中学数学

合同

標準編

偏差値50前後で安定して得点する証明対策

図から条件を読み取り、三角形の合同条件を使って、
証明と角度・長さの問題を解けるようにします。

KmKmの学習支援サイト

目次

1　この教材の使い方

この教材は、合同の基礎を学んだあとに、標準的な証明問題で得点するための教材です。図の中から、等しい辺、等しい角、共通な辺、対頂角、平行線の錯角・同位角を見つけて、合同条件に結びつけます。

学習の進め方

1. 図を見て、分かっている辺や角を整理します。
2. どの合同条件を使えるかを、先に予想します。
3. 証明では、「どの三角形において」から書き始めます。
4. 合同が分かったあと、対応する辺や角を使って長さや角度を求めます。

注意 標準編で大切なこと

問題文にすべての条件が文字で書かれているとは限りません。図の中の印、共通な辺、対頂角、平行線から読み取れる角度も、証明に使います。

2　対応関係と合同条件の確認

2.1　対応順を正しく読む

合同の記号と対応順

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

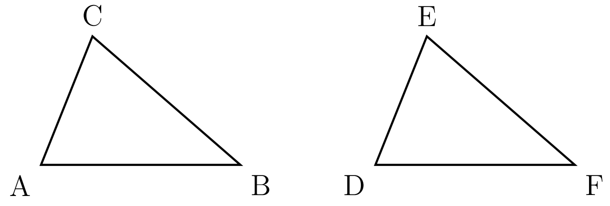
と書かれているとき、対応は、

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F$$

です。合同の記号は、**頂点の順番**をそろえて書くことが大切です。

例題 1

$\triangle ABC \equiv \triangle DFE$ のとき、辺 AC に対応する辺と、角 B に対応する角を答えなさい。



方針

合同の記号の順番から、頂点の対応を読み取ります。

解き方

$\triangle ABC \equiv \triangle DFE$ なので、

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow F, \quad C \leftrightarrow E$$

です。

したがって、辺 AC に対応する辺は DE です。

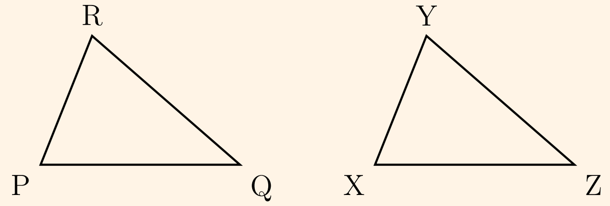
また、角 B に対応する角は角 F です。

答え

辺 DE、角 F

練習問題 1

$\triangle PQR \equiv \triangle XZY$ のとき、辺 QR に対応する辺と、角 P に対応する角を答えなさい。



解答解説 1

解き方

$\triangle PQR \equiv \triangle XZY$ なので、

$$P \leftrightarrow X, \quad Q \leftrightarrow Z, \quad R \leftrightarrow Y$$

です。

したがって、辺 QR に対応する辺は ZY です。

角 P に対応する角は角 X です。

答え

辺 ZY、角 X

2.2 合同条件の見分け方

3 つの合同条件を使い分ける

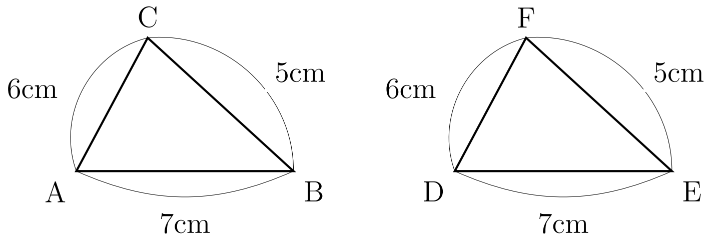
三角形の合同条件は、次の 3 つです。

- 3 組の辺がそれぞれ等しい。
- 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。
- 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

標準問題では、図の中の印や条件から、どの合同条件を使うかを判断します。

例題 2

次の図で使える合同条件を答えなさい。



方針

3 つの辺の長さがそれぞれ等しいかを確認します。

解き方

図より、

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad CA = FD$$

です。

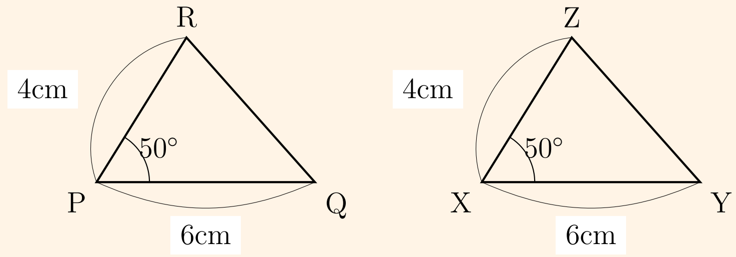
3 組の辺がそれぞれ等しいので、使える合同条件は「3 組の辺がそれぞれ等しい」です。

答え

3 組の辺がそれぞれ等しい。

練習問題 2

次の図で使える合同条件を答えなさい。



解答解説 2

解き方

図より、

$$PQ = XY,$$

$$PR = XZ,$$

$$\angle P = \angle X$$

です。

角 P と角 X は、それぞれ等しい 2 つの辺にはさまれた角です。

したがって、使える合同条件は、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい、です。

答え

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。

3　合同条件を使った証明

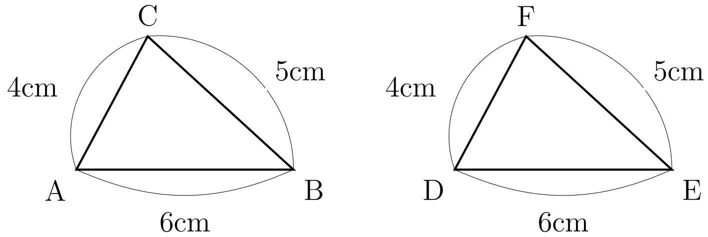
3.1　3 組の辺がそれぞれ等しい

辺だけで証明する

3 組の辺がそれぞれ等しいことを示せば、三角形の合同を証明できます。証明では、対応する辺を 1 つずつ書きます。

例題 3

次の図で、$AB = DE$、$BC = EF$、$CA = FD$ です。$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ を証明しなさい。



方針

3 組の辺がそれぞれ等しいことを、対応順に書きます。

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

仮定より、

$$AB = DE,$$

$$BC = EF,$$

$$CA = FD$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

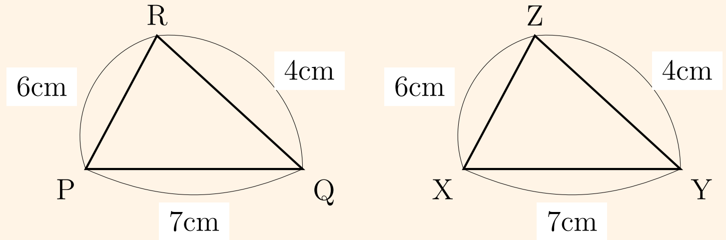
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 3

次の図で、$PQ = XY$、$QR = YZ$、$RP = ZX$ です。$\triangle PQR \equiv \triangle XYZ$ を証明しなさい。



解答解説 3

解き方

$\triangle PQR$ と $\triangle XYZ$ において、

仮定より、

$$PQ = XY,$$

$$QR = YZ,$$

$$RP = ZX$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQR \equiv \triangle XYZ$$

です。

答え

上の証明の通り。

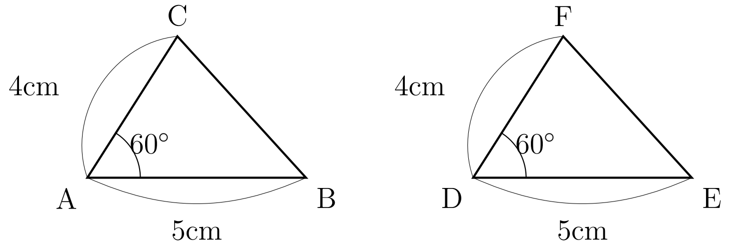
3.2　2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい

「その間の角」を確認する

2 組の辺と 1 つの角が分かっていても、その角が 2 つの辺にはさまれていなければ、この合同条件は使えません。角の位置を必ず確認します。

例題 4

次の図で、$AB = DE$、$AC = DF$、$\angle A = \angle D$ です。$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ を証明しなさい。



方針

等しい角が、等しい 2 つの辺にはさまれているかを確認します。

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

仮定より、

$$AB = DE,$$

$$AC = DF,$$

$$\angle A = \angle D$$

です。

角 A は辺 AB と辺 AC にはさまれた角で、角 D は辺 DE と辺 DF にはさまれた角です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

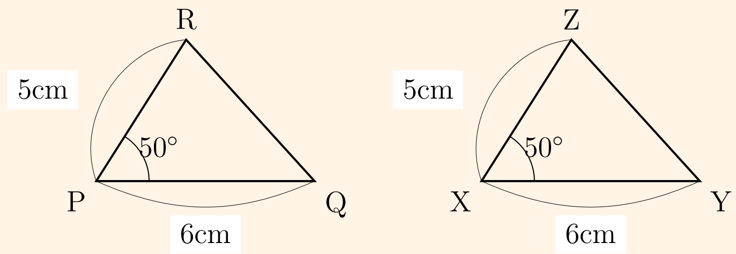
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 4

次の図で、$PQ = XY$、$PR = XZ$、$\angle P = \angle X$ です。$\triangle PQR \equiv \triangle XYZ$ を証明しなさい。



解答解説 4

解き方

$\triangle PQR$ と $\triangle XYZ$ において、

仮定より、

$$PQ = XY,$$

$$PR = XZ,$$

$$\angle P = \angle X$$

です。

角 P と角 X は、それぞれ等しい 2 つの辺にはさまれた角です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQR \equiv \triangle XYZ$$

です。

答え

上の証明の通り。

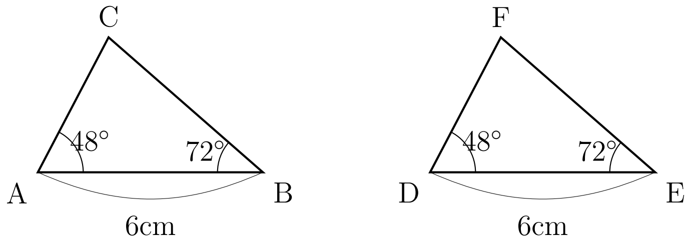
3.3　1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

辺の両端の角を見る

1 組の辺と 2 つの角が分かっているときは、その 2 つの角が、等しい辺の両端の角かを確認します。

例題 5

次の図で、$AB = DE$、$\angle A = \angle D$、$\angle B = \angle E$ です。$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ を証明しなさい。



方針

等しい辺と、その両端の角がそろっているかを確認します。

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

仮定より、

$$AB = DE,$$

$$\angle A = \angle D,$$

$$\angle B = \angle E$$

です。

角 A と角 B は辺 AB の両端の角です。角 D と角 E も辺 DE の両端の角です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

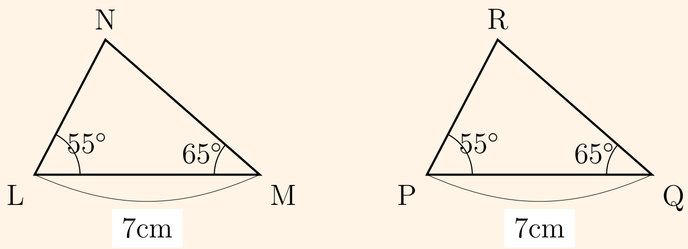
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 5

次の図で、$LM = PQ$、$\angle L = \angle P$、$\angle M = \angle Q$ です。$\triangle LMN \equiv \triangle PQR$ を証明しなさい。



解答解説 5

解き方

$\triangle LMN$ と $\triangle PQR$ において、

仮定より、

$$LM = PQ,$$

$$\angle L = \angle P,$$

$$\angle M = \angle Q$$

です。

角 L と角 M は辺 LM の両端の角で、角 P と角 Q は辺 PQ の両端の角です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle LMN \equiv \triangle PQR$$

です。

答え

上の証明の通り。

4　図の中の条件を見つける

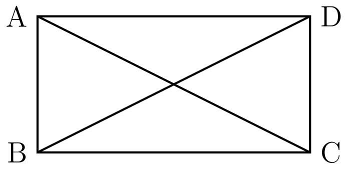
4.1　共通な辺を使う

共通な辺は証明に使える

2 つの三角形が 1 つの辺を共有しているとき、その辺は両方の三角形で同じ長さです。証明では「共通な辺なので」と書きます。

例題 6

次の図で、$AB = DC$、$AC = DB$ です。$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ を証明しなさい。



方針

共通な辺 BC を見つけ、3 組の辺で証明します。

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において、

仮定より、

$$AB = DC,$$

$$AC = DB$$

です。

また、BC は共通な辺なので、

$$BC = CB$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$$

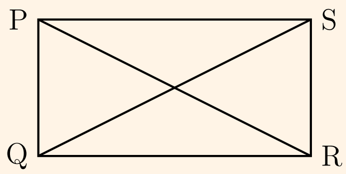
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 6

次の図で、$PQ = SR$、$PR = SQ$ です。$\triangle PQR \equiv \triangle SRQ$ を証明しなさい。



解答解説 6

解き方

$\triangle PQR$ と $\triangle SRQ$ において、

仮定より、

$$PQ = SR,$$

$$PR = SQ$$

です。

また、QR は共通な辺なので、

$$QR = RQ$$

です。

したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQR \equiv \triangle SRQ$$

です。

答え

上の証明の通り。

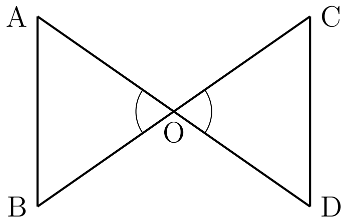
4.2 対頂角を使う

対頂角は等しい

2 直線が交わるとき、向かい合う角を対頂角といいます。対頂角は等しいので、合同の証明で角の条件として使えます。

例題 7

次の図で、$AB = DC$、$AO = DO$ です。$\triangle AOB \equiv \triangle DOC$ を証明しなさい。



方針

対頂角を使って、2 組の辺とその間の角をそろえます。

解き方

$\triangle AOB$ と $\triangle DOC$ において、

仮定より、

$$AB = DC,$$

$$AO = DO$$

です。

また、対頂角は等しいので、

$$\angle AOB = \angle DOC$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AOB \equiv \triangle DOC$$

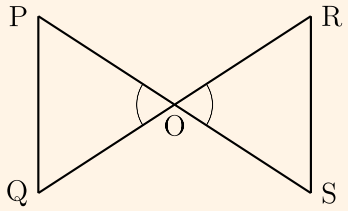
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 7

次の図で、$PO = SO$、$QO = RO$ です。$\triangle POQ \equiv \triangle SOR$ を証明しなさい。



解答解説 7

解き方

$\triangle POQ$ と $\triangle SOR$ において、

仮定より、

$$PO = SO,$$

$$QO = RO$$

です。

また、対頂角は等しいので、

$$\angle POQ = \angle SOR$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle POQ \equiv \triangle SOR$$

です。

答え

上の証明の通り。

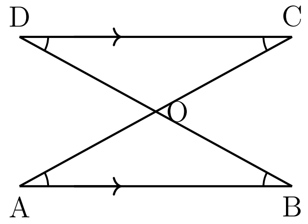
4.3 平行線の錯角・同位角を使う

平行線から角を見つける

平行線がある図では、錯角や同位角が等しくなります。証明で角の条件が足りないときは、平行線を探します。

例題 8

次の図で、$AB \parallel DC$、$AB = DC$ です。$\triangle AOB \equiv \triangle CDO$ を証明しなさい。



方針

平行線の錯角を使って、1 組の辺とその両端の角をそろえます。

解き方

$\triangle AOB$ と $\triangle CDO$ において、

仮定より、

$$AB = DC$$

です。

$AB \parallel DC$ より、錯角は等しいので、

$$\angle BAO = \angle DCO,$$

$$\angle ABO = \angle CDO$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AOB \equiv \triangle CDO$$

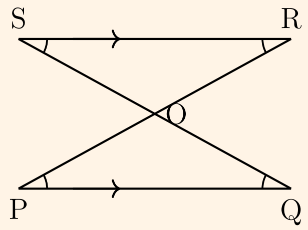
です。

答え

上の証明の通り。

練習問題 8

次の図で、$PQ \parallel SR$、$PQ = SR$ です。$\triangle POQ \equiv \triangle SOR$ を証明しなさい。



解答解説 8

解き方

$\triangle POQ$ と $\triangle SOR$ において、

仮定より、

$$PQ = SR$$

です。

$PQ \parallel SR$ より、錯角は等しいので、

$$\angle QPO = \angle RSO,$$

$$\angle PQO = \angle SRO$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle POQ \equiv \triangle SOR$$

です。

答え

上の証明の通り。

5　合同を使って長さや角度を求める

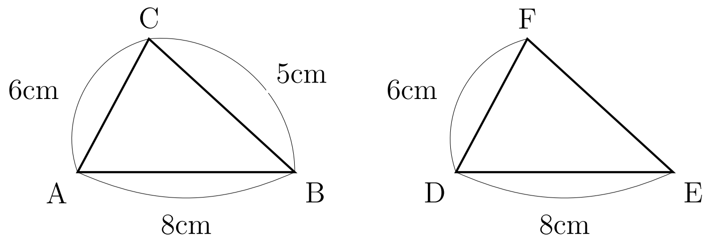
5.1　対応する辺を使う

合同なら対応する辺は等しい

2 つの三角形が合同だと分かったら、対応する辺や角が等しいことを使えます。証明したあとに、長さや角度を求める問題があります。

例題 9

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ で、$AB = 8\text{cm}$、$BC = 5\text{cm}$、$CA = 6\text{cm}$ です。辺 EF の長さを求めなさい。



方針

合同の対応順から、EF に対応する辺を探します。

解き方

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ なので、

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F$$

です。

したがって、辺 EF に対応する辺は BC です。

$BC = 5\text{cm}$ なので、

$$EF = 5\text{cm}$$

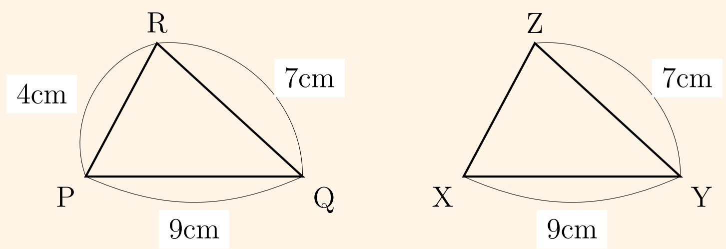
です。

答え

$$5\text{cm}$$

練習問題 9

$\triangle PQR \equiv \triangle XYZ$ で、$PQ = 9\text{cm}$、$QR = 7\text{cm}$、$RP = 4\text{cm}$ です。辺 ZX の長さを求めなさい。



解答解説 9

解き方

$\triangle PQR \equiv \triangle XYZ$ なので、

$$P \leftrightarrow X, \quad Q \leftrightarrow Y, \quad R \leftrightarrow Z$$

です。

辺 ZX に対応する辺は RP です。

$RP = 4\text{cm}$ なので、

$$ZX = 4\text{cm}$$

です。

答え

$$4\text{cm}$$

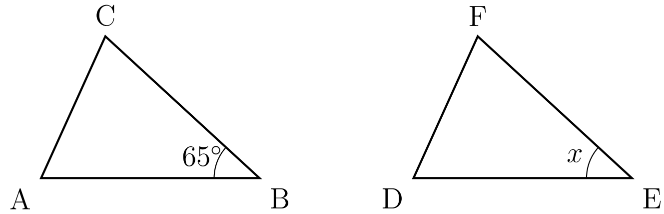
5.2 対応する角を使う

合同なら対応する角は等しい

合同な三角形では、対応する角も等しいです。角度を求めるときも、対応順を確認します。

例題 10

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ で、$\angle B = 65^\circ$ です。$\angle E$ の大きさを求めなさい。



方針

B と E が対応しているかを確認します。

解き方

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ なので、

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F$$

です。

したがって、$\angle B$ と $\angle E$ は対応する角で等しいです。

よって、

$$\angle E = 65^\circ$$

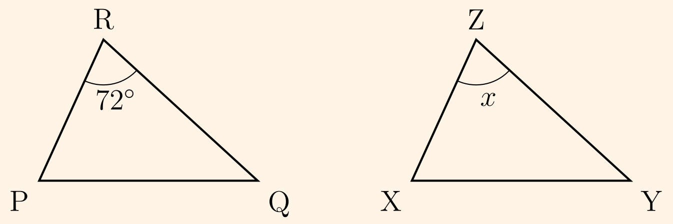
です。

答え

$$65^\circ$$

練習問題 10

$\triangle PQR \equiv \triangle XYZ$ で、$\angle R = 72°$ です。$\angle Z$ の大きさを求めなさい。



解答解説 10

解き方

$\triangle PQR \equiv \triangle XYZ$ なので、

$$P \leftrightarrow X, \quad Q \leftrightarrow Y, \quad R \leftrightarrow Z$$

です。

$\angle R$ と $\angle Z$ は対応する角なので等しいです。

したがって、

$$\angle Z = 72°$$

です。

答え

$$72°$$

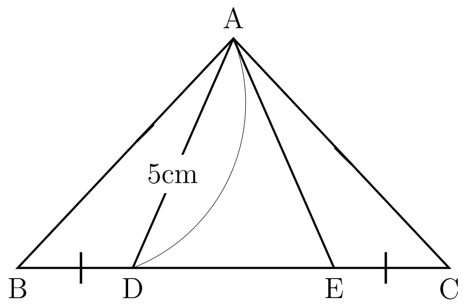
5.3 証明してから長さを求める

二段階で考える問題

少し難しい問題では、まず三角形の合同を証明し、そのあとで対応する辺や角が等しいことを使って、長さや角度を求めます。

例題 11

二等辺三角形 ABC で、$AB = AC$ とします。辺 BC 上に点 D, E をとり、$BD = CE$ とします。また、$AD = 5\text{cm}$ とします。このとき、辺 AE の長さを求めなさい。



方針

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ の合同を証明してから、対応する辺に注目します。

解き方

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において、二等辺三角形 ABC より $AB = AC$ です。また、仮定より $BD = CE$ です。

さらに、二等辺三角形 ABC の底角は等しいので、

$$\angle ABD = \angle ACE$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$$

です。

合同な三角形の対応する辺は等しいので $AD = AE$ です。$AD = 5\text{cm}$ より、

$$AE = 5\text{cm}$$

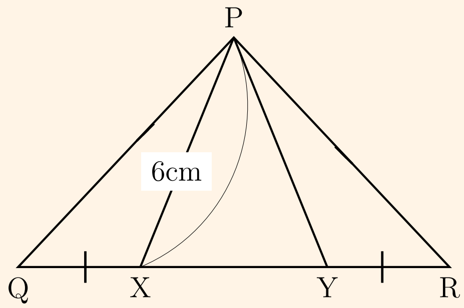
です。

答え

$$5\text{cm}$$

練習問題 11

二等辺三角形 PQR で、$PQ = PR$ とします。辺 QR 上に点 X, Y をとり、$QX = YR$ とします。また、$PX = 6\text{cm}$ とします。このとき、辺 PY の長さを求めなさい。



解答解説 11

解き方

$\triangle PQX$ と $\triangle PRY$ において、

二等辺三角形 PQR より、

$$PQ = PR$$

です。

また、仮定より、

$$QX = YR$$

です。

二等辺三角形 PQR の底角は等しいので、

$$\angle PQX = \angle PRY$$

です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PQX \equiv \triangle PRY$$

です。

合同な三角形の対応する辺は等しいので、

$$PX = PY$$

です。

$PX = 6\text{cm}$ より、

$$PY = 6\text{cm}$$

です。

答え

$$6\text{cm}$$

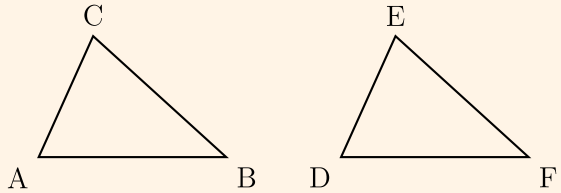
6 単元まとめ練習問題

ここでは、合同条件の使い分けと証明の基本をまとめて確認します。

6.1 問題

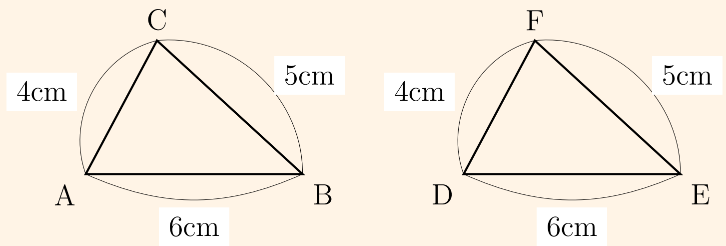
練習問題 まとめ 1

$\triangle ABC \equiv \triangle DFE$ のとき、辺 BC に対応する辺と、角 A に対応する角を答えなさい。



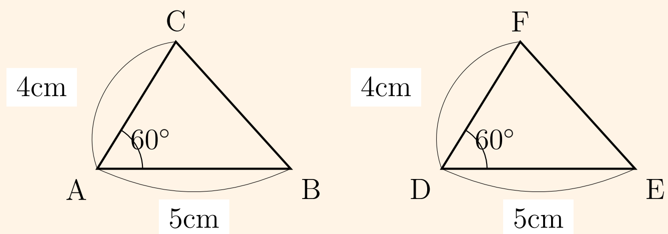
練習問題 まとめ 2

次の図で使える合同条件を答えなさい。



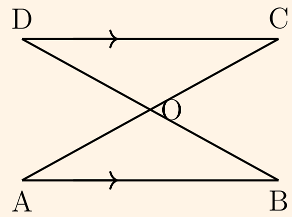
練習問題 まとめ 3

次の図で、$AB = DE$、$AC = DF$、$\angle A = \angle D$ です。$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ を証明しなさい。



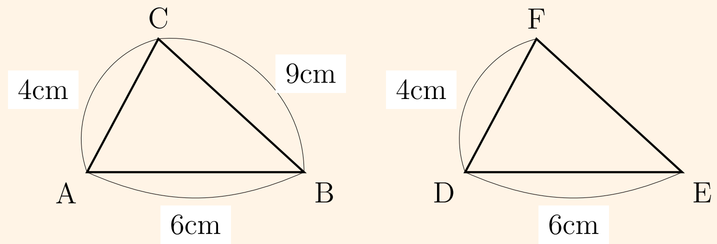
練習問題 まとめ 4

次の図で、$AB \parallel DC$、$AB = DC$ です。$\triangle AOB \equiv \triangle CDO$ を証明しなさい。



練習問題 まとめ 5

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ で、$BC = 9\mathrm{cm}$ です。辺 EF の長さを求めなさい。



6.2 解答解説

解答解説 まとめ 1

解き方

$\triangle ABC \equiv \triangle DFE$ なので、

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow F, \quad C \leftrightarrow E$$

です。

辺 BC に対応する辺は FE、角 A に対応する角は角 D です。

答え

辺 FE、角 D

解答解説 まとめ 2

解き方

図より、3 組の辺がそれぞれ等しくなっています。

答え

3 組の辺がそれぞれ等しい。

解答解説 まとめ 3

解き方

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

仮定より、

$$AB = DE,$$

$$AC = DF,$$

$$\angle A = \angle D$$

です。

角 A と角 D は、それぞれ等しい 2 つの辺にはさまれた角です。

したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

です。

答え

上の証明の通り。

解答解説 まとめ 4

解き方

$\triangle AOB$ と $\triangle CDO$ において、

仮定より、

$$AB = DC$$

です。

$AB \parallel DC$ より、錯角は等しいので、

$$\angle BAO = \angle DCO,$$

$$\angle ABO = \angle CDO$$

です。

したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AOB \equiv \triangle CDO$$

です。

答え

上の証明の通り。

解答解説 まとめ 5

解き方

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ なので、

$$B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F$$

です。

したがって、辺 BC に対応する辺は EF です。

$BC = 9\mathrm{cm}$ なので、

$$EF = 9\mathrm{cm}$$

です。

答え

$$9\mathrm{cm}$$

7　学習チェックリスト

次の項目を確認し、できるようになったものにチェックを入れましょう。

チェックリスト

- □合同の記号から、対応する頂点・辺・角を読み取れる。
- □3 つの合同条件を使い分けられる。
- □共通な辺を証明に使える。
- □対頂角が等しいことを証明に使える。
- □平行線の錯角・同位角を証明に使える。
- □合同を証明したあと、対応する辺や角を使える。
- □証明を「どの三角形において」から順序よく書ける。

8　まとめ

合同・標準編の重要ポイント

- 合同条件を使う前に、どの三角形について考えるかを決める。
- 3 組の辺、2 組の辺とその間の角、1 組の辺とその両端の角を正しく見分ける。
- 共通な辺、対頂角、平行線の錯角・同位角は、証明でよく使う。
- 合同が証明できたら、対応する辺や角が等しいことを使える。
- 合同の記号は、対応する頂点の順番をそろえて書く。

次に取り組むこと

標準編ができたら、応用編で、複数の三角形が重なった図や、補助線を使う証明問題に取り組みましょう。