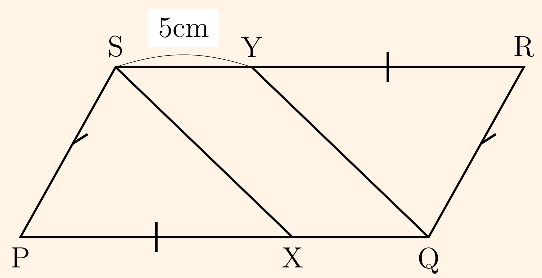
です。

答え

$$6\mathrm{cm}$$

練習問題 9

平行四辺形 $PQRS$ があります。辺 PQ 上に点 X、辺 SR 上に点 Y をとり、$PX = RY$ とします。$SY = 5\mathrm{cm}$ のとき、QX の長さを求めなさい。



解答解説 9

解き方

$PQ = SR$ より、

$$QX = PQ - PX, \qquad SY = SR - RY$$

です。

平行四辺形では向かい合う辺が等しいので、

$$PQ = SR$$

です。

また、仮定より、

$$PX = RY$$

です。

したがって、等しいものから等しいものを引くと、

$$PQ - PX = SR - RY$$

です。

よって、

$$QX = SY$$

となります。

$SY = 5\text{cm}$ より、

$$QX = 5\text{cm}$$

です。

答え

5cm

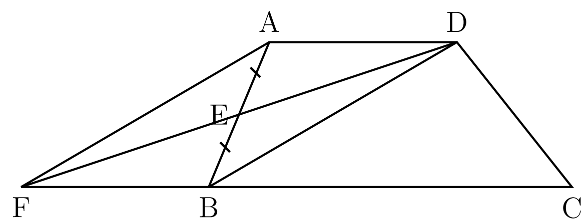
10.2 平行四辺形・平行線・折り返しの証明

新しい証明問題の見方

このあたりの問題では、**中点**、**平行線**、**折り返し**の 3 つがよく出てきます。合同な三角形を見つけるだけでなく、**中点どうしを結ぶ線**や、**対角線がそれぞれの中点で交わること**にも注目しましょう。

例題 10

図のように、$AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があります。辺 AB の中点を E とし、直線 DE と直線 BC の延長との交点を F とします。このとき、四角形 $AFBD$ が平行四辺形であることを証明しなさい。



方針

E が AB の中点であることを使い、$\triangle AED$ と $\triangle BEF$ を合同にします。

解き方

E は辺 AB の中点なので、

$$AE = BE$$

です。

また、直線 AB と直線 DF は点 E で交わっているので、

$$\angle AED = \angle BEF$$

です。

さらに、$AD \parallel BC$ で、BF は直線 BC 上にあるので、

$$\angle ADE = \angle BFE$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AED \equiv \triangle BEF$$

です。

よって、対応する辺は等しいので、

$$DE = EF$$

です。

また、E は辺 AB の中点でもあるので、E は線分 AB と線分 DF の両方の中点です。

したがって、四角形 $AFBD$ の対角線 AB と DF は、点 E でそれぞれの中点で交わります。よって、

四角形 $AFBD$ は平行四辺形

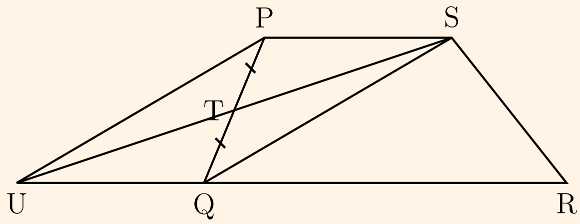
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 10

図のように、$PS \parallel QR$ の台形 $PQRS$ があります。辺 PQ の中点を T とし、直線 ST と直線 QR の延長との交点を U とします。このとき、四角形 $PUQS$ が平行四辺形であることを証明しなさい。



解答解説 10

解き方

T は辺 PQ の中点なので、

$$PT = TQ$$

です。

また、直線 PQ と直線 SU は点 T で交わっているので、

$$\angle PTS = \angle QTU$$

です。

さらに、$PS \parallel QR$ で、QU は直線 QR 上にあるので、

$$\angle PST = \angle QUT$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PTS \equiv \triangle QTU$$

です。

よって、

$$ST = TU$$

です。

また、T は辺 PQ の中点でもあるので、四角形 $PUQS$ の対角線 PQ と SU は、点 T でそれぞれの中点で交わります。

したがって、

四角形 $PUQS$ は平行四辺形

です。

答え

上の証明の通り。

中点連結定理

三角形で、**2 辺の中点**を結ぶ線分は、**残りの 1 辺に平行**で、その長さは**残りの 1 辺の半分**になります。

また逆に、ある辺の中点を通り、もう 1 つの辺に平行な直線は、残りの辺の中点も通ります。

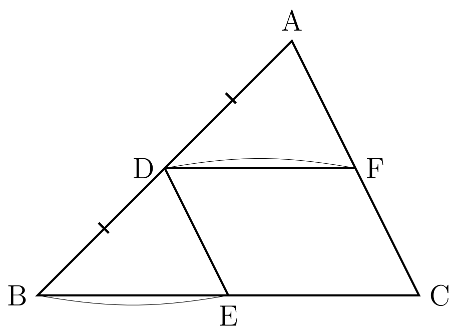
これを**中点連結定理**といいます。これからの問題では、

$$\text{中点} \to \text{平行} \to \text{長さが半分}$$

の流れを意識して使いましょう。

例題 11

図で、D は辺 AB の中点です。$DF \parallel BC$、$DF = BE$ のとき、$DE \parallel AC$ となることを証明しなさい。



方針

D が AB の中点で、$DF \parallel BC$ なので、まず F が AC の中点になることを使います。

解き方

D は辺 AB の中点で、$DF \parallel BC$ なので、三角形 ABC で中点連結定理を使うと、F は辺 AC の中点です。

したがって、

$$AF = FC$$

です。

また、中点連結定理より、

$$DF = \frac{1}{2}BC$$

です。

仮定より $DF = BE$ なので、

$$BE = \frac{1}{2}BC$$

です。

よって、

$$EC = BC - BE = \frac{1}{2}BC$$

となり、

$$BE = EC$$

です。

したがって、E は辺 BC の中点です。

三角形 ABC で、D は辺 AB の中点、E は辺 BC の中点なので、中点連結定理より、

$$DE \parallel AC$$

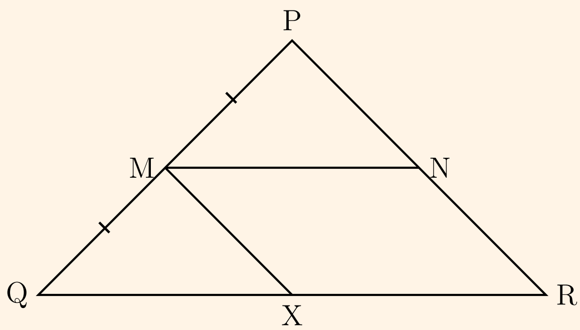
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 11

図で、M は辺 PQ の中点です。$MN \parallel QR$、$MN = QX$ のとき、$MX \parallel PR$ となることを証明しなさい。



解答解説 11

解き方

M は辺 PQ の中点で、$MN \parallel QR$ なので、三角形 PQR で中点連結定理を使うと、N は辺 PR の中点です。

したがって、

$$PN = NR$$

です。

また、中点連結定理より、

$$MN = \frac{1}{2}QR$$

です。

仮定より $MN = QX$ なので、

$$QX = \frac{1}{2}QR$$

です。

よって、

$$XR = QR - QX = \frac{1}{2}QR$$

となり、

$$QX = XR$$

です。

したがって、X は辺 QR の中点です。

三角形 PQR で、M は辺 PQ の中点、X は辺 QR の中点なので、中点連結定理より、

$$MX \parallel PR$$

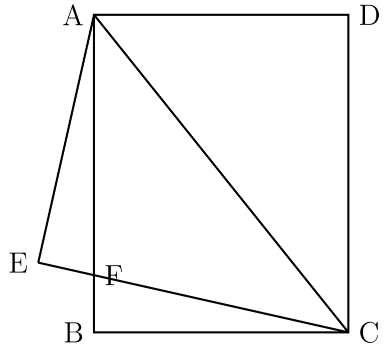
です。

答え

上の証明の通り。

例題 12

長方形 $ABCD$ を、対角線 AC を折り目として折り返します。点 D が移る点を E、直線 AB と直線 EC の交点を F とします。このとき、$AF = CF$ となることを証明しなさい。



方針

折り返しでは、折り目から見て対応する辺の長さや角度が等しくなります。まず、$AE = BC$ を作り、次に $\triangle AFE$ と $\triangle CFB$ の合同を証明します。

解き方

折り返しより、

$$AE = AD$$

です。

また、長方形なので、

$$AD = BC$$

です。

したがって、

$$AE = BC$$

です。

さらに、折り返しでは角の大きさが保たれるので、$\angle ADC = 90^\circ$ より、

$$\angle AEC = 90^\circ$$

です。

F は直線 EC 上の点なので、

$$\angle AEF = 90^\circ$$

です。

また、長方形より $AB \perp BC$ で、F は直線 AB 上の点なので、

$$\angle CBF = 90^\circ$$

です。

さらに、AF と BF は同じ直線上、EF と CF は同じ直線上にあるので、

$$\angle AFE = \angle CFB$$

です。

したがって、残りの角も等しいので、

$$\angle EAF = \angle BCF$$

となります。

よって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AFE \equiv \triangle CFB$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$AF = CF$$

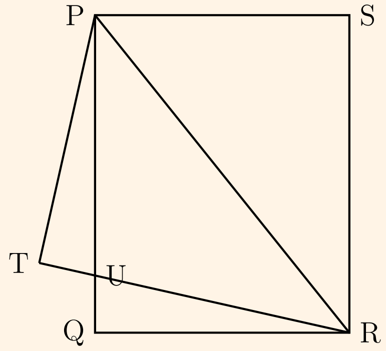
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 12

長方形 $PQRS$ を、対角線 PR を折り目として折り返します。点 S が移る点を T、直線 PQ と直線 TR の交点を U とします。このとき、$PU = RU$ となることを証明しなさい。



解答解説 12

解き方

折り返しより、

$$PT = PS$$

です。

また、長方形なので、

$$PS = QR$$

です。

したがって、

$$PT = QR$$

です。

さらに、折り返しでは角の大きさが保たれるので、$\angle PSR = 90^\circ$ より、

$$\angle PTR = 90^\circ$$

です。

U は直線 TR 上の点なので、

$$\angle PTU = 90^\circ$$

です。

また、長方形より $PQ \perp QR$ で、U は直線 PQ 上の点なので、

$$\angle RQU = 90^\circ$$

です。

さらに、PU と QU は同じ直線上、TU と RU は同じ直線上にあるので、

$$\angle PUT = \angle QUR$$

です。

したがって、残りの角も等しいので、

$$\angle UPT = \angle QRU$$

となります。

よって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PUT \equiv \triangle QUR$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$PU = RU$$

です。

答え

上の証明の通り。

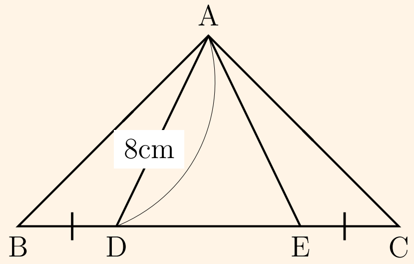
11 単元まとめ練習問題

ここでは、合同の証明と、証明したあとの長さ・角度の利用をまとめて確認します。

11.1 問題

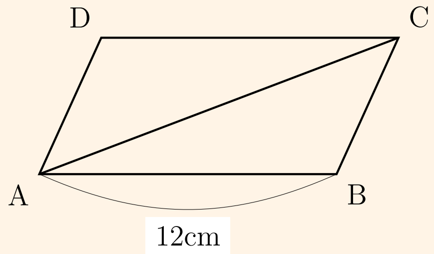
練習問題 まとめ 1

二等辺三角形 ABC で、$AB = AC$ です。辺 BC 上に点 D, E をとり、$BD = CE$ とします。$AD = 8\text{cm}$ のとき、AE の長さを求めなさい。



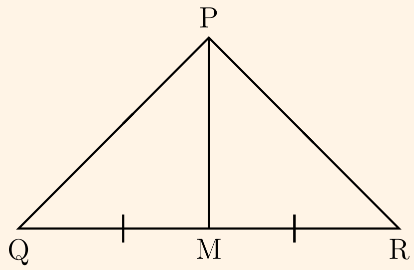
練習問題 まとめ 2

次の図で、$AB \parallel DC$、$AD \parallel BC$、$AB = 12\text{cm}$ です。辺 DC の長さを求めなさい。



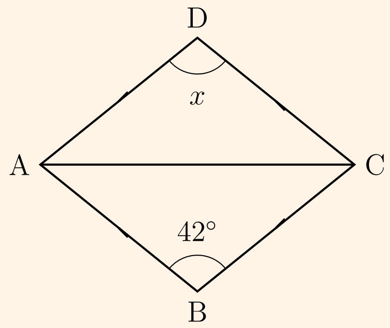
練習問題 まとめ 3

三角形 PQR で、$PQ = PR$ です。点 M は辺 QR 上の点で、$QM = MR$ です。$PM \perp QR$ であることを証明しなさい。



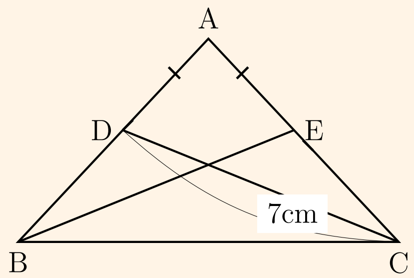
練習問題 まとめ 4

次の図で、$AB = AD$、$BC = DC$ です。$\angle ABC = 42^\circ$ のとき、$\angle ADC$ の大きさを求めなさい。



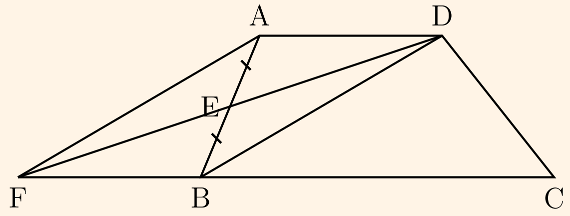
練習問題 まとめ 5

二等辺三角形 ABC で、$AB = AC$ です。辺 AB 上に点 D、辺 AC 上に点 E をとり、$AD = AE$ とします。$CD = 7\text{cm}$ のとき、BE の長さを求めなさい。



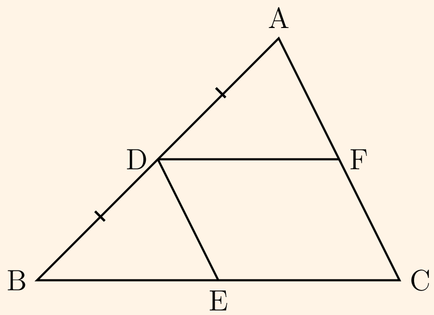
練習問題 まとめ 6

図のように、$AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があります。辺 AB の中点を E とし、直線 DE と直線 BC の延長との交点を F とします。このとき、四角形 $AFBD$ が平行四辺形であることを証明しなさい。



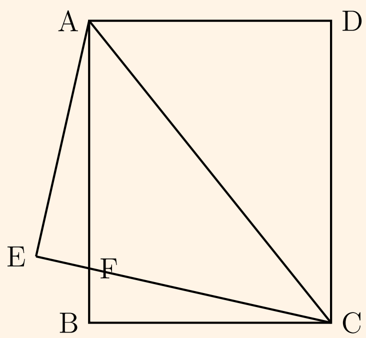
練習問題 まとめ 7

図で、D は辺 AB の中点です。$DF \parallel BC$、$DF = BE$ のとき、$DE \parallel AC$ となることを証明しなさい。



練習問題 まとめ 8

長方形 $ABCD$ を、対角線 AC を折り目として折り返します。点 D が移る点を E、直線 AB と直線 EC の交点を F とします。このとき、$AF = CF$ となることを証明しなさい。



11.2　解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において、二等辺三角形 ABC より $AB = AC$ です。仮定より $BD = CE$ です。

また、二等辺三角形 ABC の底角は等しいので、

$$\angle ABD = \angle ACE$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$$

です。

対応する辺は等しいので、$AD = AE$ です。$AD = 8\text{cm}$ より、

$$AE = 8\text{cm}$$

です。

答え

$$8\text{cm}$$

解答解説 まとめ 2

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、平行線の錯角より、

$$\angle BAC = \angle DCA,$$

$$\angle BCA = \angle CAD$$

です。

また、AC は共通な辺なので、

$$AC = CA$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$AB = DC$$

です。

$AB = 12\mathrm{cm}$ より、

$$DC = 12\mathrm{cm}$$

です。

答え

$$12\mathrm{cm}$$

解答解説 まとめ 3

解き方

$\triangle PQM$ と $\triangle PRM$ において、仮定より、

$$PQ = PR,$$

$$QM = MR$$

です。

また、PM は共通な辺なので、

$$PM = PM$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQM \equiv \triangle PRM$$

です。

対応する角は等しいので、

$$\angle QMP = \angle RMP$$

です。

点 Q、M、R は一直線上にあるので、2 つの角の和は 180° です。等しい 2 つの角の和が 180° なので、どちらも 90° です。

したがって、

$$PM \perp QR$$

です。

答え

上の証明の通り。

解答解説 まとめ 4

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ において、仮定より、

$$AB = AD,$$

$$BC = DC$$

です。

また、AC は共通な辺なので、

$$AC = AC$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$$

です。

対応する角は等しいので、

$$\angle ABC = \angle ADC$$

です。

$\angle ABC = 42^\circ$ より、

$$\angle ADC = 42^\circ$$

です。

答え

$$42^\circ$$

解答解説 まとめ 5

解き方

$\triangle ACD$ と $\triangle ABE$ において、二等辺三角形 ABC より、

$$AC = AB$$

です。

また、仮定より、

$$AD = AE$$

です。

さらに、D は辺 AB 上、E は辺 AC 上の点なので、

$$\angle CAD = \angle BAE$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ACD \equiv \triangle ABE$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$CD = BE$$

です。

$CD = 7\text{cm}$ より、

$$BE = 7\text{cm}$$

です。

答え

$$7\text{cm}$$

解答解説 まとめ 6

解き方

E は辺 AB の中点なので、

$$AE = BE$$

です。

また、直線 AB と直線 DF は点 E で交わっているので、

$$\angle AED = \angle BEF$$

です。

さらに、$AD \parallel BC$ で、BF は直線 BC 上にあるので、

$$\angle ADE = \angle BFE$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AED \equiv \triangle BEF$$

です。

よって、

$$DE = EF$$

です。

また、E は辺 AB の中点でもあるので、四角形 $AFBD$ の対角線 AB と DF は、点 E でそれぞれの中点で交わります。

したがって、

四角形 $AFBD$ は平行四辺形

です。

答え

上の証明の通り。

解答解説 まとめ 7

解き方

D は辺 AB の中点で、$DF \parallel BC$ なので、三角形 ABC で中点連結定理を使うと、F は辺 AC の中点です。

したがって、

$$AF = FC$$

です。

また、中点連結定理より、

$$DF = \frac{1}{2}BC$$

です。

仮定より $DF = BE$ なので、

$$BE = \frac{1}{2}BC$$

です。

よって、

$$EC = BC - BE = \frac{1}{2}BC$$

となり、

$$BE = EC$$

です。

したがって、E は辺 BC の中点です。

三角形 ABC で、D は辺 AB の中点、E は辺 BC の中点なので、中点連結定理より、

$$DE \parallel AC$$

です。

答え

上の証明の通り。

解答解説 まとめ 8

解き方

折り返しより、

$$AE = AD$$

です。

また、長方形なので、

$$AD = BC$$

です。

したがって、

$$AE = BC$$

です。

さらに、折り返しでは角の大きさが保たれるので、$\angle ADC = 90^\circ$ より、

$$\angle AEC = 90^\circ$$

です。

F は直線 EC 上の点なので、

$$\angle AEF = 90^\circ$$

です。

また、長方形より $AB \perp BC$ で、F は直線 AB 上の点なので、

$$\angle CBF = 90^\circ$$

です。

さらに、AF と BF は同じ直線上、EF と CF は同じ直線上にあるので、

$$\angle AFE = \angle CFB$$

です。

したがって、残りの角も等しいので、

$$\angle EAF = \angle BCF$$

となります。

よって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AFE \equiv \triangle CFB$$

です。

対応する辺は等しいので、

$$AF = CF$$

です。

答え

上の証明の通り。

12　学習チェックリスト

次の項目を確認し、できるようになったものにチェックを入れましょう。

チェックリスト

- □重なった図形から、証明に使う三角形を選べる。
- □二等辺三角形の等しい辺・底角を証明に使える。
- □対頂角や平行線の錯角・同位角を使って角の条件をそろえられる。
- □補助線を引いて、共通な辺をもつ三角形を作れる。
- □合同を証明したあと、対応する辺や角を使って長さ・角度を求められる。
- □証明と計算を分けて、順序よく説明できる。

13 まとめ

合同・応用編の重要ポイント

- 応用問題では、まず図の中から等しい辺・角・共通な辺を見つける。
- 二等辺三角形、対頂角、平行線は、合同証明でよく使う。
- 補助線を引くと、合同な三角形が見つかることがある。
- 合同を証明したあと、対応する辺や角が等しいことを使って答えを出す。
- 証明では、対応順をそろえて、合同条件を明確に書く。

次に取り組むこと

合同の応用問題ができたら、次は相似の学習に進みましょう。相似では、合同と同じように対応関係を見ますが、辺の長さは「等しい」ではなく「比でそろえる」ことが重要になります。