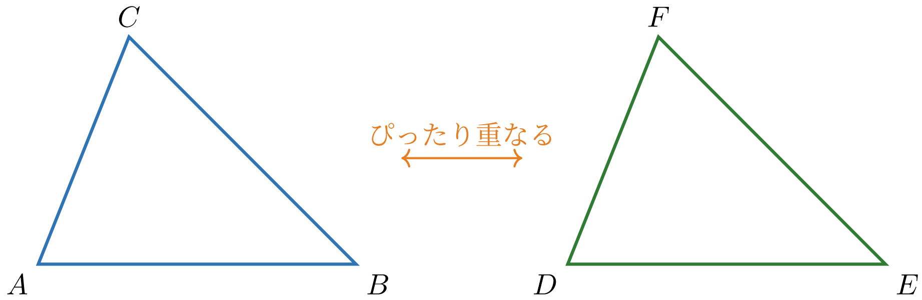
中学数学 合同の解き方

合同条件・対応・証明の書き方を基礎から整理

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$



対応する辺の長さと対応する角の大きさが等しい

この教材の対象

偏差値 40〜50 程度の中学生が、偏差値 50 以上を目指すための復習教材です。学校の授業、定期テスト、高校入試の基礎固めに使えます。

この教材で大切にすること

合同は、図形を「ぴったり重なる形」と見る単元です。証明では、どの三角形を比べるか、どの条件を使うかを順番に整理しましょう。

この教材の使い方

学習の進め方

(1) まず、合同とは何かを理解する。

(2) 次に、対応する頂点・辺・角をそろえる練習をする。

(3) 三角形の合同条件を 3 つ覚える。

(4) 証明問題では、理由と合同条件をセットで書く。

(5) 高校入試では、合同を使って辺や角が等しいことを導く練習をする。

目次

1 合同の基本

1.1 合同とは何か

合同の考え方

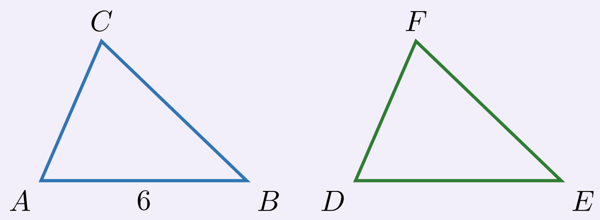
2 つの図形で、一方を移動、回転、裏返しして、もう一方にぴったり重ねることができるとき、2 つの図形は合同であるといいます。

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

この記号は「三角形 ABC と三角形 DEF は合同である」と読みます。

例題 1　合同な図形の対応を読む

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ で、A と D、B と E、C と F が対応しています。$AB = 6\,\mathrm{cm}$ のとき、DE の長さを求めなさい。



解説

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ なので、対応する辺の長さは等しいです。AB と対応する辺は DE です。

$$DE = AB = 6$$

答え： $6\,\mathrm{cm}$

確認ポイント： 合同では、対応する辺の長さはそのまま等しい。

1.2 対応する辺と角

対応をそろえる

合同な図形では、次の 2 つが成り立ちます。

- 対応する辺の長さは等しい。
- 対応する角の大きさは等しい。

たとえば、$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ の順に書いてあるとき、対応は

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F$$

です。辺は、$AB \leftrightarrow DE$、$BC \leftrightarrow EF$、$CA \leftrightarrow FD$ と対応します。

合同記号の順番に注意

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ と書くとき、文字の順番には意味があります。対応する点の順に並べないと、どの辺や角が等しいのかを間違えやすくなります。

2 三角形の合同条件

2.1 3 つの合同条件

三角形の合同条件

三角形が合同であることを示すには、次の 3 つのどれかを使います。

(1) 3 組の辺がそれぞれ等しい。

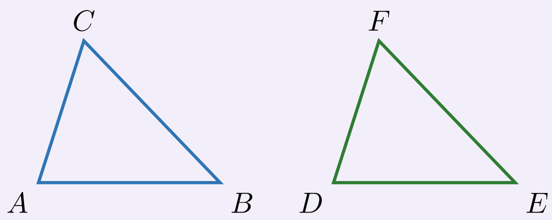
(2) 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。

(3) 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

高校入試では、条件を見つけるだけでなく、理由を言葉で書くことが大切です。

例題 2　3 組の辺で合同を示す

図で、$AB = DE$、$BC = EF$、$CA = FD$ である。$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同であることを説明しなさい。



解説

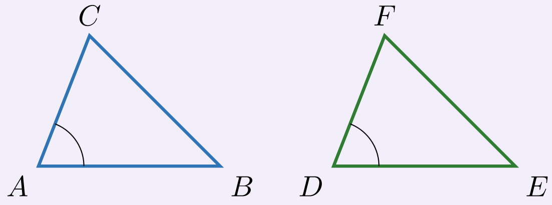
$AB = DE$、$BC = EF$、$CA = FD$ なので、3 組の辺がそれぞれ等しいです。したがって、三角形の合同条件より、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

答え： 3 組の辺がそれぞれ等しいので、$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$。

例題 3　2 組の辺とその間の角で合同を示す

図で、$AB = DE$、$AC = DF$、$\angle A = \angle D$ である。$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同であることを説明しなさい。



解説

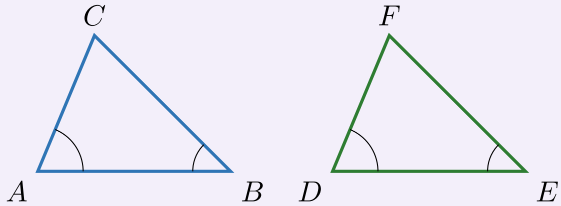
$AB = DE$、$AC = DF$ で、$\angle A = \angle D$ です。$\angle A$ と $\angle D$ は、それぞれ 2 つの辺にはさまれた角です。したがって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

答え： 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので合同。

例題 4　1 組の辺とその両端の角で合同を示す

図で、$AB = DE$、$\angle A = \angle D$、$\angle B = \angle E$ である。$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同であることを説明しなさい。



解説

$AB = DE$ で、その両端の角である $\angle A$ と $\angle B$ が、$\angle D$ と $\angle E$ にそれぞれ等しいです。したがって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

答え： 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので合同。

3 証明問題の書き方

3.1 証明の基本形

合同の証明の型

合同の証明は、次の型で書くと整理しやすくなります。

(1) どの三角形とどの三角形を比べるかを書く。

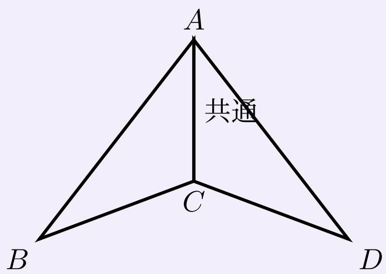
(2) 等しい辺や角を、理由つきで書く。

(3) 使う合同条件を書く。

(4) だから合同である、と結論を書く。

例題 5　合同の証明の型

図で、$AB = AD$、$CB = CD$ である。$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ であることを証明しなさい。



証明

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ において、

$$AB = AD \quad \text{（仮定）}$$

$$CB = CD \quad \text{（仮定）}$$

$$AC = AC \quad \text{（共通）}$$

よって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$$

確認ポイント： 共通な辺も、等しい辺の 1 つとして使える。

3.2 理由の書き方

理由を省略しない

証明では、「等しい」だけでなく、なぜ等しいのかを書きます。たとえば、

$$AB = AD \quad \text{（仮定）}$$

$$AC = AC \quad \text{（共通）}$$

のように書くと、採点者に伝わりやすくなります。

4 合同を使って辺や角を求める

4.1 合同なら対応する辺・角が等しい

合同を使う流れ

合同を証明したあとには、対応する辺や角が等しいことを使えます。

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

ならば、

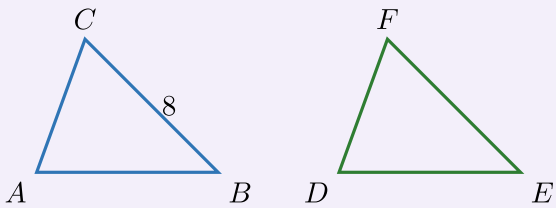
$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad CA = FD$$

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$$

です。

例題 6　合同から辺の長さを求める

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ で、$BC = 8\,\mathrm{cm}$ である。対応する辺 EF の長さを求めなさい。



解説

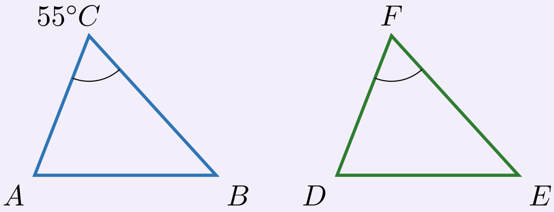
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ の順番から、B と E、C と F が対応します。したがって、BC と EF が対応します。

$$EF = BC = 8$$

答え： $8\,\mathrm{cm}$

例題 7　合同から角の大きさを求める

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ で、$\angle C = 55°$ である。対応する角 $\angle F$ の大きさを求めなさい。



解説

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ の順番から、C と F が対応します。合同な図形では、対応する角の大きさは等しいので、

$$\angle F = \angle C = 55°$$

答え：$55°$

5　二等辺三角形と合同

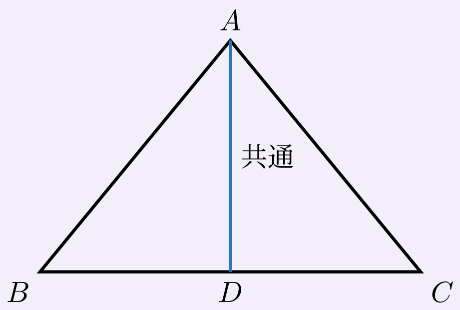
5.1　二等辺三角形でよく使う合同

二等辺三角形と合同

二等辺三角形では、頂点から底辺に向かって線を引く問題がよく出ます。図の中に同じ長さや共通な辺が見つかると、合同を使って角や辺が等しいことを示せます。

例題 8　二等辺三角形で合同を使う

$AB = AC$ の二等辺三角形 ABC で、D は BC の中点である。$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ であることを証明しなさい。



証明

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$$AB = AC \quad （仮定）$$

D は BC の中点なので、

$$BD = CD$$

また、

$$AD = AD \quad （共通）$$

よって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

確認ポイント： 中点から、2 つの線分が等しいことを読み取る。

5.2　合同のあとに分かること

合同を示したあと

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ が分かると、対応する角が等しいので、たとえば

$$\angle BAD = \angle CAD$$

$$\angle ADB = \angle ADC$$

などが分かります。高校入試では、合同を示したあとに何を使いたいのかを考えることが大切です。

6　高校入試で役立つ見方

6.1　図に印をつける

入試問題での見方

合同の問題では、図を見てすぐ証明を書き始めるのではなく、次の順に整理します。

(1) 等しい辺、等しい角、共通な辺や角に印をつける。

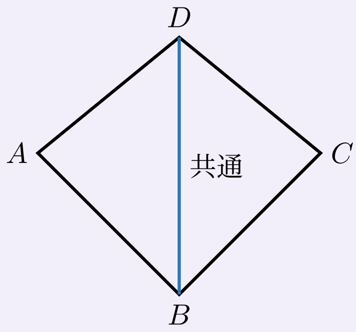
(2) どの三角形とどの三角形を比べるか決める。

(3) 3 つの合同条件のどれに当てはまるか考える。

(4) 合同が分かったあと、どの辺や角が等しいかを使う。

例題 9　共通な辺を使う証明

図で、$AB = CB$、$AD = CD$ である。$\angle BAD = \angle BCD$ であることを説明しなさい。



解説

$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ に注目します。

$$AB = CB \quad \text{（仮定）}$$

$$AD = CD \quad \text{（仮定）}$$

$$BD = BD \quad \text{（共通）}$$

よって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$$

合同な図形では対応する角が等しいので、

$$\angle BAD = \angle BCD$$

答え： 合同を示して、対応する角が等しいことを使う。

6.2 合同条件の選び方

どの条件を使うか

- 辺の長さが 3 つ分かるなら、3 組の辺を考える。
- 辺 2 つと、その間の角が分かるなら、2 組の辺とその間の角を考える。
- 1 つの辺と、その両端の角が分かるなら、1 組の辺とその両端の角を考える。

7　よくあるつまずき

つまずき 1　対応の順番を間違える

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ なら、$A \leftrightarrow D$、$B \leftrightarrow E$、$C \leftrightarrow F$ です。対応を間違えると、辺や角を読み間違えます。

つまずき 2　合同条件の言葉が不正確

「辺と角が等しいから合同」だけでは不十分です。3 組の辺、2 組の辺とその間の角、1 組の辺とその両端の角のように、条件を正確に書きましょう。

つまずき 3　共通な辺や角を見落とす

2 つの三角形が重なっている図では、同じ辺や角を共有していることがあります。共通な辺は、たとえば $AC = AC$ のように書けます。

つまずき 4　合同を示したあとに何を使うか忘れる

合同を証明することがゴールではない問題もあります。合同を示したあと、対応する辺や角が等しいことを使って、問題で求められている結論につなげましょう。

8 勉強法

合同の勉強手順

(1) 合同条件を 3 つ暗記する。

(2) 図に、等しい辺や角の印をつける練習をする。

(3) 証明の型に沿って、短い証明を書く。

(4) 合同のあとに、対応する辺や角を使う問題を練習する。

(5) 入試問題では、どの三角形を比べるかを先に決める。

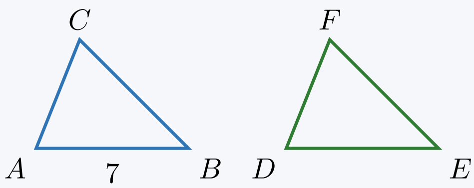
高校入試に向けて意識したいこと

合同は、証明問題の基本です。入試では、合同そのものを証明するだけでなく、合同を利用して辺や角が等しいことを示す問題も出ます。まずは、合同条件を正確に書けることを目標にしましょう。

9　練習問題

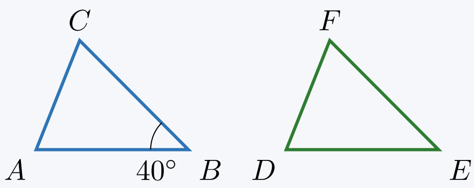
基本問題 1　対応する辺

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ で、$AB = 7\,\mathrm{cm}$ である。DE の長さを求めなさい。



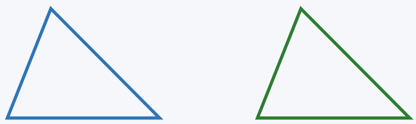
基本問題 2　対応する角

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ で、$\angle B = 40^\circ$ である。$\angle E$ の大きさを求めなさい。



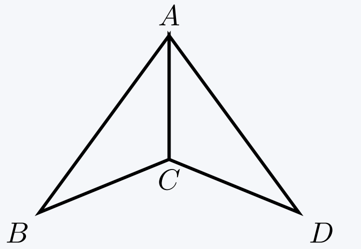
基本問題 3　合同条件

2 つの三角形で、3 組の辺がそれぞれ等しい。このとき、2 つの三角形が合同であるといえるか。理由も書きなさい。



基本問題 4　証明の穴埋め

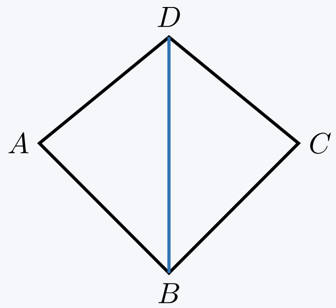
図で、$AB = AD$、$CB = CD$ である。$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ を示す証明の空欄を埋めなさい。



$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ において、$AB = AD$、$CB = CD$、さらに共通な辺より、__________$=$ __________。したがって、____________________がそれぞれ等しいので合同。

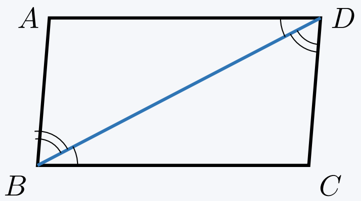
入試問題 1　合同を使って角を示す

図で、$AB = CB$、$AD = CD$ である。$\angle ABD = \angle CBD$ であることを説明しなさい。



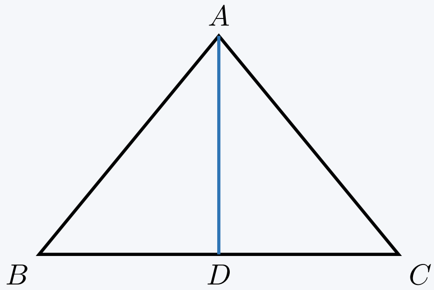
入試問題 2　合同を使って辺を示す

図で、$\angle ABD = \angle CDB$、$\angle ADB = \angle CBD$ である。$AB = CD$ であることを説明しなさい。



入試問題 3　証明問題

$AB = AC$ の二等辺三角形 ABC で、D は BC の中点である。$\angle BAD = \angle CAD$ であることを証明しなさい。



10 練習問題の解答・解説

基本問題 1　対応する辺

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ なので、AB と DE が対応します。

$$DE = AB = 7$$

答え： $7\,\mathrm{cm}$

基本問題 2　対応する角

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ なので、B と E が対応します。

$$\angle E = \angle B = 40^\circ$$

答え： 40°

基本問題 3　合同条件

三角形の合同条件より、3 組の辺がそれぞれ等しければ、2 つの三角形は合同であるといえます。
答え： いえる。理由は、3 組の辺がそれぞれ等しいから。

基本問題 4　証明の穴埋め

共通な辺は AC です。

$$AC = AC \quad （共通）$$

したがって、$AB = AD$、$CB = CD$、$AC = AC$ より、3 組の辺がそれぞれ等しいので合同です。
答え： $AC = AC$、3 組の辺

入試問題 1　合同を使って角を示す

$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ に注目します。

$$AB = CB \quad （仮定）$$

$$AD = CD \quad （仮定）$$

$$BD = BD \quad （共通）$$

よって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$$

合同な図形では対応する角が等しいので、

$$\angle ABD = \angle CBD$$

答え： 上のように、合同を示して対応する角が等しいことを使う。

入試問題 2　合同を使って辺を示す

$\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ に注目します。

$$\angle ABD = \angle CDB \quad （仮定）$$

$$\angle ADB = \angle CBD \quad \text{（仮定）}$$

$$BD = DB \quad \text{（共通）}$$

よって、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$$

合同な図形では対応する辺が等しいので、

$$AB = CD$$

答え： 上のように、合同を示して対応する辺が等しいことを使う。

入試問題 3　証明問題

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$$AB = AC \quad \text{（仮定）}$$

D は BC の中点なので、

$$BD = CD$$

また、

$$AD = AD \quad \text{（共通）}$$

よって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

合同な図形では対応する角が等しいので、

$$\angle BAD = \angle CAD$$

答え： 上のように、2 つの三角形の合同を示してから、対応する角が等しいことを使う。

11 まとめ

合同で覚えること

- 合同とは、ぴったり重なる図形である。
- 合同では、対応する辺の長さと角の大きさが等しい。
- 三角形の合同条件は 3 つある。
- 証明では、等しい辺や角を理由つきで書く。
- 合同を示したあと、対応する辺や角が等しいことを使う。

最後に確認すること

(1) 三角形の合同条件を 3 つ言えるか。

(2) 対応する頂点・辺・角をそろえられるか。

(3) 共通な辺や角を見つけられるか。

(4) 証明の最後に、どの合同条件を使ったか書けるか。

(5) 合同のあと、対応する辺や角が等しいことを使えるか。